ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΟΠΤΙΚΗΣ

(ΜΕ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

7 - ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

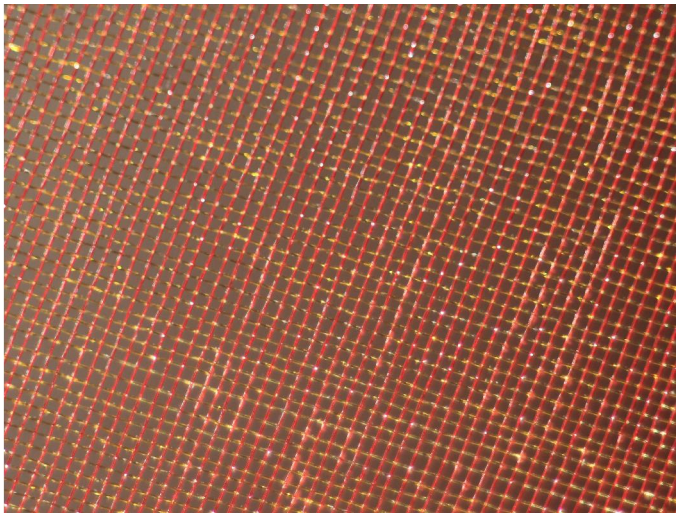
Ε.Δ. ΒΑΝΙΔΗΣ

ΘΕΣ/ΝΙΚΗ ΜΑΪΟΣ 2021

7 *Περίθλαση του φωτός*

Η περίθλαση, είναι το φαινόμενο που σχετίζεται με τη διάδοση των Η/Μ κυμάτων παρουσία όμως οριακών συνθηκών. Όπου με τον όρο 'οριακές συνθήκες' εννοούμε οτιδήποτε θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν 'εμπόδιο' στην ελεύθερη διάδοσή τους στο χώρο. Αφορά όλο το φάσμα των Η/Μ ακτινοβολιών (ραδιοκύματα, μικροκύματα, ακτίνες-Χ, ορατό φως κλπ.) καθώς και τη διάδοση 'μετ' εμποδίων' κυμάτων που αναδεικνύονται σε άλλους κλάδους της φυσικής όπως: Στην ***ακουστική*** (περίθλαση ηχητικών κυμάτων), τη ***ρευστομηχανική*** (περίθλαση υδάτινων κυμάτων), τη ***γεωλογία*** (περίθλαση σεισμικών κυμάτων), την ***ηλεκτρονική μικροσκοπία*** (περίθλαση ηλεκτρονίων από τις δομές της ύλης, με βάση την κυματική τους θεώρηση) κλπ. Το ενδιαφέρον μας βέβαια στο κεφάλαιο αυτό, θ' αφορά αποκλειστικά τις Η/Μ ακτινοβολίες και πιο συγκεκριμένα της ορατής περιοχής του φάσματός τους. Δηλ. θα μελετήσουμε την περίθλαση του φωτός.

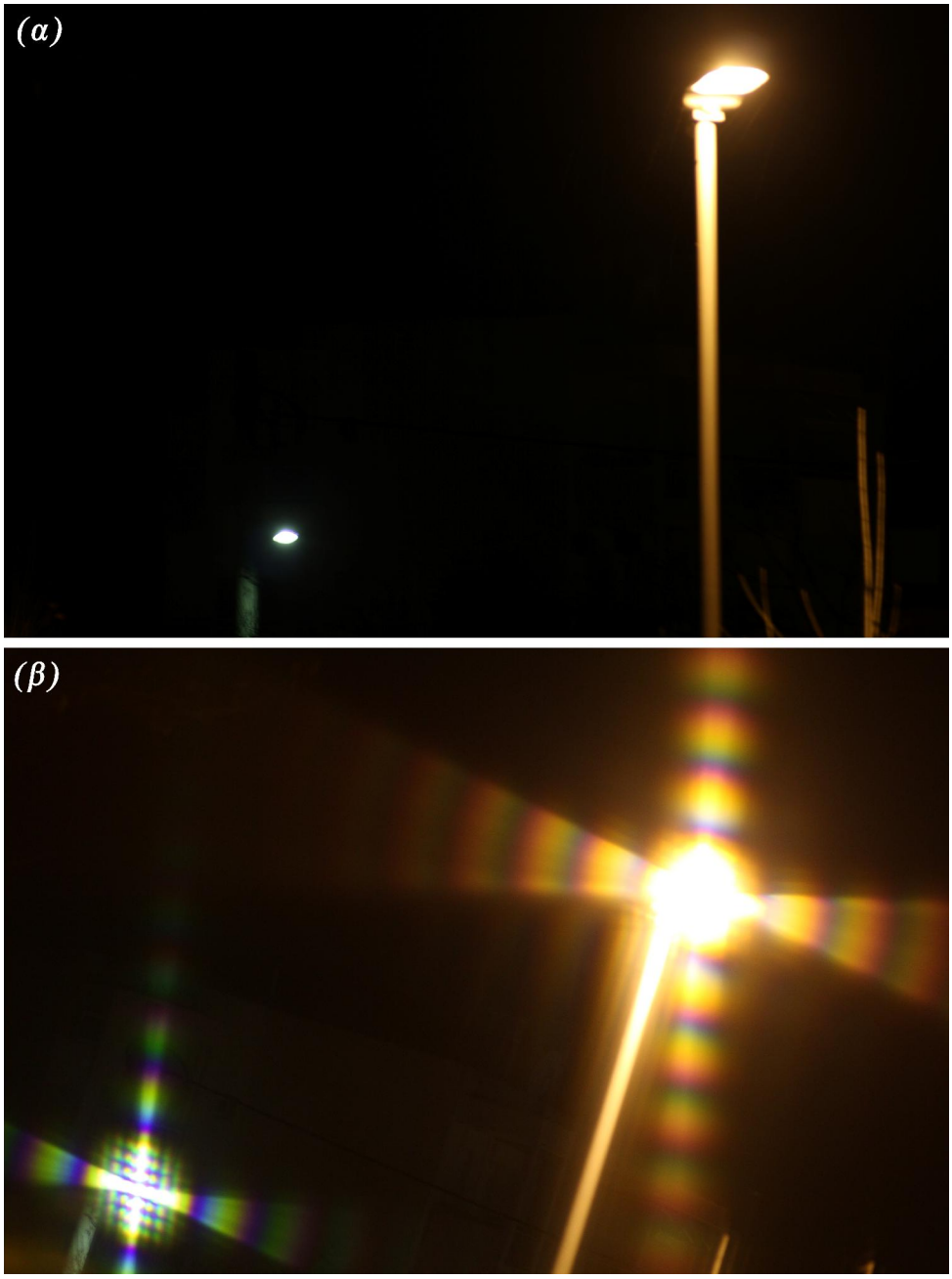
Μια άμεση ανάδειξη του φαινομένου της περίθλασης του φωτός μπορεί να γίνει τη νύχτα, όταν μέσω μιας κουρτίνας του παραθύρου μας, παρατηρήσουμε ένα από τα μακρινά φώτα του δρόμου. Τα φώτα του δρόμου είναι συνήθως: λυχνίες Na (Νατρίου) υψηλής πίεσης κιτρινωπής απόχρωσης, λυχνίες Hg (Υδραργύρου) επίσης υψηλής πίεσης λευκής απόχρωσης και λιγότερο, οι πλέον σύγχρονες λυχνίες LED και αυτές λευκής ή κιτρινωπής απόχρωσης. Μας είναι βέβαια γνωστό ότι η ύφανση της κουρτίνας, της οποίας τη μεγέθυνση μιας περιοχής της με μικροσκόπιο βλέ-



(Εικ. 7.1)

πουμε στην (Εικ. 7.1), συνίσταται από νήματα τα οποία αφ' ενός μεν είναι πολύ πυκνά μεταξύ τους αφ' ετέρου εμφανίζουν μια κανονική περιοδική δομή σε δύο διαστάσεις. Δηλ. έχουμε κατακόρυφα και οριζόντια διαφανή νήματα με μια τυπική απόσταση μεταξύ τους της τάξης του $1/10\,\mathrm{mm}$. Οπότε με τον τρόπο αυτό, δημιουρ-

γούνται σε διατεταγμένες θέσεις που ισαπέχουν, διαπερατά από το φως ορθογώνια ανοίγματα. Δεν έχουμε τώρα παρά να παρεμβάλλουμε ανάμεσα στο μάτι μας (πολύ κοντά σ' αυτό) και τα φώτα του δρόμου (Εικ. 7.2α) την κουρτίνα, για να δούμε (φαινομενικά όπως θα εξηγήσουμε αμέσως μετά), περιμετρικά στις θέσεις που βρί-

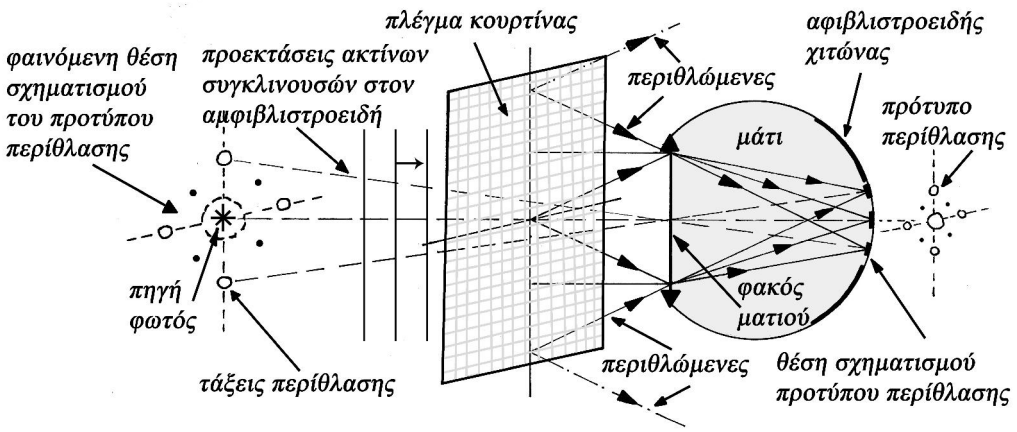


(Εικ. 7.2)

σκονται οι πηγές φωτός, κατανομές περιοδικοτήτων έντασης του φωτός σε δύο διαστάσεις, που διαμορφώνονται (περιορίζονται) από ένα συμμετρικό σχήμα (Εικ. 7.2β). Θα τις ονομάζουμε στα επόμενα πρότυπα περίθλασης. Ταυτόχρονα διαπιστώνουμε και ανάλυση του φωτός της κάθε περιοδικότητας η οποία οφείλεται στην

πολυχρωματικότητα των πηγών φωτός. Είναι λοιπόν η παρεμβολή του 'εμποδίου' (της κουρτίνας με τη συγκεκριμένη της δομή) στην ελεύθερη διάδοση του φωτός που προκαλεί το φαινόμενο που μόλις περιγράψαμε και το ονομάσαμε ***περίθλαση του φωτός (diffraction of light)***.

Μια στοιχειώδη φαινομενολογική ερμηνεία του μπορούμε να επιχειρήσουμε με τη βοήθεια του (Σχ. 7.3). Εκεί βλέπουμε το φως της πηγής με τη μορφή επιπέδου μετ. κύματος (λόγω της μεγάλης απόστασης στην οποία βρίσκεται), να προσπίπτει



(Σχ. 7.3)

στην κουρτίνα. Τότε η δομή της περιθλά – όπως λέμε – το φως (δεδομένου ότι δεν πρόκειται για ανάκλαση ή διάθλαση). Δηλ. είναι εμφανές ότι έχουμε διάδοση φωτός σε διακεκριμένες κατευθύνσεις του χώρου μετά απ' αυτήν. Και το μόνο που μπορούμε να σκεφτούμε εδώ, είναι ότι το προσπίπτον φώς σκεδάστηκε από τα όρια των ορθογωνίων ανοιγμάτων της κουρτίνας (αλληλεπίδραση του φωτός και της ύλης). Στο (Σχ. 7.3) επιλέγουμε για λόγους απλότητας τρεις διαταραχές από τις πολλές (με τη μορφή επιπέδων μετ. κύματος) προς τις οποίες περιθλάται το φως: Την κατ' ευθείαν διαδιδόμενη (ίδια με τη διεύθυνση της προσπίπτουσας) την οποία ονομάζουμε μη περιθλώμενη και δύο (συμμετρικά διαδιδόμενες ως προς την προσπίπτουσα) και με μια κλίση σε σχέση με αυτή. Οι διαταραχές αυτές (που στα επόμενα θα τις ονομάζουμε τάξεις περίθλασης) μέσω της κόρης του ματιού σε χαλάρωση (δηλ. το μάτι μας είναι προσαρμοσμένο στο άπειρο και δεν 'βλέπει' την κουρτίνα), προσπίπτουν στον κρυσταλλώδη του φακό, ο οποίος με τη σειρά του τις εστιάζει στον αμφιβληστροειδή χιτώνα. Εκεί θα σχηματιστεί μια κατανομή έντασης που την ονομάζουμε ***πρότυπο περίθλασης (diffraction pattern)***, στην προκειμένη περίπτωση διακριτής κατανομής. Η κατανομή αυτή εξαρτώμενη από τη μορφή του εμποδίου δηλ. του στοιχείου που προκαλεί την περίθλαση, μπορεί να είναι συνεχής, διακριτή ή σύνθετη. Το ζήτημα όμως είναι ότι εμείς (διά μέσου της κουρτίνας)

'βλέπουμε' αυτήν την κατανομή να σχηματίζεται (να ταυτίζεται) με το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η πηγή φωτός του δρόμου. Η θέση αυτή είναι η 'φαινόμενη' θέση σχηματισμού του προτύπου, γιατί η πραγματική – όπως είδαμε προηγουμένως – σχηματίζεται στον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού. Το τελευταίο οφείλεται στο γεγονός ότι το μάτι μας 'βλέπει' την εικόνα περίθλασης να 'προέρχεται' από τις διευθύνσεις που είναι αντίθετες των διευθύνσεων των συγκλινουσών ακτίνων (διαταραχών) στο εσωτερικό του ματιού. Αυτός είναι και ο λόγος που η εικόνα περίθλασης (το πρότυπο περίθλασης) φαίνεται να σχηματίζεται πέριξ της πηγής.

Στην (Εικ. 7.2β) βλέπουμε δύο πρότυπα περίθλασης που οφείλονται σε δύο διαφορετικές πηγές φωτός του δρόμου με δικό της η κάθε μια φασματικό περιεχόμενο. Το κάτω αριστερά οφείλεται σε πηγή Υδραργύρου ενώ το πάνω δεξιά σε πηγή Νατρίου. Η πηγή του Υδραργύρου εκτός των γραμμών του στην πράσινη και μπλε περιοχή, λόγω του φθορίζοντος επικαλύμματος εμφανίζει και συνεχές υπόβαθρο. Και με δεδομένο – όπως θ' αποδειχθεί στα επόμενα – οι γωνίες προς τις οποίες περιθλάται το φως είναι ανάλογες του μ.κ. του προσπίπτοντος φωτός στο εμπόδιο, θα έχουμε και την παρεμβολή του φαινομένου της ανάλυσής του. Επίσης το πρότυπο περίθλασης που οφείλεται στην πηγή του Νατρίου, παρά το ότι η τελευταία είναι κιτρινωπής απόχρωσης (το Na κατά τα γνωστά εκπέμπει μονοχρωματικό φως σε μ. κ. $\bar{\lambda} = 589\text{nm}$), λόγω του ότι η λυχνία είναι υψηλής πίεσης, το φάσμα της διαθέτει και ένα μικρής έντασης συνεχές υπόβαθρο. Για το λόγο αυτό και στην περίπτωση αυτή, το πρότυπο περίθλασης εμφανίζει ανάλυση του φωτός.

Σημείωση

Πρέπει ν' αναφέρουμε, για λόγους ακριβούς περιγραφής των προτύπων της κατανομής των εντάσεων που εμφανίζονται στην (Εικ. 7.2β), ότι είναι συνδυασμός φαινομένων περίθλασης και συμβολής του φωτός (συν την προαναφερόμενη ανάλυση). Το φαινόμενο της συμβολής αφορά τις διακριτές περιοδικότητες που εμφανίζει η κάθε εικόνα περίθλασης και οφείλονται στη συμβολή του φωτός από τις αντίστοιχες περιοδικότητες του περιθλώντος στοιχείου. Εδώ του φράγματος δύο διαστάσεων των ορθογωνίων 'ματιών' που σχηματίζονται από τα νήματα της κουρτίνας (Εικ. 7.1). Και όσον αφορά τη συνεισφορά του φαινομένου της περίθλασης, γίνεται εμφανής από εκείνη τη δομή, που διαμορφώνει το πρότυπο συμβολής. Δηλ. από το γενικό σχήμα που διαμορφώνει (περιορίζει) τις περιοδικότητες που δημιουργεί η συμβολή. Το σχήμα αυτό από μόνο του (χωρίς αυτό της συμβολής) θα μπορούσαμε να το δούμε αν παρεμβάλλαμε μεταξύ του ματιού μας και της μακρινής πηγής, ένα μόνο από την πολλαπλότητα των ορθογωνίων ανοιγμάτων της κουρτίνας.

Αναφέραμε ήδη ότι το φαινόμενο της περίθλασης αφορά την 'εμποδιζόμενη' διάδοση των Η/Μ πεδίων μέσω της ύλης. Π.χ. διάδοση ακτινών-Χ μέσω του πλέγματος ενός κρυστάλλου (βλ. § 7.7.2). Τη διάδοση μικροκυμάτων από ένα εκατοστομετρικής περιοδικότητας πλέγμα. Τη διάδοση του φωτός από ένα φράγμα, όπως αυτό της πυκνο-υφασμένης κουρτίνας. Από τα προαναφερόμενα παραδείγματα προκύπτει ένας κανόνας τον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε χωρίς όμως ιδιαίτερη αυστηρότητα. Αυτός μα λέει ότι: Μια ακτινοβολία μπορεί να περιθλαστεί, όταν οι διαστάσεις του 'εμποδίου' στο οποίο προσπίπτει είναι της τάξεως του μ.κ. της ή τουλάχιστον δεν διαφέρουν πολύ. Στον κανόνα αυτό υπακούουν τα τρία προαναφερόμενα παραδείγματα. Πράγματι για να έχουμε περίθλαση από μία κρυσταλλική πλεγματική δομή, θα πρέπει αυτή να 'φωτιστεί' με ακτινες-Χ που το μ.κ. τους είναι έστω $\lambda = 0.5\,\text{Å}$. Με δεδομένες τις ενδοατομικές αποστάσεις του πλέγματος που είναι π.χ. $10\,\text{Å}$. Επίσης σ' ένα συρμάτινο ορθογώνιο πλέγμα που οι διαστάσεις των 'ματιών' του είναι έστω $10\times 10\text{cm}$, μπορούν να περιθλαστούν με βεβαιότητα τα εκατοστομετρικά μικροκύματα. Τέλος περίθλαση όντως παρατηρήσαμε και από μία πυκνο-υφασμένη κουρτίνα παρά την αρκετά σημαντική διαφορά μεταξύ των αποστάσεων των νημάτων της $\left(d \simeq 0.1\text{mm}\right)$ και του μέσου μήκους κύματος των ορατών ακτινοβολιών $\left(\bar{\lambda} = 0.5\times 10^{-3}\,\text{mm}\right)$.

Επειδή βέβαια η περίθλαση συνιστά αλληλεπίδραση Η/Μ πεδίων με την ύλη, είναι προφανές ότι τα περιθλώμενα πεδία θα μεταφέρουν πληροφορίες. Σε σχέση με τα παραδείγματα που αναφέραμε προηγουμένως, από τα πρότυπα περίθλασης της 'έντασης' των περιθλώμενων πεδίων αποκομίζουμε στοιχεία για τις διαστάσεις, καθώς και τις αποστάσεις μεταξύ των περιθλώντων στοιχείων . Π.χ. αποστάσεις μεταξύ των πλεγματικών επιπέδων των ατόμων στους κρυστάλλους, διαστάσεις των 'ματιών' στο συρμάτινο πλέγμα και αποστάσεις ανάμεσα στα νήματα της κουρτίνας. Και όσον αφορά την εντός εισαγωγικών λέξη της έντασης, το τελευταίο σχετίζεται με τον διαφορετικό τρόπο ανίχνευσης των ακτινοβολιών που προέρχονται από διαφορετική περιοχή του Η/Μ φάσματος. Π.χ. τα πρότυπα περίθλασης των ακτινών-Χ από τις πλεγματικές δομές των ατόμων καταγράφονται σε ειδικά φωτογραφικά φιλμ. Επίσης η κατανομή της 'έντασης' του ηλ. πεδίου των μικροκυμάτων μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια ενός παθητικού κυκλώματος πηνίου-πυκνωτή. Τέλος τα πρότυπα περίθλασης στην περιοχή του ορατού, μπορούν να ληφθούν μέσω μιας CCD κάμερας ή μπορούμε να τα δούμε και με το μάτι μας.

Περίθλαση όμως υφίσταται και εκτός των ορίων που καθορίζει ο προαναφερόμενος κανόνας. Π.χ. στο κεφάλαιο της Γεωμετρικής Οπτικής, αναφερθήκαμε σε βασικά οπτικά όργανα παρατήρησης: Αφ' ενός μεγάλων αντικειμένων σε πολύ μακρινή απόσταση (τηλεσκόπια) καθώς και πολύ μικρών αντικειμένων σε μικρή απόσταση (μικροσκόπια). Ακόμη και το ανθρώπινο μάτι είναι ένα όργανο παρατήρη-

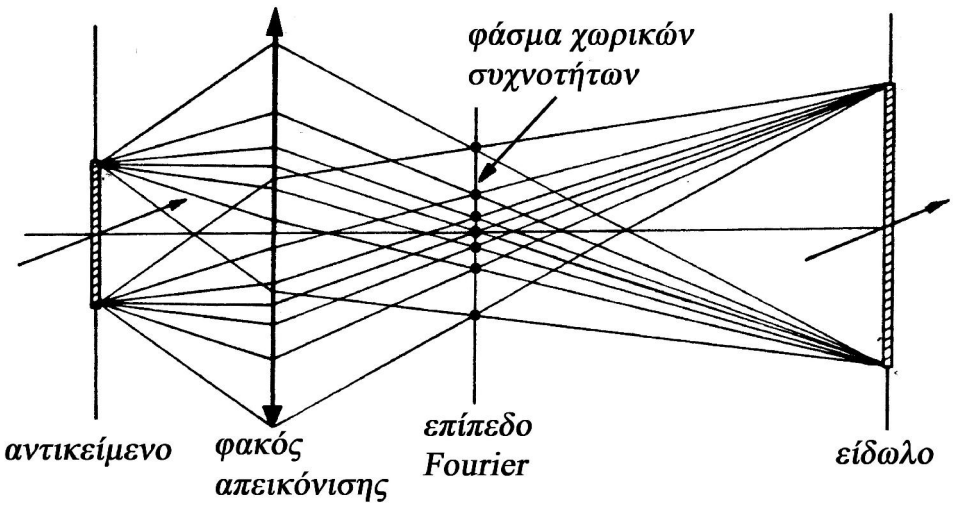
σης. Και επειδή το φως έχει κυματικό χαρακτήρα (αναφερόμαστε στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος), αποδεικνύεται ότι περνώντας δια μέσου τους περιθλάται. Και περιθλάται επειδή τα όργανα αυτά αποτελούνται από φακούς διαφράγματα και άλλα στοιχεία, δηλ. εμπόδια. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε στα επόμενα ότι ένα επίπεδο μετ. κύματος περιθλάται από τα όρια ενός φακού, που ούτως ή άλλως η διάμετρός του είναι κατά πολύ μεγαλύτερη του μέσου μ.κ. του ορατού φωτός. Και σαν αποτέλεσμα θα έχουμε στο εστιακό του επίπεδο η δέσμη να μην συγκλίνει σ' ένα σημείο (όπως προβλέπει η γεωμετρική οπτική) αλλά σε μια κατανομή έντασης που η μορφή και τα χωρικά της χαρακτηριστικά εξαρτώνται από μεγέθη όπως: Το μ.κ. του προσπίπτοντος φωτός, τη διάμετρο του φακού καθώς και την εστιακή του απόσταση (§ 7.5.1). Η ίδια μορφολογικά κατανομή σχηματίζεται σαν είδωλο, κατά την απεικόνιση μέσω του φακού, ενός σημειακού αντικειμένου. Τότε για δύο σημεία ενός αντικειμένου που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και που απεικονίζονται από το φακό ή ένα πολύπλοκο οπτικό όργανο, θα μπορούσαν να θεωρηθούν ξεχωριστά ή όχι, ανάλογα με το αν οι προαναφερόμενες κατανομές τους είναι διακριτές (βλ. §7.5.3). Το συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι η διακριτική ικανότητα ενός φακού ή ενός οπτικού οργάνου, έχει άμεση σχέση με την περίθλαση του φωτός δια μέσω των στοιχείων του.

Ένας εξαιρετικά ενδιαφέρον τομέας της οπτικής, είναι η λεγόμενη ***Οπτική Fourier (Fourier Optics)***. Το γνωστικό της υπόβαθρο είναι η θεωρία των γραμμικών συστημάτων και της περίθλασης του φωτός και εμφανίζει μεγάλο πεδίο εφαρμογών. Δύο από αυτές είναι η ***Ολογραφία (Holography)*** και ο κλάδος της λεγόμενης ***Επεξεργασίας οπτικών πληροφοριών (Optical image processing***

Όσον αφορά την ολογραφία, ήδη αναφερθήκαμε γι' αυτήν στην εισαγωγή του κεφαλαίου της συμβολής του φωτός και ασχολούμαστε στοιχειωδώς στο (ΘΕΜΑ 2) του παρόντος κεφαλαίου. Η ολογραφία είναι μια μέθοδος απεικόνισης αντικειμένων σε τρείς όμως διαστάσεις. Δηλ. στο χώρο. Σε αντίθεση με την απλή φωτογραφική απεικόνιση, που τα είδωλά της λαμβάνονται σε δύο διαστάσεις. Δηλ. στο επίπεδο. Με την ολογραφία, μπορούμε να πετύχουμε καταγραφή (σ' ένα μέσο) και αναπαραγωγή (από αυτό) στο χώρο, του μετώπου κύματος που αναδύεται από ένα αντικείμενο όταν αυτό φωτιστεί και το οποίο μέσω των ματιών μας και του οπτικού φλοιού του εγκεφάλου αναπαριστάνεται (έχουμε την αίσθηση) σε τρείς διαστάσεις. Δηλ. στο χώρο. Θα δούμε ότι η αποθήκευση των πληροφοριών σ' ένα μέσο καταγραφής, αφορά το φαινόμενο της συμβολής του φωτός. Όσο δε για την αναπαραγωγή του μετ. κύματος από αυτό, θα πρέπει να γίνει με κατάλληλο φωτισμό του και αφορά το φαινόμενο της περίθλασης του φωτός. Από τις πάμπολλες εφαρμογές της ολογραφίας αναφέρουμε μία. Είναι αυτή της λεγόμενης ολογραφικής συμβολομετρίας. Πρόκειται για μια από τις πλέον ακριβείς μεθόδους μετρολογίας στον κλάδο της μηχανικής. Με τη βοήθειά της είναι δυνατός π.χ. ο προσδιορισμός των κα-

τανομών των μηχανικών τάσεων, των παραμορφώσεων, των αντοχών κλπ , σε πτερύγια, ικριώματα και γενικότερα σε μηχανικές κατασκευές. Η μεθοδολογία του προσδιορισμού γίνεται ως επί το πλείστον με την κατασκευή μοντέλων τα οποία υπόκεινται σε προγραμματισμένες καταπονήσεις.

Όσον αφορά τώρα το υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται η θεωρία της επεξεργασίας των οπτικών πληροφοριών, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής: Γενικά ένα μέτωπο κύματος που αναδύεται (στην πραγματικότητα περιθλάται) από ένα φωτιζόμενο αντικείμενο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αναλύεται (Σχ. 7.4) σε μια πολλαπλότητα επιπέδων μετ. κύματος τα οποία ανά συμμετρικά ζεύγη διαδίδονται με διαφορετικές γωνίες στο χώρο. Προκειμένου τώρα να σχηματιστεί το είδωλο

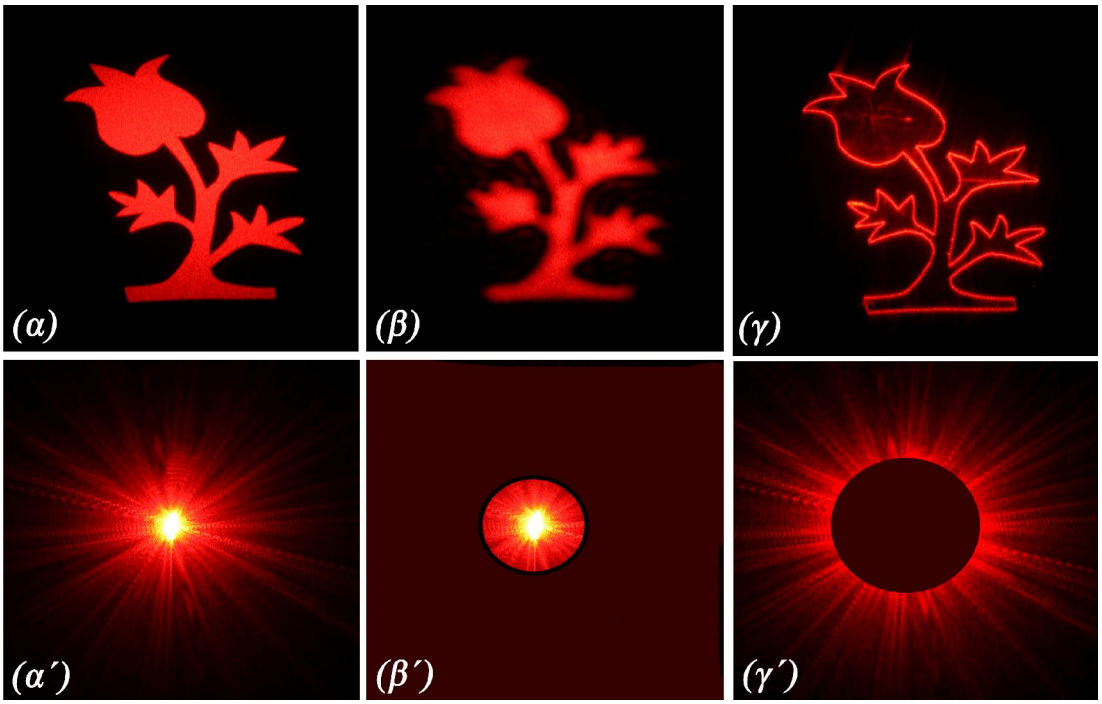


(Σχ. 7.4)

του αντικειμένου, θα πρέπει κατά τα γνωστά να χρησιμοποιηθεί ένα απεικονίζον σύστημα: Π.χ. ένας θετικός φακός. Και ο φακός όπως γνωρίζουμε διαθέτει ένα πίσω εστιακό επίπεδο. Εφόσον λοιπόν σ' αυτόν (με βάση την ανάλυση του αρχικού μετ. κύματος που αναδύεται από το αντικείμενο) προσπίπτουν επίπεδα μετ. κύματος με διαφορετική κλίση, θα τα εστιάσει σ' αυτό. Κατόπιν διαδίδονται με τη μορφή αποκλινόντων σφαιρικών μετ. κύματος προς το επίπεδο απεικόνισης. Είναι εύλογο να συμπεράνουμε ότι στο εστιακό επίπεδο του φακού (που ονομάζεται και επίπεδο Fourier), αναδεικνύεται όλο το πληροφοριακό περιεχόμενο που αφορά τη χωρική δομή του αντικειμένου και για κάθε αντικείμενο είναι διαφορετικό. Η κατανομή αυτού του πεδίου, ονομάζεται φάσμα Fourier και συνιστά το πρότυπο περίθλασης του μετ. κύματος που αναδύεται (περιθλάται) από το αντικείμενο. Μπορεί να έχει διακριτή μορφή, συνεχή ή να είναι μικτό. Και αυτό σχετίζεται με την πολυπλοκότητα του αντικειμένου (δηλ. του περιθλώντος στοιχείου). Το κάθε σημείο του, που σχετίζεται με αντίστοιχο επίπεδο μετ. κύματος συγκεκριμένης κλίσης σε

σχέση με τον οπτικό άξονα, αντιστοιχεί και σε μια ***χωρική συχνότητα (spatial frequency)***. Το σύνολο των χωρικών συχνοτήτων συνιστά το ***φάσμα Fourier (Fourier spectrum).*** Αν όπως ήδη έχουμε αναφέρει, τα σφαιρικά μετ. κύματος, συνεχίσουν διαδιδόμενα από αυτά τα σημεία, έρχονται σε επαλληλία στο επίπεδο απεικόνισης (Σχ. 7.4) και συνθέτουν το είδωλο του αντικειμένου. Αυτού του είδους η ανάλυση, ονομάζεται απεικόνιση Abbe από το όνομα του Ernst Abbe που πρώτος τη διατύπωσε.

Αν εμείς τώρα με οποιοδήποτε τρόπο τροποποιήσουμε το φάσμα στο επίπεδο Fourier (π.χ. αποκόψουμε μ' ένα διάφραγμα ένα ορισμένο αριθμό από τις χωρικές συχνότητες, επιτρέποντας τη διέλευση των υπόλοιπων), τότε θα είναι επόμενο ότι θα τροποποιηθεί η δομή του ειδώλου. Αυτή είναι η αρχή της λεγόμενης επεξεργασίας των οπτικών πληροφοριών, που αποτελεί βασικό θέμα της οπτικής Fourier. Στην (Εικ. 7.5α) βλέπουμε ένα αντικείμενο και στην (Εικ. 7.5α΄) το αντίστοιχο φα-

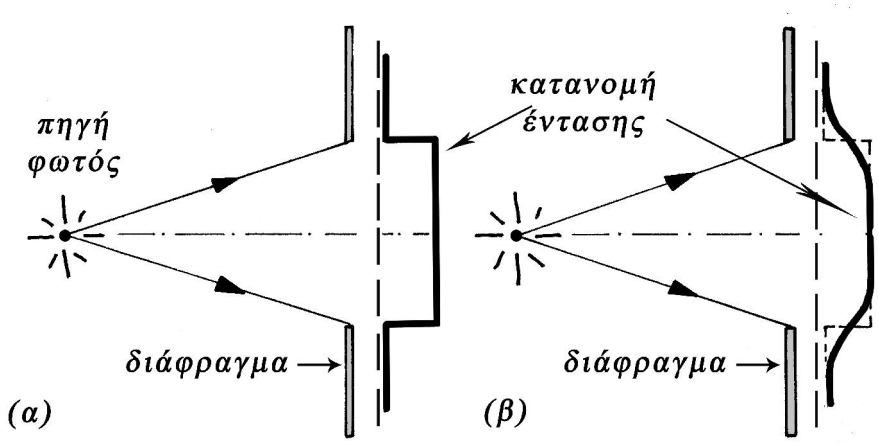


(Εικ. 7.5)

σμα Fourier. Το τελευταίο είναι συνεχές λόγω της πολυπλοκότητας του αντικειμένου. Δηλ. συνίσταται από πολύ μεγάλο αριθμό χωρικών συχνοτήτων που κατανέμονται συνεχώς. Τότε κατά την απεικόνιση, το είδωλο θα είναι πανομοιότυπο του αντικειμένου. Έστω σε επόμενη φάση, αποκόπτουμε με ένα διάφραγμα στο επίπεδο Fourier τις υψηλές χωρικές συχνότητες (δηλ. εμποδίζουμε να διαδοθούν τα πεδία τους) (Σχ. 7.5β΄) και επιτρέπουμε να περάσουν μόνο οι χαμηλές που κατανέμονται περί το κέντρο του φάσματος. Τότε η δομή του σχηματιζόμενου ειδώλου κάτω από

αυτές τις συνθήκες θ' αλλοιωθεί και θα εμφανίσει τη μορφή της (Εικ. 7.5β). Σ' αυτήν βλέπουμε ότι έχουν εξαφανιστεί λεπτομέρειες που χαρακτηρίζουν το αντικείμενο. Σε μια τρίτη φάση με ένα κατάλληλο πάλι διάφραγμα (Σχ. 7.5γ΄) μπλοκάρουμε στο επίπεδο Fourier την περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων περί το κέντρο του φάσματος και επιτρέπουμε μόνο τη διέλευση των υψηλών χωρικών συχνοτήτων. Με αυτές τις συνθήκες το είδωλο του αντικειμένου, εμφανίζει τη μορφή της (Εικ. 7.5γ). Στην οποία βλέπουμε μόνο το περίγραμμα που συνιστά αποκλειστικά τις λεπτομέρειες που συνθέτουν το αντικείμενο. Πλείστες όσες εφαρμογές μπορούν να προκύψουν με τη βοήθεια τέτοιων μεθόδων.

Ιστορικά, από τις πρώτες ενδείξεις περιγραφής του φαινόμενου της περίθλασης του φωτός, ήταν η δημοσίευση των αποτελεσμάτων (1665) ορισμένων πειραμάτων που οφείλονταν στον Fr .Grimaldi, λίγο μετά τον θάνατό του. Η πειραματική του διάταξη που φαίνεται στο (Σχ. 7.6) περιελάμβανε τα εξής: Μια πηγή φωτός μικρών σχετικά διαστάσεων που εξέπεμπε ελεύθερα στο χώρο. Σε μια ορισμένη από-

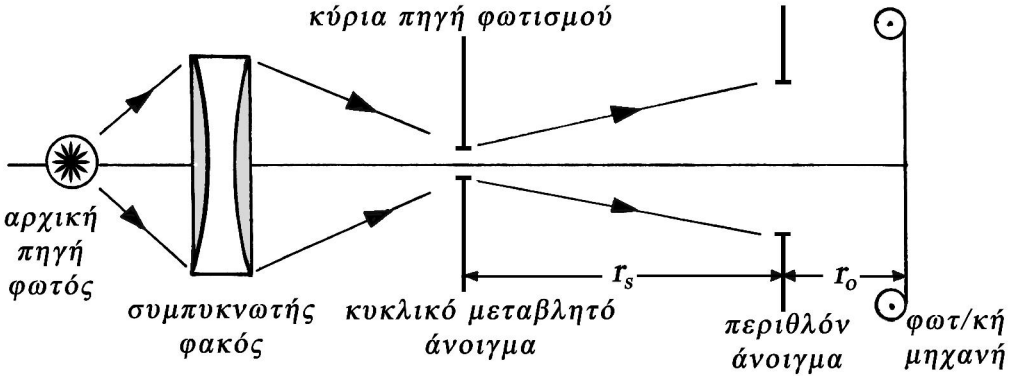


(Σχ. 7.6)

σταση από αυτήν βρισκόταν τοποθετημένο ένα αδιαφανές πέτασμα που περιελάμβανε ένα αρκετά μεγάλο άνοιγμα. Και πίσω από αυτό ένα πέτασμα παρατήρησης. Με βάση τη γεωμετρική άποψη για την όδευση των ακτινών του φωτός, ο Grimaldi περίμενε από το πείραμα μια εντελώς αυστηρή οριοθέτηση της γεωμετρικής σκιάς στο πέτασμα παρατήρησης, μετά το πέρασμα του φωτός από το διάφραγμα (Σχ. 7.6α). Αντί όμως γι' αυτό παρατήρησε μέσα στα όρια της γεωμετρικής σκιάς μια βαθμιαία απόσβεση του φωτός (Σχ. 7.6β). Το περιγραφέν αποτέλεσμα, έχει άμεση σχέση με το φαινόμενο περίθλασης του φωτός. Η ετιμολογία της λέξης περίθλαση, ανάγεται στο ρήμα περι – θλώμαι. Δηλ. κάμπτομαι – γύρω από. Που σημαίνει εδώ την αλλαγή πορείας του φωτός μετά τη συνάντηση του με τα όρια του ανοίγματος στο διάφραγμα. Είναι το φαινόμενο που σύμφωνα με τον A.Somerfield αφορά την

εκτροπή των Η/Μ διαταραχών από την ευθύγραμμη διάδοσή τους, αποκλείοντας όμως φαινόμενα όπως η ανάκλαση και η διάθλαση.

Θα ήταν πολύ χρήσιμο να ξαναεκτελέσουμε το πείραμα του Grimaldi και μάλιστα χρησιμοποιώντας διαφορετικούς τύπους πηγών φωτός, αναδεικνύοντας το φαινόμενο της περίθλασης. Μια από τις πειραματικές διατάξεις είναι αυτή που φαίνεται στο (Σχ. 7.7). Περιλαμβάνει: Μια αρχική πηγή φωτός. Ένα σύστημα συμπυκνωτή φακού που εστιάζει φωτίζοντας στη θέση που βρίσκεται ένα κυκλικό άνοιγ-

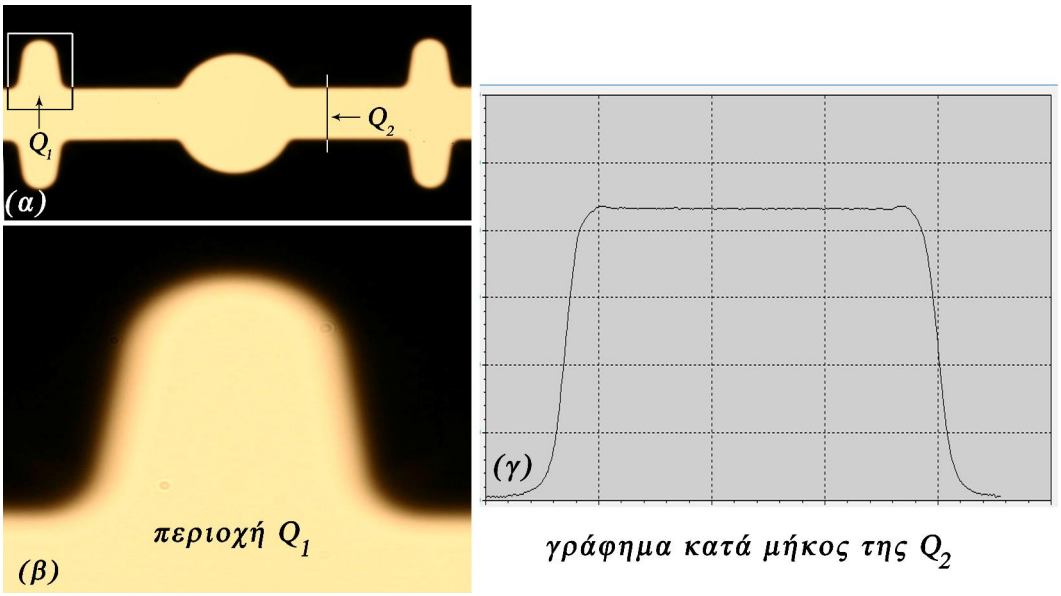


(Σχ. 7.7)

μα. Το άνοιγμα αυτό που είναι μεταβλητής διαμέτρου, συνιστά την κύρια πηγή φωτισμού ενός περιθλώντος ανοίγματος, που βρίσκεται σε απόσταση r_s από αυτή. Μετά το περιθλόν άνοιγμα και σε απόσταση r_o, βρίσκεται φωτογραφική μηχανή (χωρίς φακό) στην οποία μπορεί να καταγραφεί η κατανομή της έντασης του φωτός του περιθλώμενου πεδίου. Η διάμετρος του περιθλόντος ανοίγματος και οι τιμές των r_s, r_o μας οδηγούν στο να βρισκόμαστε σε περιοχή της λεγόμενης περίθλασης Fresnel (κοντινού πεδίου), όπως αυτή θα περιγραφεί λεπτομερώς στην (§ 7.8). Το περιθλόν αντικείμενο είναι μια κοινή λεπίδα ξυραφιού και οι αποστάσεις r_s, r_o έχουν τις τιμές: $r_s = 30\text{cm}, r_o = 2.5\text{cm}$. Τη χωρο−χρονική συμφωνία του φωτός που προσπίπτει στο περιθλόν άνοιγμα, μπορούμε να τη μεταβάλλουμε: α) Τη χρονική: Χρησιμοποιώντας αρχικές πηγές συγκεκριμένου φασματικού εύρους και β) Τη χωρική: Μεταβάλλοντας τη διάμετρο του κυκλικού ανοίγματος (κύρια πηγή), από το οποίο προκύπτει το φως που προσπίπτει στο περιθλόν άνοιγμα.

1) Με το πρώτο πείραμα, το οποίο προσομοιάζει με αυτό του Grimaldi, η αρχική πηγή είναι μια λυχνία αλογόνου που εκπέμπει λευκό φως. Όσο για το κυκλικό άνοιγμα (την κύρια πηγή φωτός από την οποία φωτίζεται το περιθλόν άνοιγμα), έχει διάμετρο $d = 3\text{mm}$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, στο περιθλόν άνοιγμα προσπίπτει σχετικά χρονικά και χωρικά ασύμφωνο φως. Και το αποτέλεσμα φαίνε-

ται στις (Εικ. 7.8). Στην (Εικ. 7.8α) βλέπουμε την κατανομή της έντασης του περιθλόμενου πεδίου στην απόσταση των $r_o = 2.5\text{cm}$. Στην (Εικ. 7.8β) φαίνεται ένα μεγεθυμένο τμήμα της (περιοχή Q_1) και στην (Εικ. 7.8γ) βλέπουμε το γράφημα (την κατανομή της έντασης) κατά μήκος ενός ανοίγματος της λεπίδας (ευθεία γραμμή Q_2), που περιλαμβάνει το τμήμα του εσωτερικού του, καθώς και τμήμα στο εσω-



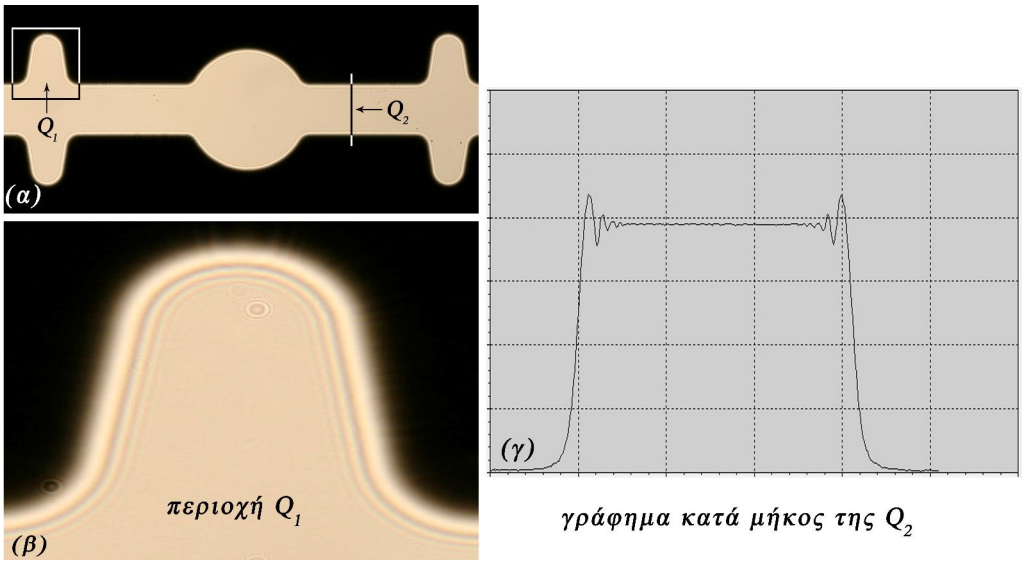
(Εικ. 7.8)

τερικό της γεωμετρικής σκιάς. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι υφίσταται βαθμιαία απόσβεση της έντασης του φωτός στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς και είναι σταθερή στο εξωτερικό της (δηλ. στο εσωτερικό της λεπίδας).

2) Στο δεύτερο πείραμα, ελαττώνουμε τη διάμετρο του κυκλικού ανοίγματος (της κύριας πηγής) στην τιμή $d = 0.2\text{mm}$, που σημαίνει αύξηση της χωρικής συμφωνίας του φωτός που προσπίπτει στο περιθλόν άνοιγμα, με τη χρονική συμφωνία να παραμένει η ίδια (ίδια φασματική κατανομή της αρχικής πηγής φωτός). Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα στα όρια των διακένων της λεπίδας του ξυραφιού (Εικ. 7.9α,β) να εμφανιστούν ελάχιστοι κροσσοί περίθλασης (περίθλαση Fresnel). Επίσης λόγω της πολυχρωματικότητας της πηγής του αλογόνου θα έχουμε συγχρόνως και ανάλυση του φωτός.

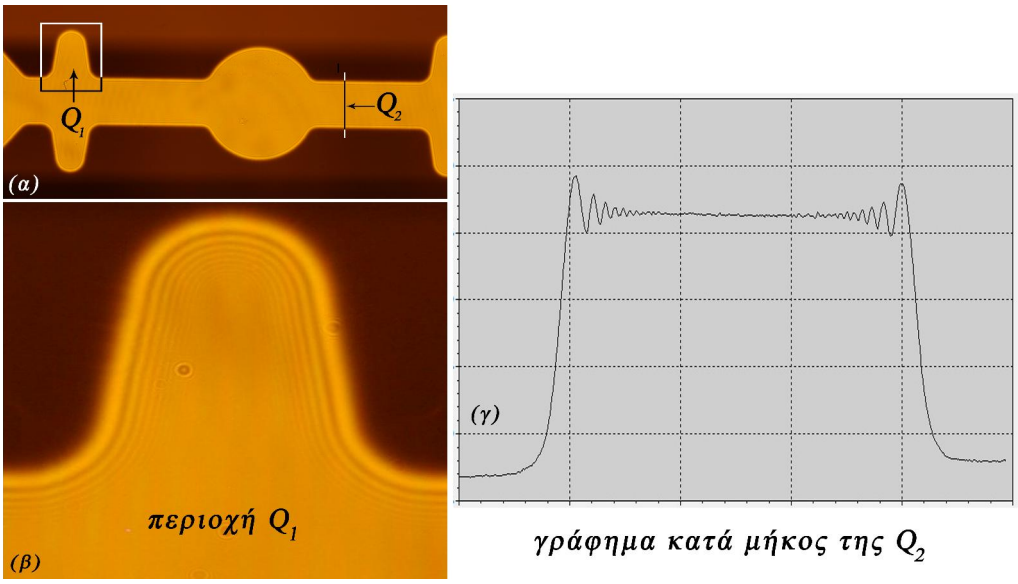
3) Στο τρίτο πείραμα η αρχική φωτίζουσα πηγή είναι μια εκτεταμένη σε μέγεθος φασματική λυχνία Νατρίου. Κατά τα γνωστά εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως μέσου μ.κ. $\bar{\lambda} \simeq 589\text{nm}$. Το φως της τελευταίας (μέσω του συμπυκνωτή φακού (Σχ. 7.7)) προσπίπτει στο κυκλικό άνοιγμα (την κύρια πηγή φωτός) τη διάμετρο της

οποίας διατηρούμε στα $d = 0.2\text{mm}$. Με αυτά τα δεδομένα: Η χρονική συμφωνία λόγω της ψευδομονοχρωματικότητας του φωτός που εκπέμπεται από τη λυχνία του



(Σχ. 7.9)

Νατρίου, είναι αρκετά μεγάλη. Το ίδιο και η χωρική συμφωνία, λόγω του μικρού μεγέθους της διαμέτρου της κύριας πηγής ($d = 0.2\text{mm}$). Και το αποτέλεσμα της περίθλασης του φωτός για τις συγκεκριμένες συνθήκες φαίνεται στις (Εικ. 7.10).

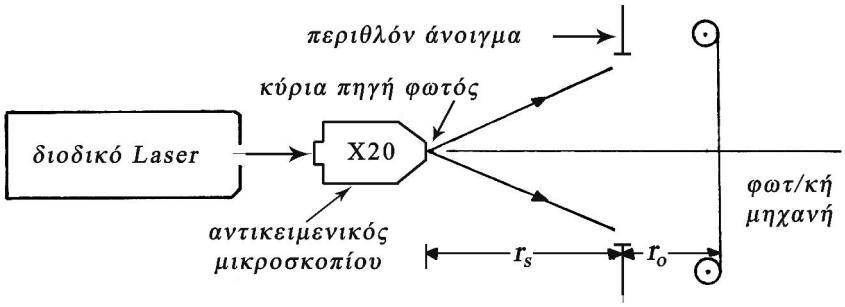


(Εικ. 7.10)

Στην (Εικ. 7.10β) μπορούμε να δούμε ότι αυξήθηκε ο αριθμός των κροσσών στα διάκενα της λεπίδας του ξυραφιού, όπως μας δείχνει και το γράφημα της (Εικ.

7.10γ). Αν όμως και στην περίπτωση αυτή η διάμετρος της κύριας πηγής φωτισμού αυξηθεί, τότε η φωτοαντίθεση και ο αριθμός των κροσσών της περίθλασης ελαττώνεται σε σημαντικό βαθμό.

4) Στο τέταρτο πείραμα η αρχική πηγή φωτός είναι ένα διοδικό Laser που εκπέμπει σε μ.κ. $\lambda = 545\text{nm}$. Η κατευθυνόμενη δέσμη του, προσπίπτει σ' ένα αντικειμενικό φακό μικροσκοπίου όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.11). Με το αποκλίνον από

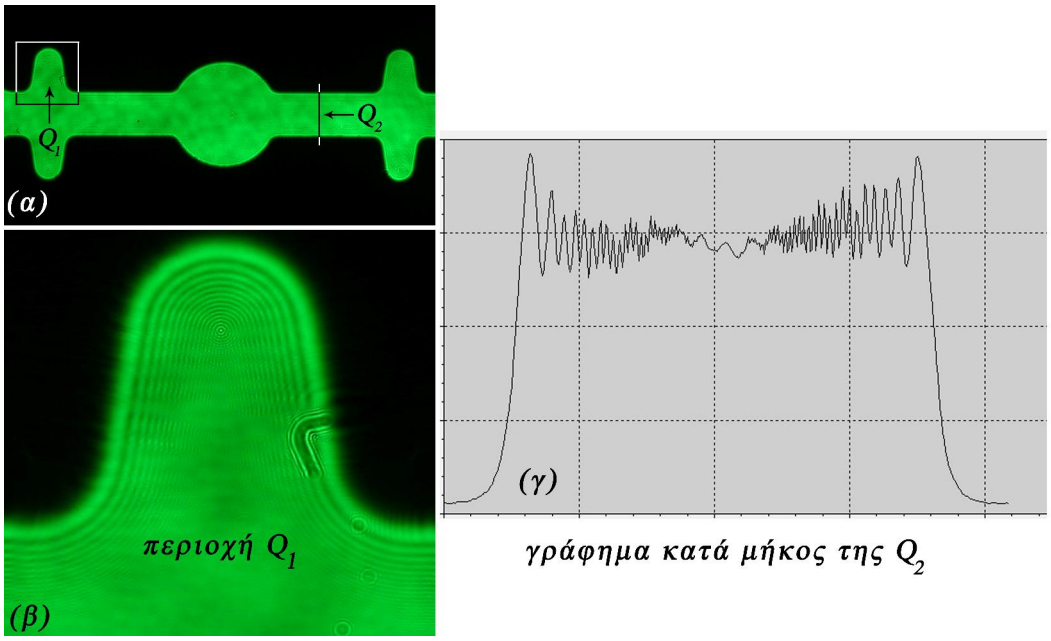


(Σχ. 7.11)

το φακό σφαιρικό σχεδόν μετ. κύματος, φωτίζουμε το περιθλόν άνοιγμα που βρίσκεται και πάλι σε απόσταση $r_s = 30\text{cm}$. Την κατανομή της έντασης του περιθλώμενου πεδίου την παίρνουμε και πάλι (όπως και σ' όλα τα προηγούμενα πειράματα) σε απόσταση $r_o = 2.5\text{cm}$ από αυτό. Στην προκειμένη περίπτωση οι διαστάσεις της κύριας πηγής είναι πάρα πολύ μικρές (σημείο απόκλισης του φωτός από την πίσω εστία του αντικειμενικού του μικροσκοπίου), που σημαίνει μεγάλη χωρική συμφωνία. Επίσης λόγω της μεγάλης μονοχρωματικότητας του διοδικού Laser, η χρονική συμφωνία αυτού του φωτός θα είναι σημαντικά μεγάλη. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι κροσσοί από την περίθλαση (περίθλαση Fresnel), εκτείνονται σ' όλο το εσωτερικό διάκενο της λεπίδας του ξυραφιού (Εικ. 7.12α,β). Το γεγονός αυτό γίνεται εμφανές και στο γράφημα της (Εικ. 7.12γ). Μια γενική παρατήρηση που προκύπτει από την προηγούμενη πειραματική εμπειρία, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα φαινόμενα της περίθλασης γίνονται όλο και πιο έντονα, όσο περισσότερο αυξάνεται η συμφωνία του φωτός με το οποίο φωτίζονται τα περιθλώντα ανοίγματα.

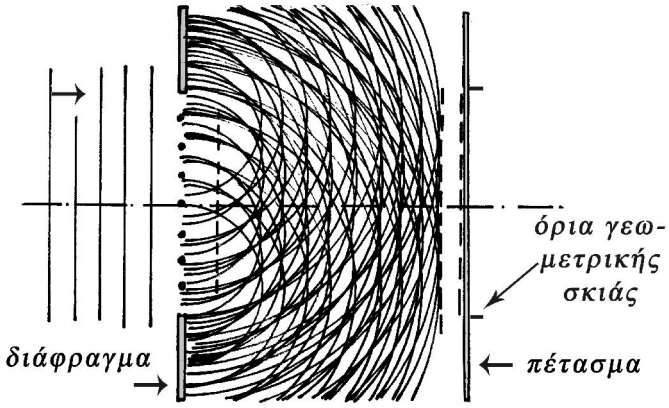
Μια πρώτη προσπάθεια θεωρητικής ερμηνείας του φαινομένου θα μπορούσε να γίνει με βάση την αρχή του Ch.Huygens (1678), που ήταν ο πρώτος κατά τα γνωστά, που εισηγήθηκε την ιδέα της κυματικής φύσης του φωτός. Η αρχή του Huygens (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα, ΠΑΡ/ΜΑ 2) αφορούσε τον προσδιορισμό της μορφής και της θέσης ενός μετ. κύματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, όταν ήταν γνωστή η μορφή του σε μια προηγούμενη. Θεώρησε ότι από κάθε σημείο του

μετ. κύματος εκπέμπονται σφαιρικά κυματίδια των οποίων η περιβάλλουσα σε μια ορισμένη χρονική στιγμή θα είναι το νέο μετ. κύματος. Στο (Σχ. 7.13) βλέπουμε την



(Εικ. 7.12)

πρόσπτωση ενός επιπέδου μετ. κύματος σ' ένα άνοιγμα και ένα πέτασμα μετά από αυτό. Εφαρμόζοντας γραφικά την αρχή του Huygens (εδώ στο επίπεδο της σελίδας) πάνω στο άνοιγμα, από κάθε σημείο του θα εκπέμπονται σφαιρικά κυματίδια διαδι-

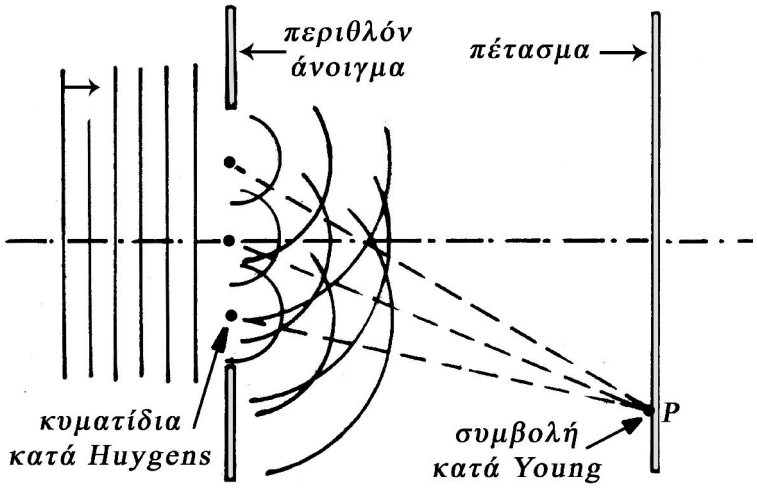


(Σχ. 7.13)

δόμενα προς το πέτασμα παρατήρησης και μάλιστα ακόμη και μέσα στα όρια της γεωμετρικής σκιάς με βάση τις διαστάσεις του ανοίγματος. Και ναι μεν η παραπάνω κατασκευαστική λογική δικαιολογεί μια βαθμιαία μεταβολή της κατανομής της

έντασης στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς, δεν μπορεί όμως να δικαιολογήσει αυξομειώσεις της έντασης (κροσσούς περίθλασης) εκτός αυτής, όπως αυτά είδαμε να συμβαίνουν στην προηγούμενη πειραματική διαδικασία.

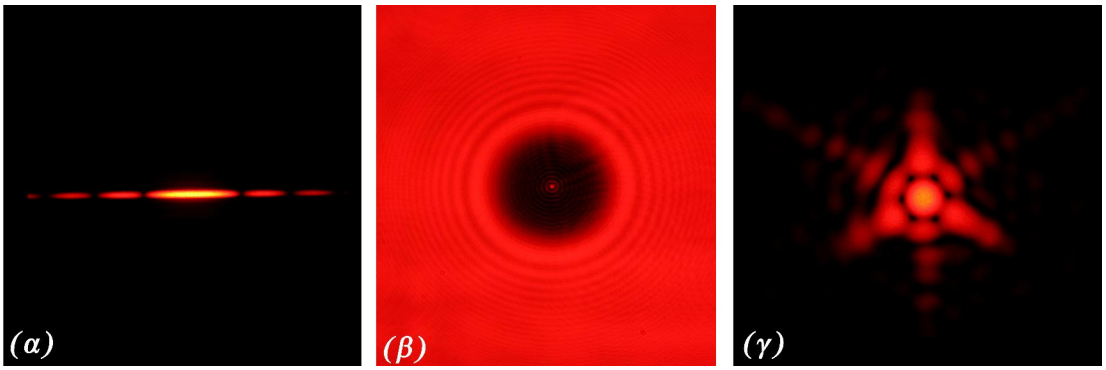
Δυστυχώς σ' όλη τη διάρκεια του 18ου αιώνα δεν έγινε καμία ουσιαστική πρόοδος όσον αφορά την ερμηνεία του φαινομένου της περίθλασης του φωτός. Το γεγονός οφειλόταν στη γενική αποδοχή της σωματιδιακής φύσης του φωτός την οποία είχε προτείνει ο Is.Newton ακόμη από το 1704. Δηλ. το ότι το φως συνίσταται από σωματίδια κινούμενα ευθύγραμμα. Η θεωρία αυτή όμως, δεν μπορούσε να ερμηνεύσει τ' αποτελέσματα των πειραμάτων του Grimaldi. Η ανατροπή αυτής της κατάστασης έγινε από τον Th.Young ο οποίος όχι μόνο ήταν ένθερμος υποστηριχτής της κυματικής θεωρίας του Huygens αλλά και περί το 1804 την ισχυροποίησε περαιτέρω, δεχόμενος την ιδέα της συμβολής των κυμάτων κατά την επαλληλία τους. Δηλ. του συσχετισμού τους. Με τον τρόπο αυτό για πρώτη φορά (γεγονός που αποδείχθηκε και πειραματικά), ήταν δυνατόν σε περιοχές που έρχονται σε επαλληλία κύματα φωτός, να εντοπίζονται εκτός από φωτεινές και σκοτεινές ζώνες (δηλ. κροσσοί συμβολής). Αλλά η τελική σύλληψη που οδήγησε στην κατεύθυνση της ερμηνείας των φαινομένων περίθλασης, οφειλόταν στο Augustine Jean Fresnel. Πράγματι ο τελευταίος περί το 1818, δέχθηκε το συνδυασμό των απόψεων των Huygens και Young για το φως. Και αυτό που προέκυψε ήταν η λεγόμενη αρχή των Huygens- Fresnel. Σύμφωνα με αυτήν: Τα στοιχειώδη σφαιρικά κυματίδια τα οποία εκκινούν από το περιθλόν άνοιγμα, διανύοντας την απόσταση μέχρι το πέτασμα (Σχ. 7.14), έρχονται σε επαλληλία και συμβάλλουν σ' οποιοδήποτε από τα



(Σχ. 7.14)

σημεία P του πετάσματος. Με τον τρόπο αυτό ο Fresnel υπολόγισε με πολύ μεγάλη ακρίβεια τα πρότυπα περίθλασης που προερχόταν από διαφόρων μορφών ανοίγ-

ματα (ορθογώνια, κυκλικά κλπ). Παραθέτουμε στις (Εικ. 7.15) ενδεικτικά τρία πρότυπα περίθλασης τα οποία είναι δυνατόν να υπολογιστούν με βάση την αρχή των Huygens- Fresnel. Η (Εικ. 7.15α) αφορά το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου (περίθλαση Fraunhofer), που οφείλεται σε μια σχισμή (§ 7.4.2) η οποία φωτίζεται από ένα επίπεδο μετ. κύματος το οποίο προέρχεται από μια σημειακή πηγή φω-



(Εικ. 7.15)

τός. Στην (Εικ. 7.15β) βλέπουμε ένα πρότυπο περίθλασης κοντινού πεδίου (περίθλαση Fresnel). Λαμβάνεται σε ένα πέτασμα και προέρχεται από ένα κυκλικό αδιαφανές εμπόδιο (§ 7.8.4), όταν στο τελευταίο προσπέσει ένα σφαιρικό μετ. κύματος. Χαρακτηριστικό αυτού του προτύπου, είναι ότι στο κέντρο του υφίσταται μια φωτεινή κηλίδα, η οποία παραμένει σ' οποιαδήποτε σχεδόν θέση μετακινήσουμε το πέτασμα. Ονομάζεται κηλίδα του Poisson. Η (Εικ. 7.10γ) τέλος, αφορά το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου, που προκύπτει κατά την πρόσπτωση επιπέδου μετ. κύματος σε τριγωνικό ισόπλευρο άνοιγμα.

Η θεωρία βέβαια του Fresnel στηριζόταν σε δύο αυθαίρετες υποθέσεις που αφορούσαν τα πλάτη και τις φάσεις των κυματιδίων που εκπέμπονταν από τα περιθλώντα ανοίγματα. Τελικά οι υποθέσεις αυτές αποδείχθηκαν αληθείς με βάση την Η/Μ θεωρία του J.C. Maxwell την οποία ο ίδιος πρότεινε περί το 1882. Ειδικότερα ήταν τα συμπεράσματα της μαθηματικής θεμελίωσης της θεωρίας της περίθλασης από τον G.Kirchhoff (βλ. ΘΕΜΑ 1), που με βάση την Η/Μ θεωρία απέδειξαν ότι οι υποθέσεις του Fresnel διέθεταν φυσική βάση. Και η θεωρία όμως του Kirchhoff στηριζόταν σε δύο υποθέσεις, που αφορούσαν τις οριακές συνθήκες για το φως κατά την πρόσπτωσή του πάνω στα περιθλώντα ανοίγματα. Οι δύο αυτές υποθέσεις αποδείχτηκαν αργότερα από τον H.Poincarè (1892) και τον A.Sommerfeld (1894) ασυνεπείς μεταξύ τους και η θεωρία του Kirchhoff επανατοποθετήθηκε σε νέα βάσεις από τον Sommerfeld και άλλους μελετητές. Αποτέλεσμα ήταν να προκύψει μια συναφής αλλά πιο ακριβής θεωρία της περίθλασης του φωτός, η οποία ονομάστηκε των Rayleigh-Sommerfeld.

Όμως η θεωρία αυτή όπως και η προκάτοχή της του Kirchhoff, περιλάμβαναν πολλές απλοποιήσεις και προσεγγίσεις, παρά τα εξαιρετικά ακριβή αποτελέσματα που έδιναν, όσον αφορά τον υπολογισμό των περιθλώμενων πεδίων για πλείστα όσα προβλήματα. Και η βασικότερη από αυτές ήταν ότι το φως λαμβανόταν σαν βαθμωτό μέγεθος, παρά το ότι η φύση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι διανυσματική. Αυτό σημαίνει ότι τα πεδία: Ηλεκτρικό και Μαγνητικό κατά τη διάδοσή τους γενικά στην ύλη, δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, αλλά συζευγμένα μέσω των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων του Maxwell (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα § 2.1.13). Και ναι μεν για διάδοση στον ελεύθερο χώρο, αποδεικνύεται (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα § 2.1.14) ότι η κάθε μια από τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου υπακούουν στη διαφορική εξίσωση του κύματος σαν βαθμωτά μεγέθη.

Όμως στα προβλήματα περίθλασης, οι τιθέμενες οριακές συνθήκες αφορούν την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη (π.χ. στα όρια των περιθλώντων ανοιγμάτων). Επομένως προκειμένου οι υπολογισμοί μας να είναι ακριβείς, θα πρέπει να διαπραγματευθούμε το πρόβλημα της περίθλασης στη διανυσματική του μορφή. Σαν ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε ν' αναφέρουμε το πριθλώμενο πεδίο το οποίο προκύπτει όταν το λευκό φως προσπίπτει σ' ένα δίσκο HD-DVD ή BR (Blue ray) κλπ. καταγραφής πληροφοριών με οπτικό τρόπο. Οι επιφάνειες αυτών των τεχνημάτων περιλαμβάνουν στην επιφάνειά τους εγχαράξεις που οι περίοδός τους (απόσταση από γραμμή σε γραμμή) είναι για το μεν πρώτο 400nm και για το δεύτερο 320nm. Η πυκνότητα αυτή των γραμμών είναι τέτοια, που ο υπολογισμός του περιθλώμενου πεδίου μπορεί να γίνει μόνο με τη βοήθεια της διανυσματικής θεωρίας της περίθλασης. Σε άλλα παρόμοια τεχνήματα όπως τα DVD και τα CD (με περιόδους αντίστοιχα 740nm και $1.6\mu\text{m}$), οριακά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη τους τη βαθμωτή θεωρία. Η κατανομή της έντασης του φωτός που προκύπτει από την περίθλαση προσπίπτοντος λευκού φωτός σ' ένα τέτοιο δίσκο δίνεται στην (Εικ. 7.16). Εκεί εκτός της περίθλασης βλέπουμε και ανάλυση του φωτός. Στην (§ 7.9.5) γίνεται μια πιο λεπτομερής ανάλυση της περίθλασης του φωτός από ένα δίσκο CD.

Για τα καθ' ημάς από πρακτική άποψη: α) Όταν οι διαστάσεις των περιθλώντων ανοιγμάτων είναι αρκετά μεγαλύτερες από το μ.κ. της ακτινοβολίας που προσπίπτει σ' αυτά και β) Όταν τα περιθλώντα πεδία υπολογίζονται σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις σε σχέση με το περιθλόν άνοιγμα, τότε αποδεικνύεται ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη βαθμωτή θεωρία της περίθλασης. Και ο λόγος είναι ότι τα φαινόμενα σύζευξης μεταξύ των πεδίων ηλεκτρικού και μαγνητικού στα όρια των ανοιγμάτων (δηλ. σε απόσταση από τα όρια λίγων μηκών κύματος) μπορούν να θεωρηθούν στην περίπτωση αυτή αμελητέα.

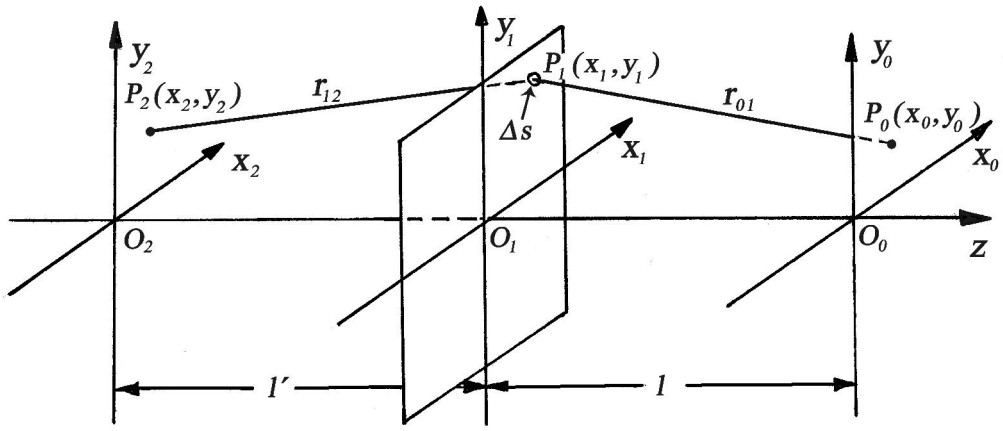
Στο κεφάλαιο αυτό θα διαπραγματευτούμε το φαινόμενο της περίθλασης του φωτός, με βάση την αρχή των Huygens- Fresnel. Που σημαίνει ότι ο τελικός μας σκοπός θα είναι ο υπολογισμός βήμα προς βήμα ενός ολοκληρώματος επαλληλίας που θα μας προσδιορίζει το περιθλώμενο πεδίο σε μια ορισμένη απόσταση από το

(Εικ. 7.16)

εκάστοτε περιθλόν άνοιγμα. Κατόπιν με βάση προσεγγίσεις που θα υιοθετήσουμε, θα μπορούμε να υπολογίζουμε περιθλώμενα πεδία (λαμβάνοντας υπόψη μας τις διαστάσεις του ανοίγματος και το μ.κ. της φωτίζουσας ακτινοβολίας) σχετικά σε μικρή απόσταση από τα ανοίγματα (περίθλαση Fresnel), καθώς και σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις από αυτά (περίθλαση Fraunhofer). Στο (ΘΕΜΑ 1) θα καταλήξουμε στο προαναφερόμενο ολοκλήρωμα της περίθλασης, βασιζόμενοι στην αυστηρή μαθηματική θεωρία του Kirchhoff.

7.1 *Υπολογισμός του ολοκληρώματος της περίθλασης του φωτός. Ένας απλοποιημένος τρόπος ανάδειξης της ποσοτικής έκφρασης της κατανομής του πλάτους του ηλ. πεδίου, που προκύπτει από την περίθλαση του φωτός από διάφορα περιθλώντα στοιχεία, με βάση την αρχή των Huygens-Fresnel*

Η διάταξη την οποία θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου ν' αναδείξουμε το ολοκλήρωμα της περίθλασης, φαίνεται στο (Σχ. 7.1.1). Συνίσταται από μια σημειακή πηγή στη θέση P_2 τρισορθογωνίου σ.σ. x_2, y_2, z η οποία εκπέμπει ένα μονοχρωματικό σφαιρικό μετ. κύματος. Το τελευταίο προσπίπτει σ' ένα αδιαφανές επίπεδο πέτασμα το οποίο κατ' αρχή διαθέτει ένα μικρών διαστάσεων άνοιγμα στη θέση P_1.



(Σχ. 7.1.1)

Οι συνιστώσες του P_1 είναι οι (x_1, y_1) σε σχέση με το σ.σ. x_1, y_1, z ομοπαράλληλου με το σ.σ. x_2, y_2, z και σε απόσταση l' από αυτό. Τέλος, σε απόσταση l από το δεύτερο σ.σ. βρίσκεται ένα πέτασμα παρατήρησης, που ταυτίζεται με το σ.σ. x_0, y_0, z και αυτό ομοπαράλληλο των δύο προηγούμενων. Έστω μάλιστα P_0 ένα από τα σημεία του, με συντεταγμένες (x_0, y_0). Η σημειακότητα και η μονοχρωματικότητα της πηγής στη θέση $P_2(x_2, y_2)$, μας εξασφαλίζει έτσι ώστε τα σημεία του μετ. κύματος που προσπίπτει στη θέση του πετάσματος, θα έχουν τη δυνατότητα να εκπέμπουν (κατά Huygens) δευτερεύοντα σφαιρικά κυματίδια της ίδιας συχνότητας και τα οποία θα είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Γεγονός του σημαίνει ότι θα είναι ικανά να συμβάλλουν στις διάφορες θέσεις P_0 του επιπέδου παρατήρησης.

Έτσι λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση P_1 που οφείλεται στο εκπεμπόμενο από τη θέση P_2 σφαιρικό μετ. κύματος, θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$E' = \left(A/r_{12}\right)e^{i(\omega t - kr_{12})} \tag{7.1.1}$$

όπου A μια σταθερή στη θέση της πηγής και το πλάτος A/r_{12} μετρείται κατά τα γνωστά σε $(\mathrm{V/m})$. ω η κυκλική συχνότητα, t η χρονική εξάρτηση της διαταραχής και k το μέτρο του κυματοδιανύσματος $(k = 2\pi/\lambda)$. Με την άφιξη της διαταραχής στο P_1 όπου υφίσταται το μοναδικό άνοιγμα στοιχειώδους εμβαδού Δs, θα εκπεμφθεί ένα σφαιρικό κυματίδιο κατά Huygens, το οποίο διαδίδεται στο χώρο μετά το αδιαφανές πέτασμα. Η τιμή του ηλ. του πεδίου E στη θέση P_0 θα δίνεται από τη σχέση: $E = \left(C/r_{01}\right)e^{i(\omega t - kr_{01})}$. Όπου ο όρος C του πλάτους θα πρέπει να είναι ανάλογος: Του προσπίπτοντος στο άνοιγμα πεδίου E', του εμβαδού Δs του ανοίγματος το οποίο αν και πολύ μικρό είναι πεπερασμένο και του όρου C' ο οποίος διευκρινίζεται στην επόμενη σημείωση. Δηλ. θα είναι: $C = C' \cdot E' \cdot \Delta s$. Όμως ήδη στη σχέση για το πεδίο E στο P_0 υπάρχει ο όρος $e^{i\omega t}$ της χρονικής εξάρτησης της διαταραχής. Και προκειμένου ν' απομονώσουμε το χρονικά ανεξάρτητο τμήμα του προσπίπτοντος στην οπή πεδίου E', αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με τον όρο $e^{-i\omega t}$. Επομένως το πεδίο E στο P_0 θα δίνεται τελικά από τη σχέση: $E = C'\left(E'e^{-i\omega t}\right)\Delta s \dfrac{e^{i(\omega t - kr_{01})}}{r_{01}}$.

Δηλ.

$$E = C'E' \frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \Delta s \tag{7.1.2}$$

ή

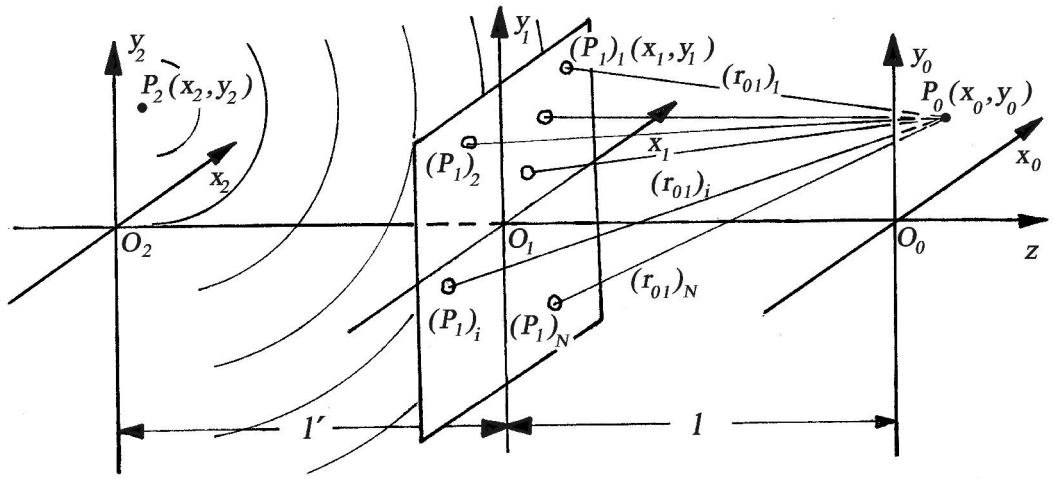
$$E = C'Ae^{i\omega t} \frac{e^{-ik(r_{01}+r_{12})}}{r_{01}r_{12}} \Delta s \tag{7.1.3}$$

Σημείωση

Όσον αφορά τη μορφή του όρου αναλογίας C', αυτή στην παρούσα ανάλυση μπορεί μόνο να υποτεθεί όπως για πρώτη φορά έγινε από τον Fresnel. Στην πραγματικότητα – όπως αποδεικνύεται – είναι φανταστικός αριθμός και ίσος με $\dfrac{1}{i\lambda}Q$. Όπου λ το μ.κ. της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας και Q ένα μέγεθος που ονομάζεται παράγοντας κατευθυντικότητας. Και συγκεκριμένα αφορά την εκπε-

μπόμενη ισχύ του κάθε στοιχειώδους εκπομπού συναρτήσει της διεύθυνσης. $(1/i) = e^{-i(\pi/2)}$ είναι ένας παράγοντας φάσης. Πρόκειται για την καθυστέρηση φάσης κατά $\pi/2$ με την οποία εκπέμπουν τα κυματίδια σε σχέση με τη φάση του πρωτογενούς μετ. κύματος. Η ακριβής απόδειξη των προαναφερόμενων γίνεται στο (ΘΕΜΑ 1), όπου και παρατίθεται η αυστηρή ανάλυση της βαθμωτής θεωρίας της περίθλασης κατά τον Kirchhoff, με βάση την Η/Μ θεωρία του Maxwell.

Έστω σε μια επόμενη φάση ότι το αδιαφανές πέτασμα περιλαμβάνει δύο τον αριθμό ανοίγματα. Τότε η διαδικασία της πρόσπτωσης σ' αυτό του σφαιρικού μετ. κύματος από το P_2 δημιουργεί δύο σύμφωνες εκπέμπουσες πηγές σφαιρικών κυματιδίων. Τα τελευταία ερχόμενα σ' επαλληλία στο σημείο P_0 θα συμβάλλουν. Εδώ πρόκειται για το κλασσικό πείραμα του Young. Στην πραγματικότητα όμως μας ενδιαφέρει κατ' αρχή το πεδίο στο P_0 να προέρχεται από την επαλληλία ενός πολύ μεγάλου αριθμού διαταραχών, που προκύπτουν αντίστοιχα από ένα πολύ μεγάλο αριθμό N ανοιγμάτων στο αδιαφανές πέτασμα (Σχ. 7.1.2). Με απώτερο σκοπό η κα-



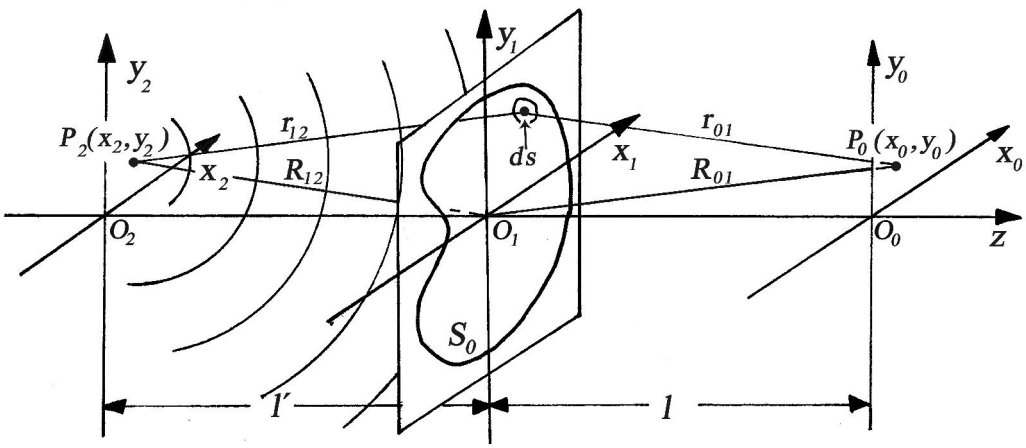
(Σχ. 7.1.2)

τανομή αυτών των ανοιγμάτων να γίνει συνεχής. Δηλ. θέλουμε τελικά να προσδιορίσουμε το ηλ. πεδίο στο P_0 που οφείλεται σ' ένα άνοιγμα S_0 πεπερασμένων διαστάσεων στο αδιαφανές πέτασμα. Που δεν είναι παρά η τιμή του πεδίου στο P_0 και που θα οφείλεται στην περίθλαση του φωτός από το άνοιγμα S_0 (Σχ. 7.1.3), όταν το τελευταίο φωτίζεται από το εκπεμπόμενο από το σημείο P_2 σφαιρικό μετ. κύματος.

Πράγματι με τη βοήθεια της (σχ. 7.1.2), το πεδίο E στο P_0 κατά την επαλληλία των διαταραχών από τα N ανοίγματα θα έχει την τιμή:

$$E = C'\sum_{j=1}^{N} E_j' \frac{e^{ik(r_{01})_j}}{(r_{01})_j} \Delta s_j \tag{7.1.4}$$

όπου: $E_j' = \frac{A}{(r_{12})_j} e^{i\left[\omega t - k(r_{12})_j\right]}$ και τα $E_j', (r_{01})_j$ είναι συναρτήσεις της θέσης του j ανοίγματος.



(Σχ. 7.1.3)

Γενικεύοντας, θα θεωρήσουμε τελικά μια συνεχή κατανομή στοιχειωδών ανοιγμάτων (πολύ μεγάλου πλήθους και απειροστών διαστάσεων), που δημιουργούν ένα πεπερασμένο άνοιγμα S_0 στο επίπεδο x_1, y_1. Τότε η ένταση του συνολικού πεδίου στο P_0, που οφείλεται στην εκπομπή του αθροίσματος των ατομικών εκπομπών του ανοίγματος, θα είναι η γενίκευση του τύπου για το πεδίο E όπως δίνεται από τη (σχ. 7.1.4), με τη μορφή του ολοκληρώματος:

$$E = C'\iint_{S_0} E' \frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} ds \tag{7.1.5}$$

όπου το E' δίνεται από τη (σχ. 7.1.1). Το ολοκλήρωμα αυτό συνιστά τη μαθηματική έκφραση της αρχής των Huygens-Fresnel και διατυπώνεται ως εξής: Η συνολική ένταση του ηλ. πεδίου σ' ένα ορισμένο σημείο ενός επιπέδου παρατήρησης, που οφείλεται στην πρόσπτωση του φωτός σ' ένα πεπερασμένο άνοιγμα πριν από αυτό,

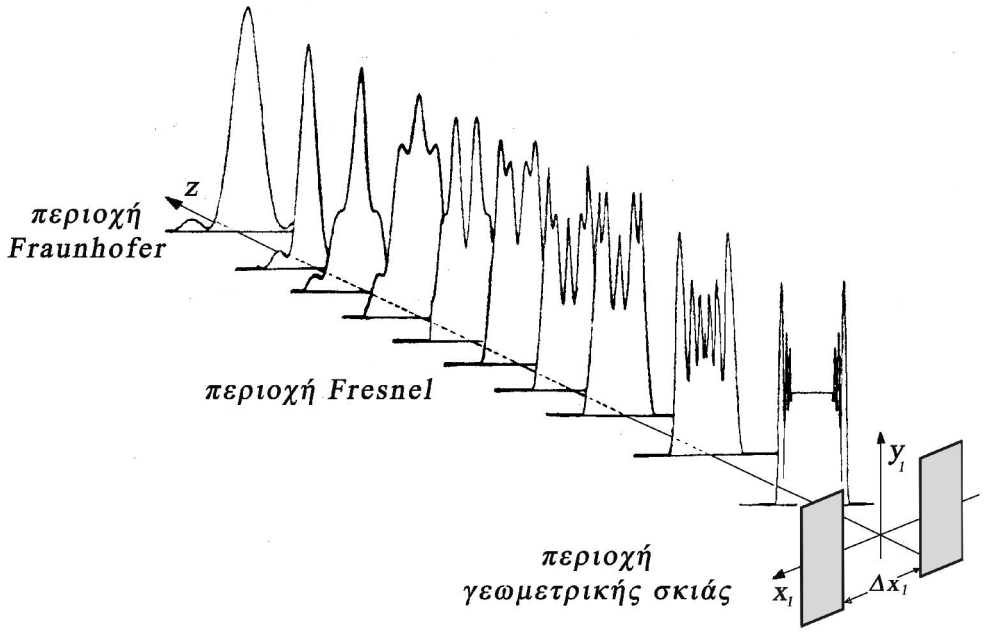
είναι ίση με την επαλληλία των πεδίων που εκπέμπονται από το σύνολο των ατομικών εκπομπών (σκεδαστών) που θεωρούνται συνεχώς κατανεμημένοι σ' όλο το εύρος του ανοίγματος.

Το ολοκλήρωμα που μας δίνει η (σχ. 7.1.5), ονομάζεται ολοκλήρωμα ***περίθλασης (diffraction integral)*** και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ***προτύπων περίθλασης (diffraction patterns)***. Που σημαίνει ότι μπορούμε κάτω από ορισμένες συνθήκες να υπολογίσουμε αναλυτικά κατ' αρχή τις τιμές του ηλ. πεδίου από σημείο σε σημείο (κατανομή του πεδίου) σ' ένα επίπεδο παρατήρησης. Και αυτό για διάφορα περιθλώντα ανοίγματα (κυκλικά, ορθογώνια, σχισμές, φράγματα κλπ). Και τελικά υπολογίζουμε την κατανομή της έντασης I του φωτός με βάση τη γνωστή σχέση: $I \sim \left\langle E^2 \right\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E^2 dt$ (μέση χρονική τιμή του τετραγώνου της συνολικής έντασης του ηλ. πεδίου). Ή αν το E είναι εκφρασμένο σε μιγαδική μορφή τότε: $I \sim E \cdot E^*$, όπου E^* η συζυγής μορφή του πεδίου E.

Στα προηγούμενα αναφέραμε για τον υπολογισμό της κατανομής της έντασης του ηλ. πεδίου $E(x_0, y_0)$ και της αντίστοιχης έντασης του φωτός $I(x_0, y_0)$ πάνω σ' ένα επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0 χωρίς να προσδιορίσουμε ακριβώς την απόσταση l μεταξύ περιθλώντος ανοίγματος $S_0(x_1, y_1)$ και πετάσματος παρατήρησης (σ.σ. x_0, y_0). Το τελευταίο βέβαια θα μπορούσε να τοποθετηθεί σε θέσεις: από μόλις μετά το περιθλόν άνοιγμα, μέχρις σε άπειρη από αυτό απόσταση. Και θα είναι εύλογο να εικάσει κανείς ότι η κατανομή αυτή του πεδίου θα μεταβάλλεται. Μια άμεση αντίληψη αυτής της κατάστασης μπορούμε να έχουμε από το (Σχ. 7.1.4). Σ' αυτό παριστάνεται η κατανομή της έντασης του φωτός κατά την περίθλασή του από μία σχισμή μεγάλου μήκους (κατά μήκος του άξονα y_1) και ορισμένου πλάτους Δx_1. Βλέπουμε ότι κατά τη μετακίνηση του πετάσματος παρατήρησης x_0, y_0 μέχρις μια απόσταση από τη σχισμή, το πεδίο μεταβάλλεται δραστικά, δίνοντας διαφορετικά μεταξύ τους πρότυπα περίθλασης. Αυτό συμβαίνει μέχρις μια ορισμένη απόσταση, όπου από εκεί και μετά, το πρότυπο αλλάζει διαστάσεις όχι όμως τη μορφολογία του. Η περιοχή αυτή είναι μια περιοχή μετάβασης από τη λεγόμενη περίθλαση κοντινού πεδίου (περίθλαση Fresnel), στην περιοχή μακρινού πεδίου (ή περίθλαση Fraunhofer). Οι περιοχές αυτές αφορούν κάθε είδους περιθλώντος ανοίγματος (στοιχείου) και θ' αποτελέσουν αντικείμενο λεπτομερούς μελέτης στα επόμενα.

Το περιθλώμενο πεδίο βέβαια προσδιορίζεται με βάση το ολοκλήρωμα που μας δίνει η (σχ. 7.1.5). Όμως η μορφή του μπορεί να τροποποιηθεί όπως θα δούμε, με βάση τις προσεγγίσεις που μπορούν να επιβληθούν στα r_{12}, r_{01} που καθορίζουν τις θέσεις πηγής - πετάσματος παρατήρησης σε σχέση με το περιθλόν άνοιγμα. Η

εφαρμογή των προαναφερόμενων αναδεικνύει ένα σημαντικό κριτήριο με βάση το οποίο μπορούμε ν' αποφανθούμε αν βρισκόμαστε σε περιοχή κοντινού ή μακρινού πεδίου. Είναι η σχέση μεταξύ των: l, λ και d. Όπου: l κατά τα γνωστά είναι η απόσταση περιθλώντος ανοίγματος - πετάσματος παρατήρησης. λ το μ.κ. της φωτίζουσας το άνοιγμα ακτινοβολίας και d η μέγιστη διάσταση του περιθλώντος ανοίγματος. Αποδεικνύεται (βλ. Άσκ. 1- λυμένη) ότι αν μεταξύ αυτών υφίσταται η



(Σχ. 7.1.4)

σχέση: $l < d^2/\lambda$, τότε βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης κοντινού πεδίου (περίθλαση Fresnel). Ενώ για: $l > d^2/\lambda$ σε περιοχή περίθλασης μακρινού πεδίου. (περίθλαση Fraunhofer). Θα πρέπει επίσης ν' αναφέρουμε εδώ ότι οι περιοχές περίθλασης τις οποίες προαναφέραμε, μπορούν να χαρακτηριστούν με παρόμοιο τρόπο, αν την τριάδα l, λ, d την αντικαταστήσουμε με την l', λ, d. Όπου τώρα l' είναι η απόσταση πηγής - περιθλώντος ανοίγματος.

Την περίπτωση αυτή (θέση της πηγής σε σχέση με το περιθλόν άνοιγμα) είναι υποχρεωτικό να τη λάβουμε υπόψη μας όταν όπως θα δούμε στη (§ 7.8) μελετήσουμε εκτενώς την περίθλαση κοντινού πεδίου. Όμως για την επόμενη παράγραφο (§ 7.2), στην οποία θα γίνει η μελέτη της περίθλασης μακρινού πεδίου, προκειμένου ν' απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας, θα θεωρήσουμε ότι το προσπίπτον στο περιθλόν άνοιγμα μετ. κύματος θα είναι επίπεδο, διαδιδόμενο κατά τη διεύθυνση του άξονα z, το οποίο είναι και μια συνήθης πρακτική. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, στο ολοκλήρωμα της περίθλασης της (σχ. 7.1.5) το πεδίο E' που δί-

νεται από τη (σχ. 7.1.1) θα έχει πλέον σταθερό πλάτος. Δηλ. $E' = Ae^{i\omega t}$ και θα παίρνει τη μορφή:

Σημείωση

$E' = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = Ae^{i\omega t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ (είναι η εξίσωση του επιπέδου μετ. κύματος). Και για διάδοση κατά τη διεύθυνση του άξονα z $(\mathbf{k} \parallel z)$ και με το $\mathbf{r}$ στο επίπεδο x_1, y_1 (ζητούμε την κατανομή του ηλ. πεδίου σ' αυτό το επίπεδο), θα έχουμε: $\widehat{\mathbf{k},\mathbf{r}} = 90^0 \Rightarrow \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = 0$. Τότε: $E' = Ae^{i\omega t}$. Δηλ. το σφαιρικό μετ. κύματος $E' = \left(A/r_{12}\right)e^{i(\omega t - kr_{12})}$, αντικαθίσταται από το επίπεδο μετ. κύματος: $E' = Ae^{i\omega t}$ σταθερού πλάτους A σ' όλο το εύρος του επιπέδου x_1, y_1.

$$E = Ae^{i\omega t}C'\iint_{S_0}\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}}ds \tag{7.1.6}$$

Και το τελευταίο βέβαια με την προϋπόθεση ότι σε όλο το εύρος του περιθλώντος ανοίγματος δεν θα έχουμε κανενός είδους μεταβολή του πλάτους ή της φάσης (ή και των δύο), που θα προκαλούνταν π.χ. από ένα φιλμ με τέτοιες ιδιότητες, που κάλυπτε το άνοιγμα, κατά την πρόσπτωση σ' αυτό του επιπέδου μετ. κύματος.

Σε αντίθετη περίπτωση (από αυτήν που αναφέραμε μόλις πριν), η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα t που περιγράφει τη μεταβολή και η οποία είναι συνάρτηση των x_1, y_1. Τότε το ολοκλήρωμα περίθλασης θα πάρει τη μορφή:

$$E = Ae^{i\omega t}C'\iint_{S_0}t\left(x_1, y_1\right)\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}}ds \tag{7.1.7}$$

Η $t\left(x_1, y_1\right)$ ονομάζεται ***συνάρτηση διαφάνειας πλάτους (amplitude transmission function)*** και ορίζεται σαν ο λόγος του εξερχόμενου από αυτήν πεδίου $\Psi_t\left(x_1, y_1\right)$ προς το προσπίπτον $\Psi_i\left(x_1, y_1\right)$. Οπότε αν $\Psi_i\left(x_1, y_1\right) = 1$ (προσπίπτον στο άνοιγμα επίπεδο μετ. κύματος μοναδιαίου πλάτους) θα είναι: $t\left(x_1, y_1\right) = \Psi_t\left(x_1, y_1\right)$. Μια πληρέστερη περιγραφή της γίνεται κατά την ανάπτυξη του (ΘΕΜΑΤΟΣ 1) και στη γενικότερη περίπτωση η μορφή της είναι μιγαδική. Δηλ. $t\left(x_1, y_1\right) = A\left(x_1, y_1\right)e^{i\phi\left(x_1, y_1\right)}$. Στα επόμενα δίνουμε δύο παραδείγματα, προκειμένου η έννοια της συνάρτησης δι-

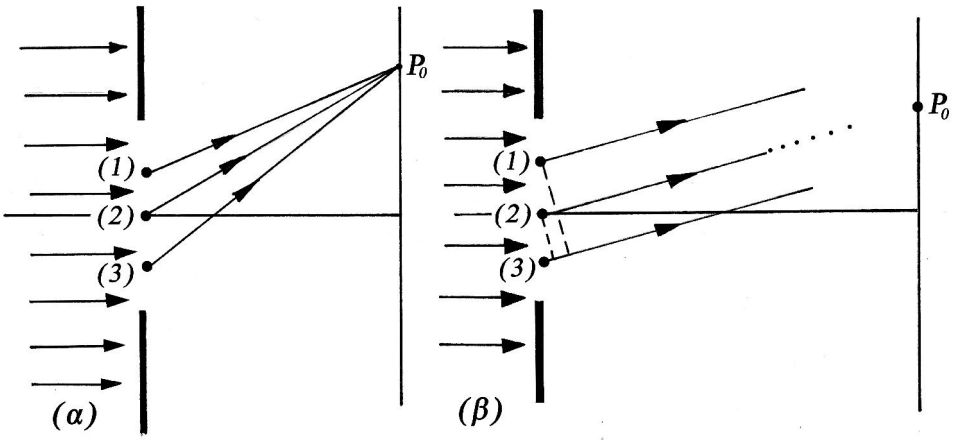
αφάνειας να γίνει πιο κατανοητή: α) Την περίπτωση που το περιθλόν άνοιγμα διαμορφώνεται σ' όλο το εύρος του από ένα ημιτονικό φράγμα πλάτους. Δηλ. από μια αμαύρωση που η μεταβολή της (αυξομειώσεις της αμαύρωσης) είναι αρμονική. Τότε η $t(x_1, y_1)$ είναι πραγματική συνάρτηση και δίνεται από τη σχέση: $t(x_1, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_1)$. Όπου m το πλάτος της διακύμανσης και f_0 η χωρική της συχνότητα. Υποθέτουμε βέβαια εδώ ότι ο αριθμός των περιόδων αυτού του είδους του φράγματος που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό του περιθλώντος ανοίγματος είναι πάρα πολύ μεγάλος. β) Την περίπτωση που το περιθλόν άνοιγμα διαμορφώνεται σ' όλο το εύρος του από ένα ημιτονικό φράγμα φάσης. Π.χ. μια γυάλινη διαφανής πλάκα με αρμονική διακύμανση του πάχους της. Τότε: $t(x_1, y_1) = e^{i\frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_1)}$ με f_0 και πάλι τη χωρική της συχνότητα (αντίστροφη της περιόδου), m το πλάτος της διακύμανσης και πολύ μεγάλο αριθμό περιόδων στο εσωτερικό του ανοίγματος. Στην προκειμένη περίπτωση βλέπουμε ότι η $t(x_1, y_1)$ είναι φανταστική.

7.2 *Η προσέγγιση μακρινού πεδίου. Περίθλαση Fraunhofer*

Μια πλέον εμβριθής ανάλυση της προσέγγισης μακρινού πεδίου γίνεται στο (ΘΕΜΑ 1). Όμως για καθαρά πρακτικούς λόγους στα επόμενα, απλοποιούμε κατά το δυνατόν τη διαδικασία αυτή, προκειμένου να καταλήξουμε στην προαναφερόμενη προσεγγιστική μορφή του ολοκληρώματος της περίθλασης. Με βάση αυτή, θα μπορούμε να υπολογίζουμε τα πρότυπα περίθλασης Fraunhofer για τα διάφορα περιθλώντα ανοίγματα.

Θα θέλαμε στα επόμενα, το είδος της προσέγγισης την οποία θα επιβάλλουμε στο ολοκλήρωμα της περίθλασης της (σχ. 7.1.6) να είναι τέτοια ώστε: Οι διαφορές οπτικού δρόμου (ή αντίστοιχα οι διαφορές φάσης) με τις οποίες οι διαταραχές οι προερχόμενες από τους εκπέμποντες σκεδαστές στο περιθλόν άνοιγμα συμβάλλουν στα διάφορα σημεία του επιπέδου παρατήρησης, να έχουν μεταξύ τους γραμμική σχέση. Και είναι ευνόητο να θεωρήσουμε ότι προκειμένου να συμβεί το τελευταίο, το επίπεδο παρατήρησης θα πρέπει να βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το δεδομένων διαστάσεων περιθλόν άνοιγμα και με δεδομένο ότι η φωτίζουσα πηγή εκπέμπει μονοχρωματικό φως στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Τότε κάτω από αυτές τις συνθήκες, οι διαταραχές θα βαίνουν σχεδόν παράλληλες, προκειμένου να συμβάλλουν σ' ένα σημείο P_0 όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.2.1β). Εκεί μπορούμε να δείξουμε (λόγω της παραλληλότητας των κατευθύνσεων εκπομπής των σκεδαστών) ότι η διαφορά δρόμου (ή φάσης) μεταξύ π.χ. των σκεδαστών στις

θέσεις 1,3 είναι διπλάσια από αυτή μεταξύ των 1,2 (για ισαπέχοντες σκεδαστές). Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν το επίπεδο παρατήρησης πλησιάσει κοντά στο περιθλόν άνοιγμα, όπως αυτό φαίνεται στο (Σχ. 7.2.1α). Για τη θέση αυτή, για τα διάφορα σημεία P_0 στο επίπεδο παρατήρησης, η γραμμικότητα μεταξύ των διαφορών δρόμου ή φάσης, παύει πλέον να υφίσταται. Στην πρώτη των περιπτώσεων ομιλούμε για περίθλαση μακρινού πεδίου ή περίθλαση Fraunhofer ενώ στη δεύτερη για περίθλαση κοντινού πεδίου ή περίθλαση Fresnel. Όπως προαναφέραμε βέβαια ο



(Σχ. 7.2.1)

πλήρης διαχωρισμός των δύο περιπτώσεων, αφορά συνολικά τρία μεγέθη που σχετίζονται με το πρόβλημα. Και αυτά είναι: Η μέγιστη διάσταση d του περιθλόντος ανοίγματος, η απόσταση l μεταξύ περιθλώντος ανοίγματος και πετάσματος παρατήρησης καθώς και το μ.κ. λ της φωτίζουσας ακτινοβολίας. Και όπως αποδεικνύεται στην (Άσκ. 1: Λυμένη) όταν $l = l_{\min} > d^2/\lambda$ βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer. Στην περίπτωση για την οποία $l < d^2/\lambda$ η περιοχή, είναι αυτή της περίθλασης Fresnel.

Εκτός του ότι περιθλόν άνοιγμα - επίπεδο παρατήρησης βρίσκονται μεταξύ τους σε μεγάλη απόσταση l, μας ενδιαφέρει εδώ (κατά τη μελέτη της περίθλασης μακρινού πεδίου), το πρότυπο περίθλασης να σχηματίζεται σε μικρή σχετικά απόσταση από τον άξονα z πάνω στο επίπεδο αυτό. Πιο συγκεκριμένα στο (Σχ. 7.2.2) βλέπουμε το περιθλόν άνοιγμα S_1 (στο σ.σ. x_1, y_1) να φωτίζεται από ένα επίπεδο μετ. κύματος πλάτους A. Σε απόσταση l από αυτό και ομοπαράλληλο, βρίσκεται το το σ.σ. x_0, y_0 όπου και το επίπεδο παρατήρησης. Τότε μπορούμε την απόσταση $P_1P_0 = r_{01}$, που είναι η απόσταση από ένα στοιχειώδη σκεδαστή (που εκπέμπει κυματίδιο) στο P_1 (εμβαδού ds) και του σημείου παρατήρησης P_0, να την εκφράσουμε ως εξής:

$$P_1P_0 = r_{01} = \sqrt{l^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \tag{7.2.1}$$

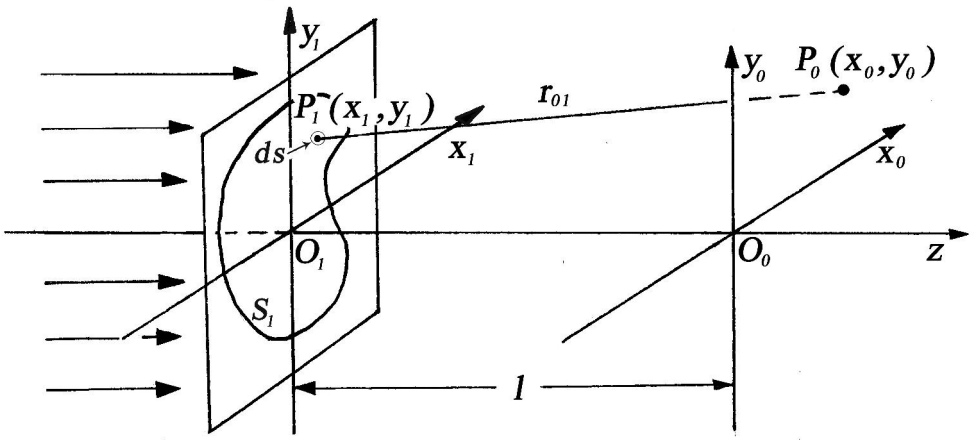
όπου (x_0, y_0), (x_1, y_1) οι συντεταγμένες των σημείων P_0, P_1 αντίστοιχα. Η (σχ. 7.2.1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$r_{01} = l\sqrt{1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{l^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{l^2}} \tag{7.2.2}$$

Όμως με βάση τις προαναφερόμενες υποθέσεις θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{|x_0 - x_1|}{l} \ll 1 \quad \text{και} \quad \frac{|y_0 - y_1|}{l} \ll 1 \tag{7.2.3}$$

που σημαίνει ότι οι διαφορές $\Delta x, \Delta y$ είναι πολύ μικρές σε σχέση με την απόσταση l. Τότε αν θεωρήσουμε ότι: $\frac{(x_0 - x_1)^2}{l^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{l^2} = q$, επειδή $|q| \ll 1$ η $\sqrt{1+q}$ με βά-



(Σχ. 7.2.2)

ση την διωνυμική ανάλυση εκφράζεται ως εξής:

$$\sqrt{1+q} = 1 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{8}q^2 + \cdots\cdots \tag{7.2.4}$$

Από την οποία λαμβάνοντας υπόψη μας τους δύο πρώτους όρους και αντικαθιστώντας το q θα έχουμε για το r_{01}:

$$r_{01} \simeq l + \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{2l} \tag{7.2.5}$$

Και η εκτέλεση των πράξεων μας δίνει το αποτέλεσμα:

$r_{01} \simeq l + \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2l}\right) + \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2l}\right) - \frac{(x_0 x_1 + y_0 y_1)}{l}$. Η τελευταία, αν αντικατασταθεί στο ολοκλήρωμα της (σχ. 7.1.6): $E = Ae^{i\omega t} C' \iint_{S_0} \frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} ds$, θα έχει σαν αποτέλεσμα το περιθλώμενο πεδίο στο σημείο P_0 να δίνεται από τη σχέση:

$$E = E(x_0, y_0) = Ae^{i\omega t} C' \frac{e^{-ikl}}{l} e^{\frac{-ik\left(x_0^2 + y_0^2\right)}{2l}} \iint_{S_0} e^{\frac{-ik\left(x_1^2 + y_1^2\right)}{2l}} e^{\frac{i2\pi}{\lambda l}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \tag{7.2.6}$$

Στα επόμενα, διευκρινίζουμε διαδοχικά τους όρους αυτής της σχέσης, με βάση τις προϋποθέσεις που γίνεται η προσέγγιση:

α) Ο όρος $C' = \frac{1}{i\lambda} Q$ θα γίνει: $C' \simeq \frac{1}{i\lambda}$ επειδή $Q \simeq 1$. Πράγματι ο παράγοντας κατεύθυνσης Q του οποίου στην προκειμένη περίπτωση η τιμή δίνεται από τη σχέση: $Q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{01}$ (βλ. ΘΕΜΑ 1), με $\mathbf{n}$ τη μοναδιαία κάθετη στο περιθλόν άνοιγμα και $\mathbf{r}_{01}$ το διάνυσμα θέσης από το P_0 στο P_1, έχει τιμή περίπου ίση με τη μονάδα, επειδή: $\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}} \simeq 0^0$.

β) Στον όρο $\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}}$ ο παρονομαστής r_{01}, μπορεί ν' αντικατασταθεί από το l (δηλ. $r_{01} \simeq l$) επειδή αφορά το πλάτος και όχι τη φάση. Γι' αυτό και τίθεται εκτός της υπό ολοκλήρωση ποσότητας. Δεν μπορεί όμως να γίνει το ίδιο και με τον όρο $e^{-ikr_{01}}$ επειδή σ' αυτόν το μέτρο του κυματάριθμου $k = 2\pi/\lambda$ είναι μεγάλος αριθμός και πολλαπλασιαζόμενος με τον r_{01} μπορεί να μας δώσει διαφορά φάσης $kr_{01} > 2\pi$. Γεγονός που αν συμβεί αλλοιώνει ολοκληρωτικά το αποτέλεσμα της συμβολής των σε επαλληλία ερχόμενων διαταραχών στα διάφορα σημεία P_0 του επιπέδου παρατήρησης.

γ) Το ds αντικαταστάθηκε από το διαφορικό εμβαδό $dx_1 dy_1$

δ) Κατά τα γνωστά, με βάση τις προσεγγίσεις μακρινού πεδίου: $x_1, y_1 \ll l$. Επομένως για την περίπτωση αυτή ο όρος $e^{\frac{-ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}} \to 1$, άρα παραλείπεται από την υπό ολοκλήρωση ποσότητα.

Σημείωση

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ο όρος $e^{\frac{-ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}}$ τείνει προς τη μονάδα όταν $x_1, y_1 \ll l$. Που σημαίνει ότι το πρότυπο περίθλασης για την προσέγγιση του μακρινού πεδίου θα το λάβουμε σε πολύ μεγάλη απόσταση σε σχέση με το περιθλόν άνοιγμα. Το γεγονός όμως αυτό δεν είναι πρακτικό από εργαστηριακή άποψη. Και όσον αφορά τη λύση του, θα δοθεί στην επόμενη παράγραφο (§ 7.3) με τη βοήθεια των φακών. Εκεί θ' αποδείξουμε ότι αν ακριβώς μετά το περιθλόν άνοιγμα τοποθετηθεί ένας θετικός φακός, τότε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer (δηλ. αυτό του μακρινού πεδίου), το λαμβάνουμε στο πίσω εστιακό του επίπεδο.

ε) Για απλότητα, μπορούμε να λάβουμε το πλάτος του προσπίπτοντος στο περιθλόν άνοιγμα επιπέδου μετ. κύματος ίσο με τη μονάδα. Δηλ. $A = 1$.

Οπότε με βάση τα προαναφερόμενα, το ολοκλήρωμα της περίθλασης της (σχ. 7.2.6) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E = E\left(x_0, y_0\right) = \frac{e^{i\omega t}}{i\lambda}\frac{e^{-ikl}}{l} e^{\frac{-ik\left(x_0^2+y_0^2\right)}{2l}} \iint_{S_0} e^{\frac{i2\pi}{\lambda l}\left(x_0 x_1 + y_0 y_1\right)} dx_1 dy_1 \qquad (7.2.7)$$

Όσον αφορά τώρα τους παράγοντες φάσης, του πολλαπλασιαστικούς του ολοκληρώματος έχουμε να πούμε τα εξής: Μας είναι γνωστό ότι αυτό που βλέπουμε ή καταγράφουμε με κοινούς ανιχνευτές στο επίπεδο παρατήρησης, είναι η κατανομή της έντασης του φωτός $I\left(x_0, y_0\right)$ και όχι το πλάτος της έντασης του περιθλώμενου ηλ. πεδίου $E\left(x_0, y_0\right)$ (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα (§ 2.4.2)). Όπου:

$I\left(x_0, y_0\right) \sim \left|E\left(x_0, y_0\right)\right|^2 = E\left(x_0, y_0\right) \cdot E^*\left(x_0, y_0\right)$, με $E^*\left(x_0, y_0\right)$ τη συζυγή ποσότητα της $E\left(x_0, y_0\right)$. Άρα για την ένταση του φωτός I οι όροι των φάσεων (οι πολλαπλασιαστικοί του ολοκληρώματος της (σχ. 7.2.7)), θα έχουν τιμή ίση με τη μονάδα.

Επομένως προκειμένου από εδώ και στο εξής να προσδιορίζουμε την κατανομή του πλάτους $E\left(x_0, y_0\right)$ των προτύπων περίθλασης για την προσέγγιση μακρινού πεδίου, θα πρέπει να βασίζουμε τους υπολογισμούς μας στο ολοκλήρωμα:

$$E(x_0, y_0) = \iint_{S_0} e^{\frac{i2\pi}{\lambda l}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \tag{7.2.8}$$

παραβλέποντας και τον παράγοντα πλάτους $1/\lambda l$ που είναι και αυτός πολλαπλασιαστικός του ολοκληρώματος. Και αυτό που θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας είναι τα όρια της ολοκλήρωσης που καθορίζονται από το περιθλόν άνοιγμα S_0.

Σημείωση

Αναφέραμε ήδη στα προηγούμενα (βλ. και ΘΕΜΑ 1) για τη συνάρτηση διαφάνειας πλάτους $t(x_1, y_1)$ και τη λειτουργία της. Αν λοιπόν η $t(x_1, y_1)$ καθορίζει εκτός των άλλων και τα όρια του περιθλώντος ανοίγματος, τότε μπορούμε τη (σχ. 7.2.8) να τη γράψουμε με τη μορφή:

$$E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{\frac{i2\pi}{\lambda l}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \tag{7.2.9}$$

Δηλ. η ολοκλήρωση να γίνει μεταξύ των ορίων $(-\infty, \infty)$. Επίσης η (σχ. 7.2.9) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E(u, \upsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{-i2\pi(u x_1 + \upsilon y_1)} dx_1 dy_1 \tag{7.2.10}$$

όπου οι: $u \equiv -x_0/\lambda l$ και $\upsilon \equiv -y_0/\lambda l$ (7.2.11)

ονομάζονται ***χωρικές συχνότητες (spatial frequencies)*** και έχουν διαστάσεις αντιστρόφου μήκους. Η (σχ. 7.2.10) συνιστά μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα σχέση, η οποία μας αποκαλύπτει το εξής: Η κατανομή του περιθλώμενου πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης για την περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer (μακρινού πεδίου), εκφράζεται από τον διδιάστατο (χωρικό) μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης διαφάνειας στις συντεταγμένες u, υ. Η σχέση αυτή συνιστά το θεμέλιο για την ανάπτυξη του κλάδου της Οπτικής Fourier, για την οποία ορισμένα στοιχεία αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι ο εκ ταυτότητας ορισμός των χωρικών συχνοτήτων u, υ (σχ. 7.2.11), μας οδηγεί στο να έχει αρνητικό πρόσημο ο εκθέτης στη (σχ. 7.2.10). Το τελευταίο γίνεται προκειμένου η μορφή αυτού του ολοκληρώματος να ταυτίζεται με τον αντίστοιχο μαθηματικό ορισμό του μετασχηματισμού Fourier

(μετ. F.) μιας συνάρτησης. Τότε ο εκθέτης στο λεγόμενο αντίστροφο μετ. F., ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$t(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(u,\upsilon) e^{i2\pi(ux_1+\upsilon y_1)} du d\upsilon \qquad (7.2.12)$$

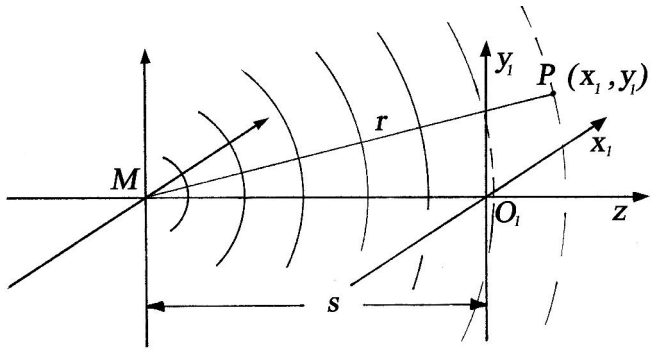
και μέσω του οποίου προκύπτει η συνάρτηση διαφάνειας $t(x_1, y_1)$, θα έχει θετικό πρόσημο. Όμως είναι συνηθισμένο στη βιβλιογραφία, τα πρόσημα των εκθετών να τα βρίσκουμε και αντίθετα από όπως τα ορίσαμε εμείς, χωρίς ουσιαστικά να υφίσταται κανένα πρόβλημα.

Στις (§ 7.4,5,6) θ' ασχοληθούμε συστηματικά με τους υπολογισμούς περιθλώμενων πεδίων Fraunhofer όπως: Ορθογωνίων ανοιγμάτων, σχισμών μεγάλου μήκους, κυκλικών ανοιγμάτων καθώς και περιοδικών φραγμάτων πλάτους διερχομένου και ανακλωμένου φωτός.

7.3 *Περίθλαση Fraunhofer με τη βοήθεια φακών*

Η επίδραση ενός λεπτού φακού σ' ένα προσπίπτον σ' αυτόν μετ. κύματος[*]

Στο (Κεφ. 1: Κύματα, (§ 1.8): Παράδειγμα (σχ. 2)), υπολογίσαμε την κατανομή του πλάτους ενός αποκλίνοντος από ένα σημείο σφαιρικού μετ. κύματος σ' ένα επίπεδο x_1, y_1 που απέχει απόσταση s από την πηγή στη θέση M (Σχ. 7.3.1).



(Σχ. 7.3.1)

Βρήκαμε ότι σε συνθήκες παραξονικής προσέγγισης ($x_1, y_1 \ll s$) η κατανομή του πλάτους Ψ στο σημείο (x_1, y_1) είναι ίση με:

---

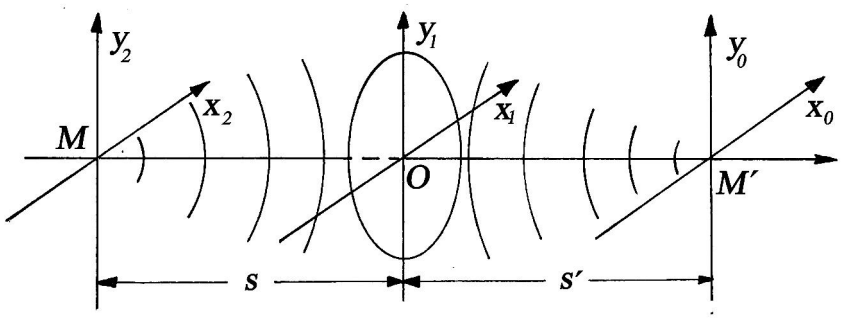
[*] A.K.Ghatak and K. Thyagarajan: 'Contemporary Optics'. Plenum Press. N.Y. and London (1978) (Ch. 6).

$\Psi(x_1, y_1, s) = \frac{A}{s} e^{\frac{-i2\pi s}{\lambda}} e^{\frac{-i2\pi}{2\lambda s}(x_1^2+y_1^2)} = \frac{A}{s} e^{-iks} e^{\frac{-ik(x_1^2+y_1^2)}{2s}}$. A/s το πλάτος της διαταραχής που μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ίσο με τη μονάδα και στον εκθέτη του μεγέθους:

$$e^{-ik\left(s+\frac{x_1^2+y_1^2}{2s}\right)} \tag{7.3.1}$$

βλέπουμε τον παράγοντα της φάσης, του οποίου ο πρώτος όρος είναι σταθερός, επειδή δεν εξαρτάται από τα x_1, y_1.

Θεωρούμε τώρα ότι σε απόσταση s από τη σημειακή πηγή βρίσκεται ένας λεπτός θετικός φακός χωρίς σφάλματα (Σχ. 7.3.2), του οποίου η εστιακή απόσταση είναι f. Τότε με βάση τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής το σημείο M θ' απει-



(Σχ. 7.3.2)

κονιστεί μέσω του φακού στη θέση M' σε απόσταση s' από αυτόν και ταυτόχρονα θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \tag{7.3.2}$$

(βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (σχ. 3.5.1.3.3)). Όμως ο φακός σαν διαφανές υλικό μεταβλητού πάχους, για τον οποίο θεωρούμε ότι ούτε ανακλά ούτε απορροφά το φως, είναι αυτονόητο ότι θα προκαλέσει από σημείο σε σημείο μια μεταβολή στη φάση για ένα προσπίπτον μετ. κύματος. Μας ενδιαφέρει εδώ, να υπολογίσουμε την κατανομή αυτή στη μεταβολή της φάσης που προκαλείται από το φακό. Ήδη όμως (σχ. 7.3.1), μας είναι γνωστή η κατανομή της φάσης στο επίπεδο x_1, y_1 για την παραξονική προσέγγιση του σφαιρικού αποκλίνοντος από τη σημειακή πηγή M (σημειακό αντικείμενο) μετ. κύματος. Του οποίου το είδωλο στη θέση M' που απέχει από το φακό απόσταση s' ($OM' = s'$), σχηματίζεται από ένα συγκλίνον σφαιρικό

μετ. κύματος στο M'. Του σφαιρικού αυτού συγκλίνοντος μετ. κύματος η κατανομή της φάσης στο επίπεδο x_1, y_1 κατά την έξοδό του από το φακό, βρίσκεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και του αποκλίνοντος και τη βλέπουμε στον εκθέτη του μεγέθους:

$$e^{ik\left(s'+\frac{x_1^2+y_1^2}{2s'}\right)} \tag{7.3.3}$$

Όπου το θετικό πρόσημο στους εκθέτες αφορά σε συγκλίνον μετ. κύματος.

Αν τώρα με t_L παραστήσουμε τη συνάρτηση διαφάνειας του φακού (με μοναδιαία τα πλάτη λόγω μη απορρόφησης και ανάκλασης από αυτόν), θα έχουμε:

$$e^{ik\left(s'+\frac{x_1^2+y_1^2}{2s'}\right)} = t_L \cdot e^{-ik\left(s+\frac{x_1^2+y_1^2}{2s}\right)} \tag{7.3.4}$$

Από την οποία βρίσκουμε:

$$t_L = e^{ik(s+s')} e^{-\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}\right)\left(x_1^2+y_1^2\right)\right]} \tag{7.3.5}$$

Και τελικά απαλείφοντας τον όρο $e^{ik(s+s')}$ επειδή δεν εξαρτάται από τα x_1, y_1 και χρησιμοποιώντας τη (σχ. 7.3.2) (της σχέση απεικόνισης μέσω του λεπτού φακού) βρίσκουμε τελικά:

$$t_L = e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2f}} \tag{7.3.6}$$

Αυτή θα είναι η χαρακτηριστική επίδραση που θα έχει ένας λεπτός φακός σ' ένα προσπίπτον σ' αυτόν μετ. κύματος: Δηλ. θα πολλαπλασιάζει την κατανομή φάσης του προαναφερόμενου μετώπου με τον παράγοντα που δίνεται από τη (σχ. 7.3.6).

Παράδειγμα

Ένα επίπεδο μετ. κύματος σταθερού πλάτους A διαδίδεται κατά μήκος του οπτικού άξονα ενός λεπτού θετικού φακού στον οποίο και προσπίπτει. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος;

- Αν V_i είναι το προσπίπτον μετ. κύματος και V_t το διερχόμενο από το φακό, τότε με βάση τον ορισμό της συνάρτησης διαφάνειας: $t_L = V_t / V_i$ και επειδή: $t_L = e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2f}}$ θα έχουμε: $V_t = Ae^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2f}}$. Και από τη μορφολογία αυτής της εξίσωσης βλέπουμε ότι το αναδυόμενο από το φακό μετ. κύματος, είναι ένα σφαιρικό συγκλί-

νον (παραξονική προσέγγιση) σε απόσταση f μετά από το φακό, όπου και η εστία του. αν αντί του θετικού φακού χρησιμοποιήσουμε αρνητικό, τότε $f<0$. Οπότε το αναδυόμενο από το φακό μέτωπο θα είναι σφαιρικό αποκλίνον από ένα φανταστικό σημείο σε απόσταση f πριν από το φακό.

Η διαδικασία λήψης του προτύπου περίθλασης Fraunhofer, με τη βοήθεια ενός φακού

Το ολοκλήρωμα της περίθλασης της (σχ. 7.1.6), μετά την πρώτη προσέγγιση που επιβάλλαμε στη απόσταση $P_0P_1 = r_{01}$, πήρε τη μορφή της (σχ. 7.2.6). Με την προϋπόθεση βέβαια ότι το περιθλόν άνοιγμα S_0 δεν διαμορφωνόταν από οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση των x_1, y_1 εκτός αυτής των ορίων που έθετε το ίδιο το άνοιγμα. Για την περίπτωση που δεν συνέβαινε αυτό, το ολοκλήρωμα της περίθλασης περιείχε και τη συνάρτηση διαφάνειας t, όπως ακριβώς δίνεται από τη (σχ. 7.1.7). Με βάση αυτό το δεδομένο, την πρώτη προσέγγιση στο r_{01} και τη απαλοιφή των όρων πλάτους και σταθερών φάσεων, το ολοκλήρωμα της (σχ. 7.2.6) (συμπεριλαμβανομένου και του παράγοντα $t(x_1, y_1)$) θα πάρει τελικά τη μορφή:

$$E = E(x_0, y_0) = \iint_{S_0} t(x_1, y_1)\, e^{\frac{-ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}}\, e^{\frac{i2\pi}{\lambda l}(x_0x_1+y_0y_1)}\, dx_1 dy_1 \qquad (7.3.7)$$

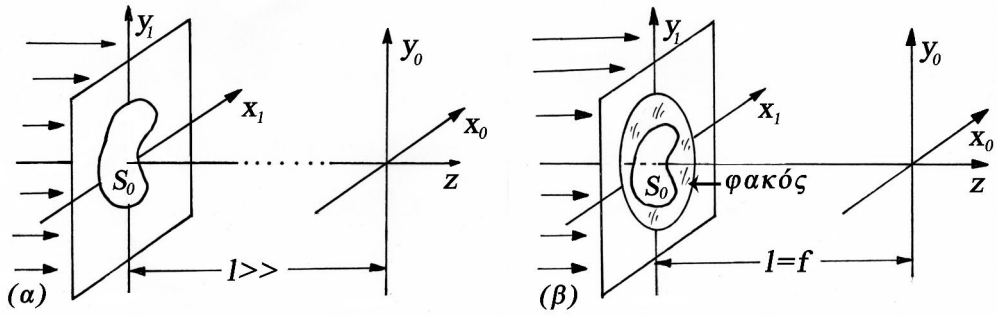
Έστω λοιπόν τώρα, ακριβώς μετά (ή ακόμη και πριν) το περιθλόν άνοιγμα S_0 τοποθετούμε ένα θετικό φακό εστιακής απόστασης f. Τότε με βάση τα όσα προαναφέραμε θα έχουμε: $t(x_1, y_1) = t_L(x_1, y_1) = e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2f}}$. Και για την απόσταση $l = f$ το ολοκλήρωμα της (σχ. 7.3.7) θα πάρει τη μορφή:

$E(x_0, y_0) = \iint_{S_0} e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2f}}\, e^{\frac{-ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2f}}\, e^{\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0x_1+y_0y_1)}\, dx_1 dy_1$. Και τελικά:

$$E(x_0, y_0) = \iint_{S_0} e^{\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0x_1+y_0y_1)}\, dx_1 dy_1 \qquad (7.3.8)$$

Το σημαντικό λοιπόν συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από τα προαναφερόμενα είναι το εξής: Προκειμένου να λάβουμε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer (μακρινού πεδίου), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε: α) Είτε τη (σχ. 7.2.8):

$\left(E(x_0, y_0) = \iint_{S_0} e^{\frac{i2\pi}{\lambda l}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \right)$, που σημαίνει ότι το πέτασμα παρατήρησης βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το περιθλόν άνοιγμα $(l \gg)$ (Σχ. 7.3.3α), ή β) Αμέσως μετά (ή ακόμη και αμέσως πριν) το περιθλόν άνοιγμα S_0 να χρησιμοποιή-



(Σχ. 7.3.3)

σουμε ένα φακό. Τότε για τον υπολογισμό του προτύπου, λαμβάνουμε υπόψη μας τη (σχ. 7.3.8). Δηλ. τη (σχ. 7.2.8) για $l = f$. Που σημαίνει ότι το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer λαμβάνεται πάνω στο εστιακό επίπεδο του φακού. (Σχ. 7.3.3β). Και τελικά από πρακτική άποψη σε πολύ μικρή απόσταση από το περιθλόν άνοιγμα.

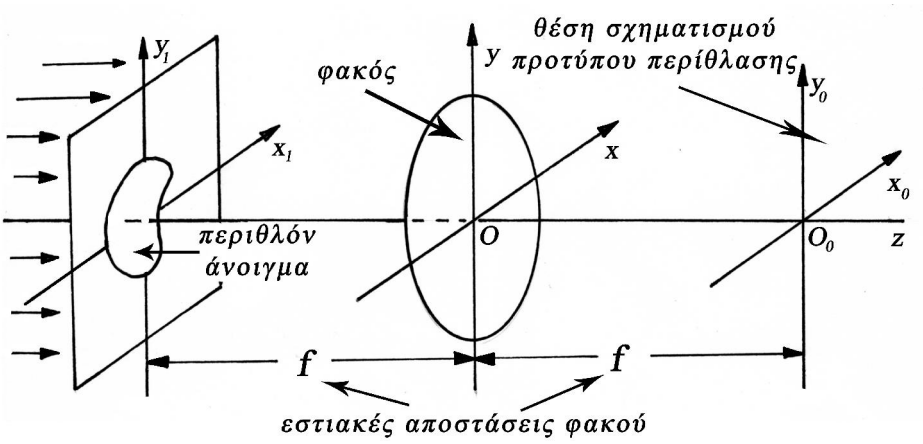
Παράδειγμα

Διαθέτουμε ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου $d = 3\text{mm}$ και ένα θετικό φακό εστιακής απόστασης $f = 30\text{cm}$. Σε ποια θέση μπορούμε να πάρουμε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer με βάση τις δύο προαναφερόμενες περιπτώσεις (χωρίς φακό ή με φακό). Η φωτίζουσα πηγή είναι από Laser He-Ne με $\lambda = 632.8\text{nm}$.

- α) Για την περίπτωση που δεν θα χρησιμοποιήσουμε το φακό, η σχέση που μας καθορίζει την απόσταση l από την οποία και μετά η προσέγγιση θεωρείται ότι είναι εντός της περιοχής της περίθλασης μακρινού πεδίου (Fraunhofer), δίνεται (βλ. Άσκ. 1: Λυμένη) από τη σχέση: $l_{\min} = l > d^2/\lambda$. Όπου $l_{\min}$ η ελάχιστη απόσταση από το περιθλόν άνοιγμα πάνω από την οποία θα βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer. d, λ η διάμετρος του κυκλικού ανοίγματος και το μ.κ. αντίστοιχα της φωτίζουσας το άνοιγμα ακτινοβολίας. Επομένως για $d = 3\text{mm}$ και $\lambda = 632.8\text{nm}$ βρίσκουμε: $l_{\min} = l > 14.22\text{m}$. Άρα τα 14m είναι η μικρότερη απόσταση, πάνω από την οποία θα μπορούμε να λαμβάνουμε πρότυπο περίθλασης Fraunhofer. Είχαμε ήδη αναφέρει ότι για την περιοχή αυτή, τα πρότυπα περίθλασης θα είναι ίδια μορφολογικά, μόνο που θα διαφέρουν στις διαστάσεις τους καθώς απομακρυνόμαστε από την θέση $l = l_{\min}$ β) Με τη χρησιμοποίηση του φακού και με τη βοή-

θεια της διάταξης του (Σχ. 7.3.3β), το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer το παίρνουμε ακριβώς πάνω στο εστιακό επίπεδό του. Στην προκειμένη περίπτωση το πέτασμα παρατήρησης θα είναι το πίσω εστιακό επίπεδο του φακού. Δηλ. σε απόσταση από το φακό ίση με 30cm, δεδομένου ότι φακός και περιθλόν άνοιγμα σχεδόν βρίσκονται σε επαφή.

Από τη θεωρία της Οπτικής Fourier αποδεικνύεται ότι τα πρότυπα περίθλασης Fraunhofer (μακρινού πεδίου) με τη βοήθεια φακού, μπορούμε να τα παίρνου-



(Σχ. 7.3.4)

με τη βοήθεια της διάταξης του (Σχ. 7.3.4). Στην περίπτωση αυτή το περιθλόν άνοιγμα δεν βρίσκεται σε επαφή με το φακό, αλλά κατέχει τη θέση του εμπρός του εστιακού επιπέδου. Δηλ. σε απόσταση f πριν από αυτόν. Ενώ το πρότυπο περίθλασης σχηματίζεται όπως και προηγουμένως στο πίσω του εστιακό επίπεδο. Η διαφορά με τη διάταξη λήψης των προτύπων σε σχέση με την του (Σχ. 7.3.3β),αφορά μόνο σταθερούς παράγοντες φάσης, οι οποίοι κατά τα γνωστά δεν παίζουν ουσιαστικό ρόλο, δεδομένου ότι απαλείφονται κατά την ανάδειξη του προτύπου περίθλασης της έντασης I του φωτός.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τη διάταξη του (Σχ. 7.3.4) κατά τους υπολογισμούς των διαφόρων προτύπων περίθλασης Fraunhofer, δεχόμενη περαιτέρω διευκρινίσεις. Μια σημαντική επίσης παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε, είναι ότι οι διαστάσεις των περιθλώντων ανοιγμάτων πρέπει να είναι αρκετά μικρότερες των διαμέτρων των εκάστοτε χρησιμοποιούμενων φακών. Σε αντίθετη περίπτωση – θέμα που η μελέτη μπορεί να γίνει μέσω της Οπτικής Fourier – θα πρέπει κατά τη διάδοση του περιθλώμενου πεδίου, να ληφθούν υπόψη τα όριά τους. Από πρακτική άποψη, μπορούμε κατ' αρχή να εικάσουμε ότι, αν οι διαστάσεις των περιθλώντων ανοιγμάτων είναι όπως είπαμε μεγαλύτερες των διαμέτρων των φακών, τότε τα περιθλώμενα πεδία (και συγκεκριμένα οι ακραίες χωρικές συχνότητες), δεν θα μπο-

ρούν να συλλεγούν από τους φακούς γιατί θα διαδίδονται εκτός των ορίων τους. Σαν συνέπεια θα έχουμε αλλοίωση των προτύπων περίθλασης. Δηλ. τα τελευταία δεν θα είναι τα ακριβή.

Όσον αφορά βέβαια τη (σχ. 7.3.8) η οποία στη γενικότερη περίπτωση που το περιθλόν άνοιγμα χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση διαφάνειας $t(x_1, y_1)$, θα πάρει τη μορφή:

$$E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \qquad (7.3.9)$$

Όπου τώρα στην $t(x_1, y_1)$ περιλαμβάνονται τα χωρικά όρια του περιθλώντος ανοίγματος. Και αν – όπως ήδη έχουμε αναφέρει (σχ. 7.2.11)– εισάγουμε την αλλαγή των μεταβλητών: $u \equiv -x_0/\lambda l$, $\upsilon \equiv -y_0/\lambda l$ τότε το ολοκλήρωμα της (σχ. 7.3.9) μπορεί να γραφεί:

$$E(x_0, y_0) = E(u, \upsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{-i2\pi(ux_1 + \upsilon y_1)} dx_1 dy_1 \qquad (7.3.10)$$

που είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης διαφάνειας $t(x_1, y_1)$ στις συντεταγμένες u, υ. Δηλ. οι συναρτήσεις $E(u, \upsilon), t(x_1, y_1)$ συνιστούν ζεύγος Fourier. Δηλ. $E(u, \upsilon) = \mathfrak{F}\{t(x_1, y_1)\}$, όπου το σύμβολο: $\mathfrak{F}\{\ \}$, είναι αυτό του μετασχηματισμού Fourier. Από πρακτική άποψη – όπως θα δούμε στα επόμενα – οι u, υ σχετίζονται με τα συνημίτονα κατεύθυνσης του εκάστοτε σημείου P_0 στο επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0 όπως αυτό φαίνεται από την αρχή του σ.σ. στο περιθλόν άνοιγμα ή αν χρησιμοποιηθεί φακός για τη λήψη του προτύπου, από το κέντρο του φακού.

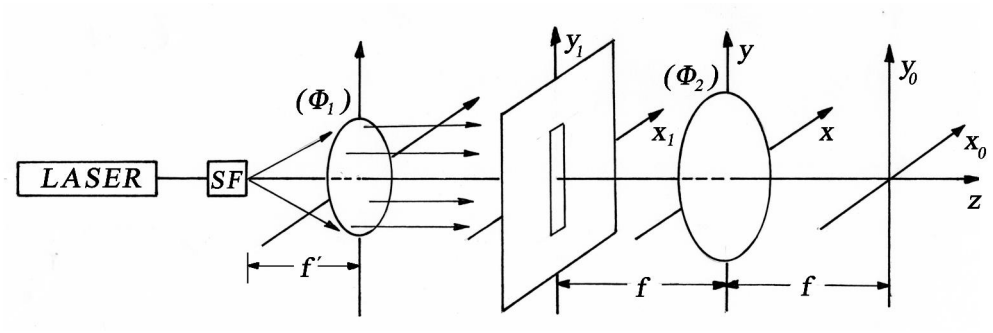
Μπορούμε λοιπόν να δούμε εδώ ότι ένας απλός φακός, επιτελεί μια πολύ σπουδαία εργασία: Αυτήν της εκτέλεσης του μετασχηματισμού Fourier μιας συνάρτησης $t(x_1, y_1)$. Ο ίδιος, ονομάζεται ***μετασχηματιστής φακός (lens transformer)*** και το πίσω εστιακό του επίπεδο, ***επίπεδο Fourier (Fourier plane)***. Και θα πρέπει και πάλι να διευκρινίσουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier αφορά το πλάτος του περιθλόμενου ηλ. πεδίου και όχι την ένταση του φωτός.

Εφαρμογή

Πειραματικές διατάξεις λήψης προτύπων περίθλασης Fraunhofer. (Περίθλασης μακρινού πεδίου)

α) Λήψη προτύπων περίθλασης μέσω φακού

Όπως θα δούμε και στα επόμενα, τα περιθλώντα στοιχεία μπορεί να είναι από πάρα πολύ μικρών διαστάσεων, όπως π.χ. ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου $d = 0.01\text{mm}$, αλλά και μεγάλων διαστάσεων όπως είναι ένα περιοδικό φράγμα πλάτους, διαστάσεων $2 \times 2\text{cm}$. Επομένως το επίπεδο μετ. κύματος το οποίο θα φωτίσει τα περιθλώντα ανοίγματα, θα πρέπει να είναι επαρκούς διαμέτρου. Συνήθως για την περιθλασιμμετρία στις μέρες μας, σαν πηγές φωτός χρησιμοποιούμε Laser αερίων (He-Ne, Ar^+). Και ένα από τα πλέον συνήθη, είναι το εργαστηριακό Laser He-Ne $(\lambda = 632.8\text{nm})$ με ισχύ εξόδου 5mW. Το Laser αυτό του οποίου η διάμετρος της δέσμης εξόδου είναι $d' \simeq 2\text{mm}$, είναι κατάλληλο να φωτίσει κατ' ευθείαν ένα περιθλόν άνοιγμα διαμέτρου μέχρι και 2mm, όχι όμως μεγαλυτέρων διαστάσεων. Για το λόγο αυτό απαιτείται μια πειραματική επί μέρους διάταξη, που να διευρύνει κατά βούληση τη διάμετρο του Laser. Μια πλήρης και λεπτομερής περιγραφή αυτής της επί μέρους διάταξης, δίνεται στο: (Κεφ. 3: Γεωμετρική οπτική (§ 3.5.2.6) (Ανεστιακά συστήματα φακών - Εφαρμογή)). Επομένως το τμήμα αυτό της διάταξης θα το χρησιμοποιήσουμε στη γενική διάταξη του (Σχ. 7.3.5) που αποτελείται: α) Από το Laser He-Ne, β) Το εξάρτημα που ονομάζεται ηθμός χώρου (Spatial filter) και το οποίο μετατρέπει το επίπεδο μετ. κύματος της δέσμης Laser σε σφαιρικό και



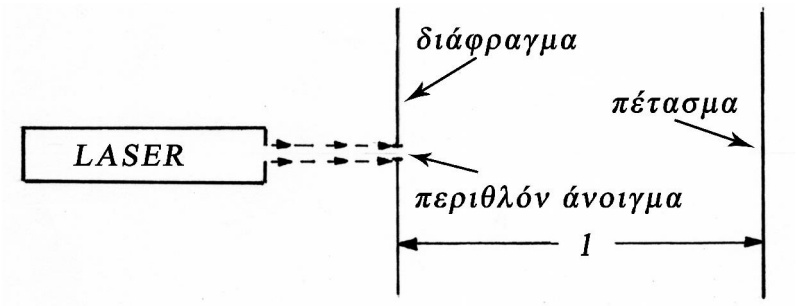
(Σχ. 7.3.5)

γ) Τον παραλληλιστή φακό (Φ_1), στο εμπρός εστιακό επίπεδο του οποίου βρίσκεται η σημειακή πηγή εξόδου του ηθμού. Τότε σε κοντινή απόσταση από το φακό (Φ_1) τοποθετούμε διάφραγμα (σ.σ. x_1, y_1), που περιλαμβάνει το περιθλόν στοιχείο, το οποίο και φωτίζεται από το διευρυμένο επίπεδο μετ. κύματος που προέρχεται από αυτόν. Κατόπιν σε απόσταση f (όση η εστιακή του απόσταση), τοποθετούμε το μετασχηματιστή φακό (Φ_2), του οποίου το πίσω εστιακό επίπεδο πάνω σε πέτασμα (σ.σ. x_0, y_0) θα πάρουμε κατά τα γνωστά το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer (την

κατανομή της έντασης του φωτός). Η τελευταία μπορεί να φωτογραφηθεί ή να προβληθεί μεγεθυμένη σ' ένα πέτασμα με κατάλληλο οπτικό σύστημα. Από εδώ και στο εξής τα πρότυπα περίθλασης Fraunhofer θα λαμβάνονται μέσω μιας τέτοιας διάταξης, σε σχήματα που δεν θα εμφανίζεται το επί μέρους σύστημα διεύρυνσης της δέσμης.

β) Λήψη προτύπων περίθλασης κατ' ευθείαν με μια δέσμη Laser

Έστω ότι η μέγιστη διάμετρος d του περιθλώντος ανοίγματος είναι μικρότερη των 2mm (τυπική διάμετρος Laser He - Ne μικρής ισχύος). Τότε μπορούμε να φωτίσουμε κατ' ευθείαν το περιθλόν στοιχείο, δεδομένου ότι η ισοφασική επιφάνεια της δέσμης συνιστά επίπεδο μετ. κύματος (Σχ. 7.3.6). Άρα τηρουμένων των



(Σχ. 7.3.6)

συνθηκών περίθλασης μακρινού πεδίου, το πρότυπο περίθλασης μπορεί να ληφθεί σε ένα πέτασμα (χωρίς τη μεσολάβηση του φακού) σε απόσταση l η οποία θα είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μέγιστη διάσταση του περιθλώντος ανοίγματος. Και πιο συγκεκριμένα θα πρέπει να ισχύει η γνωστή σχέση: $l = l_{\min} > d^2/\lambda$. Θα πρέπει βέβαια σε όλες τις περιπτώσεις να γνωρίζουμε ότι η διατομή της δέσμης του Laser δεν είναι ομογενής από άποψη φωτισμού, αλλά έχει γκαουσιανή κατανομή. Και δεδομένου ότι η ένταση της κατ' ευθείαν δέσμης του Laser είναι ισχυρή, μπορούμε και σε πολύ μεγάλη απόσταση (π.χ. 15m) να πάπουμε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer πολύ μεγεθυμένο, δεδομένου ότι η μορφολογία της δομής του δεν θα αλλάξει για συνθήκες περίθλασης μακρινού πεδίου. Τότε για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε και πάλι τη (σχ. 7.3.9) αρκεί ν' αντικαταστήσουμε την εστιακή απόσταση f του φακού, με την απόσταση l περιθλώντος στοιχείου – πετάσματος.

γ) Παρατήρηση προτύπων περίθλασης Fraunhofer, κατ' ευθείαν με το μάτι μας

Ένα τέτοιο παράδειγμα περιγράφεται αναλυτικά στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Αφορά το πρότυπο περίθλασης το οποίο παίρνουμε μέσω περιοδικού φράγματος πλάτους δύο διαστάσεων, που δημιουργείται από τη δομή μιας πυκνοϋφασμένης κουρτίνας. Όταν αυτή βέβαια τοποθετηθεί κοντά στο μάτι μας και δια μέσου της παρατηρούμε τη νύχτα ένα φως του δρόμου (Σχ. 7.3). Αντί της κουρτίνας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα οποιοδήποτε περιθλόν στοιχείο. Π.χ. ένα αδιαφανές πέτασμα, το οποίο προηγουμένως έχουμε τρυπήσει με την άκρη μιας βελόνας. Αρκεί να το πλησιάσουμε πολύ κοντά στο μάτι μας (σε χαλαρή κατάσταση - παρατήρηση στο άπειρο) και διά μέσου του να παρατηρήσουμε μια μακρινή πηγή φωτός. Τότε αυτό που θα δούμε, θα είναι το πρότυπο περίθλασης του συγκεκριμένου ανοίγματος, σχηματιζόμενο όμως φαινομενικά γύρω από το επίπεδο που βρίσκεται η πηγή του φωτός.

7.4 *Περίθλαση Fraunhofer από ορθογώνιο άνοιγμα και από σχισμή μεγάλου μήκους*

7.4.1 *Περίθλαση Fraunhofer από ορθογώνιο άνοιγμα διαστάσεων* $2X_1 \times 2Y_1$

Στην προκειμένη περίπτωση και εφόσον χρησιμοποιήσουμε τη (σχ. 7.3.9): $E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1$ για αναλυτικούς υπολογισμούς, η συνάρτηση διαφάνειας $t(x_1, y_1)$ θα δίνεται από τη σχέση (που καθορίζει ουσιαστικά και τα όρια ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος της περίθλασης):

$$t(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & \text{γιά} \quad |x_1| < X_1,\ |y_1| < Y_1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{7.4.1.1}$$

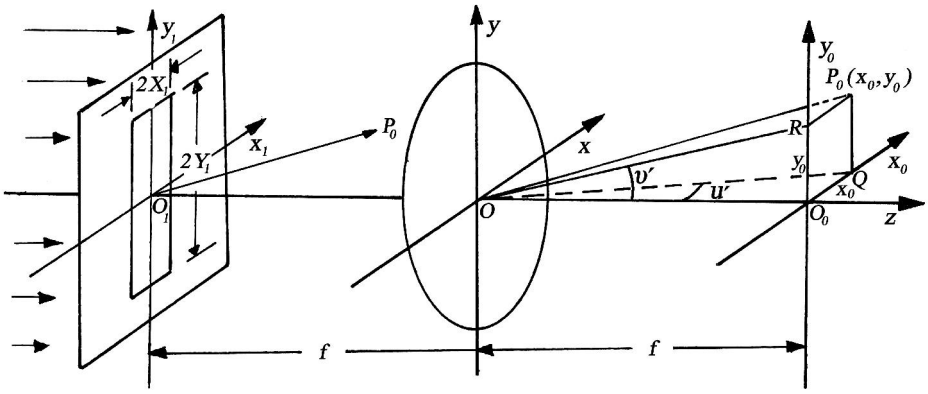
Οπότε:
$$E(x_0, y_0) = \int_{-X_1}^{X_1}\int_{-Y_1}^{Y_1} e^{\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \tag{7.4.1.2}$$

Και επειδή το ολοκλήρωμα είναι διαχωρίσιμο θα έχουμε:

$$E(x_0, y_0) = \int_{-X_1}^{X_1} e^{iku' x_1} dx_1 \int_{-Y_1}^{Y_1} e^{ik\upsilon' y_1} dy_1 \tag{7.4.1.3}$$

Όπου:
$$u' = x_0 / f \ \text{ και } \ \upsilon' = y_0 / f \tag{7.4.1.4}$$

είναι όπως θα δούμε στα επόμενα τα συνημίτονα κατεύθυνσης της γωνίας με την οποία φαίνεται ένα ορισμένο σημείο P_0 από το κέντρο του περιθλώντος ανοίγματος. Και για την περίπτωση που χρησιμοποιούμε για τη λήψη του προτύπου φακό, το P_0 είναι αυτό που θα φαίνεται από το κέντρο του φακού (Σχ. 7.4.1.1).



(Σχ. 7.4.1.1)

Για το πρώτο ολοκλήρωμα της (σχ. 7.4.1.3) θα έχουμε:

$$\int_{-X_1}^{X_1} e^{iku'x_1}dx_1 = \frac{1}{iku'}\int_{-X_1}^{X_1} e^{iku'x_1}d\left(iku'x_1\right) = \frac{1}{iku'}e^{iku'x_1}\Big|_{-X_1}^{X_1} = \frac{1}{iku'}\left[e^{iku'x_1} - e^{-iku'x_1}\right] =$$

$= \dfrac{X_1}{iku'X_1}2i\sin\left(ku'X_1\right) = 2X_1\dfrac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}$ (επειδή: $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζεται και το ολοκλήρωμα: $\int_{-Y_1}^{Y_1} e^{ik\upsilon' y_1}dy_1$ της (σχ. 74.1.3). Οπότε τελικά προκύπτει:

$$E\left(x_0, y_0\right) = 4X_1Y_1\left(\frac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}\right)\left(\frac{\sin k\upsilon'Y_1}{k\upsilon'Y_1}\right) \qquad (7.4.1.5)$$

Πρόκειται για μια δύο διαστάσεων συνάρτηση των $P_0\left(x_0, y_0\right)$, επειδή: $u' = x_0/f$ και $\upsilon' = y_0/f$ (σχ. 7.4.1.4). Δηλ. η κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου, έχει τιμές για όλα τα σημεία του επιπέδου x_0, y_0. Η συνάρτηση $\left(\sin q/q\right) \equiv \sin c\left(q\right)$ εμφανίζεται αρκετά συχνά στο λογιστικό μέρος διαφόρων κλάδων της φυσικής. Για το λόγο αυτό στα επόμενα θα τη μελετήσουμε αναλυτικά όπως και το τετράγωνό

της $(\sin q/q)^2 \equiv \sin c^2(q)$, (βλ. Άσκ. 2: Λυμένη). Και αυτό επειδή πιο συγκεκριμένα σε τελικό σημείο μας αφορά η κατανομή της έντασης του φωτός. Δηλ. η συνάρτηση: $I(x_0, y_0) \sim |E(x_0, y_0)|^2$ που σημαίνει ότι από τη (σχ. 7.4.1.5) θα έχουμε:

$$I(x_0, y_0) \sim 16 X_1^2 Y_1^2 \left(\frac{\sin ku' X_1}{ku' X_1} \right)^2 \left(\frac{\sin k\upsilon' Y_1}{k\upsilon' Y_1} \right)^2 \qquad (7.4.1.6)$$

Όπως όμως έχουμε αναφέρει επανειλημμένα, οι διάφοροι όροι της φάσης (ο χρονικός και οι χωρικοί), οι πολλαπλασιαστικοί της συνάρτησης του πλάτους $E(x_0, y_0)$ του ηλ. πεδίου της (σχ. 7.2.7), απαλείφονται κατά τον υπολογισμό της έντασης του φωτός. Για το λόγο αυτό ακριβώς δεν τους εμφανίζουμε καν στη έκφραση του $E(x_0, y_0)$ της (σχ. 7.4.1.5). Εκτός από αυτούς όμως, υφίσταται (σχ. 7.2.7) και ο πολλαπλασιαστικός όρος $A/\lambda f$ (για την ένταση του φωτός $(A/\lambda f)^2$, τον οποίο επίσης αγνοήσαμε. Όπου κατά τα γνωστά A το πλάτος του προσπίπτοντος στο περιθλόν άνοιγμα επιπέδου μετ. κύματος με διαστάσεις $(\mathrm{V/m})$. Και προκειμένου τελικά ο όρος : $16A^2 X_1^2 Y_1^2 / \lambda^2 f^2$ να λάβει διαστάσεις έντασης του φωτός $(\mathrm{W/m^2})$, θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το γινόμενο $\varepsilon_0 c$. Όπου βέβαια ε_0 η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα, (§ 2.4.2)(σχ. 2.4.2.5)). Τότε ο ακριβής πολλαπλασιαστικός όρος της (σχ. 7.4.1.6) θα είναι ο: $I_0 = \varepsilon_0 c \dfrac{16A^2 X_1^2 Y_1^2}{\lambda^2 f^2}$ για τον οποίο μπορούμε να πούμε ότι αντιπροσωπεύει την ένταση του φωτός στο κέντρο του προτύπου περίθλασης. Δηλ. για $(u', \upsilon') = (0, 0)$. Επομένως η κανονικοποιημένη μορφή της (σχ. 7.4.1.6) θα μπορούσε να γραφεί:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin ku' X_1}{ku' X_1} \right)^2 \left(\frac{\sin k\upsilon' Y_1}{k\upsilon' Y_1} \right)^2 \qquad (7.4.1.7)$$

Αλλά πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της συνάρτησης $(\sin q/q)^2$ και συνακόλουθα στην ανάδειξη της μορφολογίας του προτύπου περίθλασης Fraunhofer για το ορθογώνιο άνοιγμα με βάση τη (σχ. 7.4.1.7), θα πρέπει να διευκρινίσουμε τη σημασία των παραγόντων u', υ'. Πρόκειται ουσιαστικά – όπως υπερτονίζεται στο (Σχ. 7.4.1.1) – για τις γωνίες με τις οποίες φαίνονται οι συνιστώσες x_0 και y_0 του σημείου $P_0(x_0, y_0)$ από το κέντρο του φακού O (το P_0 είναι ένα τυχαίο σημείο του

προτύπου περίθλασης). Είναι ακριβώς οι ίδιες αν με την απουσία του φακού, βλέπαμε τις x_0 και y_0 από το σημείο O_1 (που είναι το κέντρο του ορθογωνίου ανοίγματος) με την προϋπόθεση ότι το επίπεδο παρατήρησης θα ήταν πολύ μακριά. Κάτω από αυτές τις συνθήκες (Σχ. 7.4.1.1):

$$\left.\begin{aligned} \cos\widehat{yOP_0} &= \sin\widehat{P_0OQ} = \frac{P_0Q}{OP_0} = \frac{RO_0}{OP_0} = \frac{y_0}{OP_0} \simeq \frac{y_0}{f} = \tan\upsilon' \simeq \upsilon' \\ \cos\widehat{xOP_0} &= \sin\widehat{P_0OR} = \frac{P_0R}{OP_0} = \frac{QO_0}{OP_0} = \frac{x_0}{OP_0} \simeq \frac{x_0}{f} = \tan u' \simeq u' \end{aligned}\right\} \qquad (7.4.1.8)$$

Επομένως σαφής η σχέση μεταξύ των u',υ' και των συνημίτονων κατεύθυνσης των γωνιών $\widehat{xOP_0},\widehat{yOP_0}$ με τις οποίες φαίνεται το σημείο $P_0(x_0,y_0)$ από το κέντρο O του φακού (ή από το κέντρο του περιθλώντος ανοίγματος απουσία του). Οι σχέσεις τελικά:

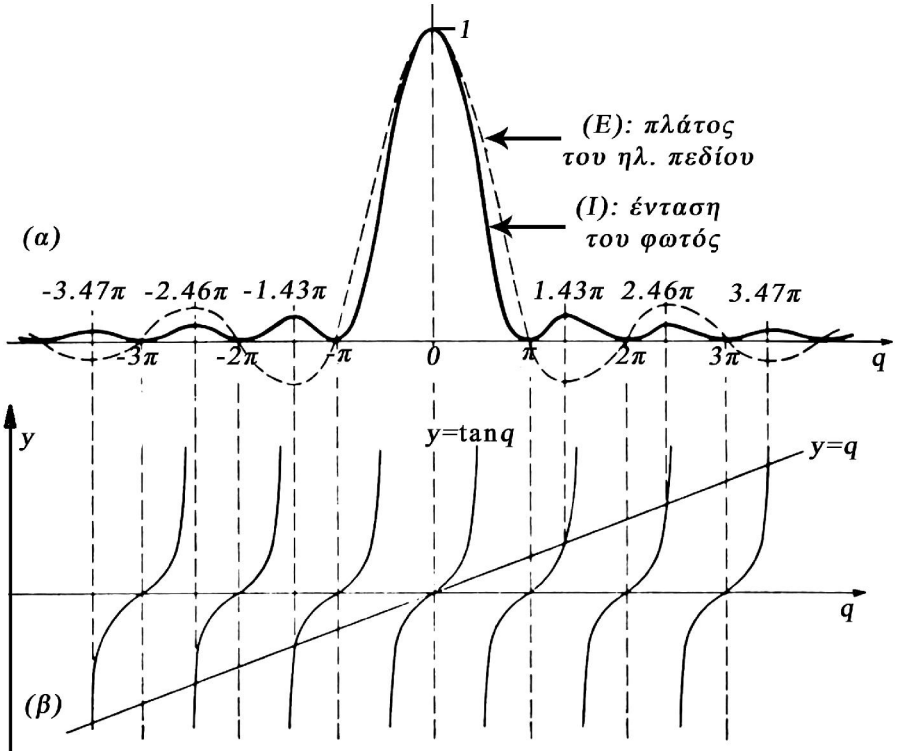
$$u' \simeq \tan u' = x_0/f \qquad \text{και} \qquad \upsilon' \simeq \tan\upsilon' = y_0/f \qquad (7.4.1.9)$$

που αφορούν το σημείο $P_0(x_0,y_0)$ πάνω στο πρότυπο περίθλασης, θα ισχύουν από εδώ και στο εξής για όλα τα περιθλώντα στοιχεία για συνθήκες περίθλασης Fraunhofer. Και θα δούμε στα επόμενα πώς ακριβώς συνδέονται με τις διαστάσεις των περιθλώντων ανοιγμάτων, προκειμένου μέσω των προτύπων ν' αντλούμε πληροφορίες γι' αυτά. Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι το πίσω εστιακό επίπεδο του φακού, όπου και εντοπίζεται το πρότυπο περίθλασης κατά πλάτος (κατανομή του ηλεκτρικού του πεδίου), ονομάζεται αντίστροφος χώρος. Ενώ το εμπρός του εστιακό επίπεδο (όπου βρίσκεται το περιθλόν άνοιγμα), ονομάζεται ευθύς χώρος.

Εκτενής μελέτη της συνάρτησης $(\sin q/q)^2 = \sin^2 q/q^2$ έχουμε ήδη αναφέρει ότι γίνεται στην (Άσκ. 2: Λυμένη). Δηλ. τα όσα αφορούν τη μορφολογία της και τις θέσεις των εμφανιζόμενων μεγίστων και ελαχίστων συναρτήσει του $q = ku'X_1$ (ή με πανομοιότυπο τρόπο του $q = k\upsilon'Y_1$), όπου τα u',υ' θα δίνονται από τις (σχ. 7.4.1.9). Στο (Σχ. 7.4.1.2) βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των κανονικοποιημένων συναρτήσεων $E/E_0 = \sin q/q$ (του πλάτους του ηλ. πεδίου) και της $I/I_0 = \sin^2 q/q^2$ (της έντασης του φωτός) συναρτήσει του q (σε rad). Για $q = 0$ και με τη βοήθεια του κανόνα του L' Hospital: $\lim\limits_{q\to 0}\frac{\sin q}{q} = \lim\limits_{q\to 0}\frac{\cos q}{1} = 1$, το οποίο μας δίνει και το κύριο μέγιστο. Αποδεικνύουμε ότι: α) Ελάχιστα των συναρτήσεων: $\sin q/q$ και $\sin^2 q/q^2$ θα έχουμε για τις τιμές του q για τις οποίες:

$$q = m\pi \quad \text{όπου} \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{7.4.1.10}$$

β) Όσον αφορά τα μέγιστα (κύριο και δευτερεύοντα), μπορούμε να τα υπολογίσουμε κατά τα γνωστά από την γραφική (Σχ. 7.4.1.2β) ή την αριθμητική λύση της εξίσωσης: $\tan q = q$. Από όπου βρίσκουμε: $q_0 = 0$ (πρώτο μέγιστο): $(I/I_0) = 1$ ή $(E/E_o) = 1$. Τα δευτερεύοντα για:



(Σχ. 7.4.1.2)

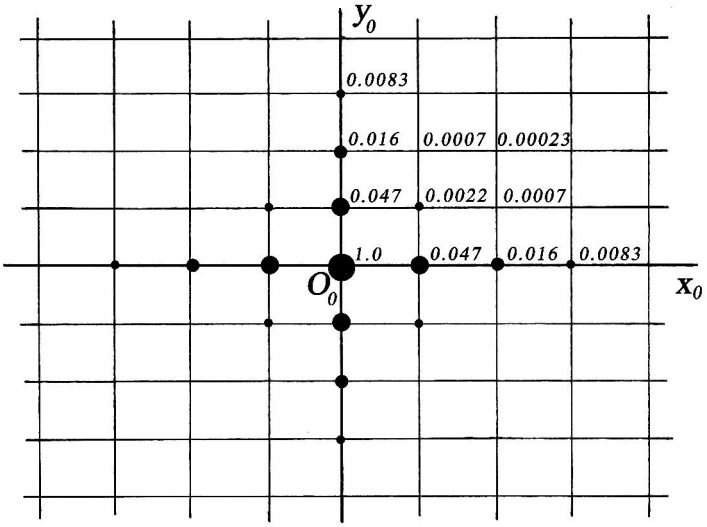
$$q_1 = 1.43\pi, \; q_2 = 2.46\pi, \; q_3 = 3.47\pi, \cdots \tag{7.4.1.11}$$

Τότε οι αντίστοιχες τιμές για τα μέγιστα θα είναι:

$$(I/I_0)_0 = 1, \; (I/I_0)_1 = 0.047, \; (I/I_0)_2 = 0.016, \; (I/I_0)_3 = 0.0083, \cdots \tag{7.4.1.12}$$

Και με το δεδομένο τώρα ότι η I/I_0 για το ορθογώνιο άνοιγμα συνίσταται από το γινόμενο δύο συναρτήσεων $\sin c^2 q$, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε με βάση τις (σχ. 7.4.1.12) τις κανονικοποιημένες τιμές των δευτερευόντων μεγίστων σε συγκεκριμένα σημεία και εκτός των αξόνων O_0x_0 και O_0y_0. Αυτές δεν θα είναι παρά τα γινόμενα των επί μέρους μεγίστων κατά τους O_0x_0 και O_0y_0. Στο (Σχ. 7.4.1.3), ση-

μειώνουμε κατ' αρχή τα κανονικοποιημένα δευτερεύοντα μέγιστα. Βλέπουμε ότι οι αποστάσεις με τιμές μεγίστων ίδιες δεν ισαπέχουν από τη θέση που η ένταση έχει τιμή ίση με τη μονάδα. Και ο λόγος είναι – όπως θ' αποδείξουμε μετά – ότι οι θέσεις αυτές εξαρτώνται από τις διαστάσεις $2X_1 \times 2Y_1$ του περιθλώντος ανοίγματος.

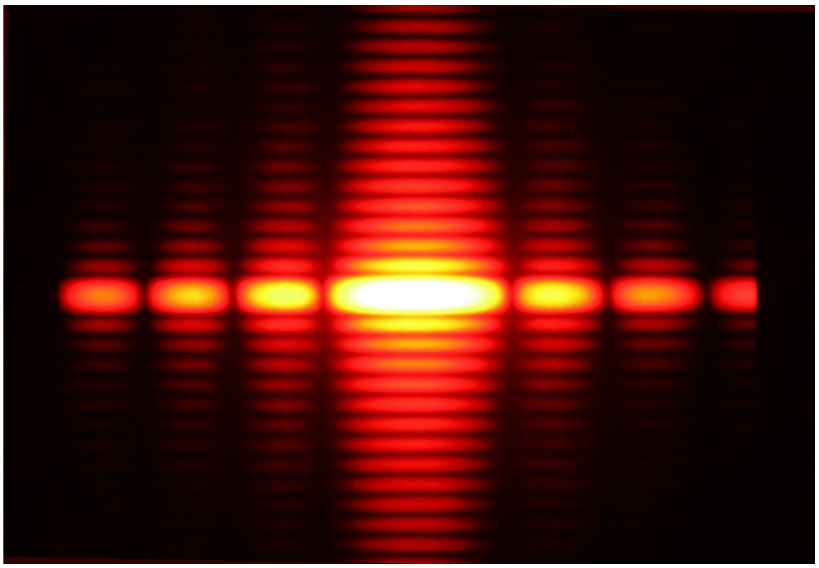


(Σχ. 7.4.1.3)

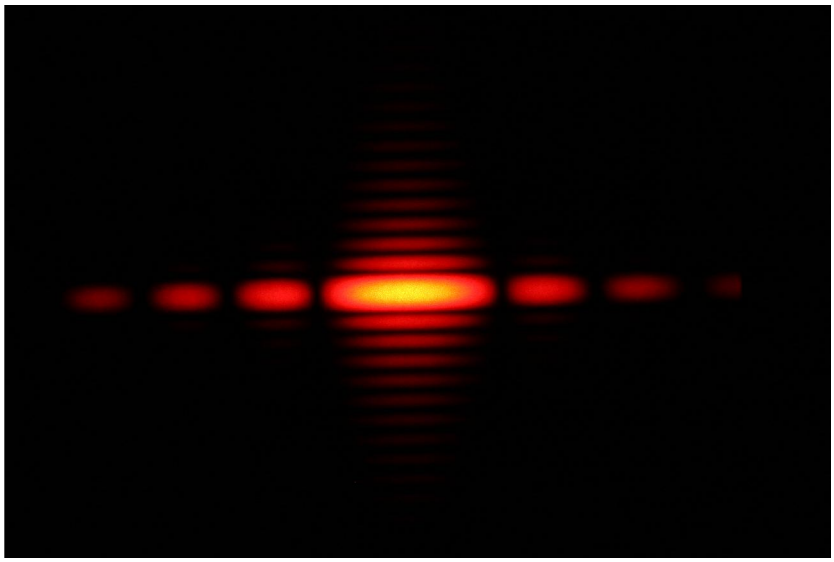
Στην προκειμένη περίπτωση, η μεγαλύτερη διάσταση του περιθλώντος ανοίγματος είναι κατά τη διεύθυνση O_1y_1 (δηλ. $2Y_1 > 2X_1$). Μπορούμε δηλ. κατ' αρχή με λογιστικό τρόπο ν' αντιληφθούμε ότι οι τιμές των δευτερευόντων μεγίστων κατά μήκος των αξόνων, ελαττώνονται με γοργό ρυθμό. Π.χ. η τιμή του τρίτου δευτερεύοντος μεγίστου, είναι σχεδόν το ένα εκατοστό της τιμής αυτής στο κέντρο του προτύπου. Και εκεί που η μείωση είναι εξαιρετικά μεγάλη, είναι στο εσωτερικό των τεταρτημορίων. Π.χ. το δεύτερο δευτερεύον μέγιστο κατά τη διαγώνιο, έχει τιμή ίση με 0.0002 αυτής στο κέντρο.

Το γενικό συμπέρασμα τελικά που προκύπτει, είναι ότι το μέγιστο ποσοστό της περιθλώμενης ενέργειας κατανέμεται περί το κέντρο του προτύπου περίθλασης, όπως μπορούμε να δούμε στην κατά τα άλλα υπερεκτεθειμένη φωτογραφία της (Εικ. 7.4.1.4). Στην οποία ναι μεν διακρίνονται οι δευτερεύουσες κατανομές της έντασης στο εσωτερικό των τεταρτημορίων, αλλά περί το κέντρο υφίσταται πλήρης σύγχυση. Και προκειμένου να δούμε καθαρά τις κατανομές της έντασης του φωτός κατά τους άξονες O_0x_0 και O_0y_0, θα πρέπει να πάρουμε μια σχετικά υποεκτεθειμένη φωτογραφία του προτύπου, όπως αυτή φαίνεται στην (Εικ. 7.4.1.5). Τις κανονικοποιημένες κατανομές του πλάτους του ηλ. πεδίου και της αντίστοιχης έντασης του φωτός στο χώρο για πρότυπο περίθλασης από ορθογώνιο άνοιγμα ίδιων δια-

στάσεων (τετράγωνο) με επεξεργασία μέσω του προγράμματος Mathematica, μπορούμε να δούμε στα διαγράμματα των (Σχ. 7.4.1.6α,β).



(Εικ. 7.4.1.4)

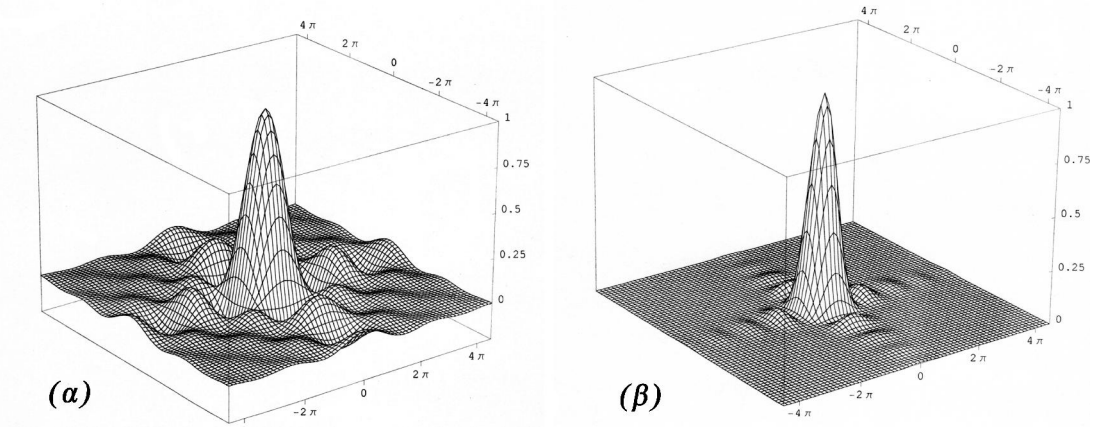


(Εικ. 7.4.1.5)

Παράδειγμα

Με τη βοήθεια της διάταξης του (σχ. 7.3.5), ορθογώνιο άνοιγμα διαστάσεων $2X_1 \times 2Y_1$ φωτίζεται με επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 632.8\text{nm}$ και βρίσκεται στο εμπρός εστιακό επίπεδο x_1, y_1 θετικού φακού εστιακής απόστασης $f = 300\text{mm}$. Το προσπίπτον στο άνοιγμα φως, περιθλάται και στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού παίρνουμε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer της (Εικ. 7.4.1.5) (υποεκτεθειμένης)

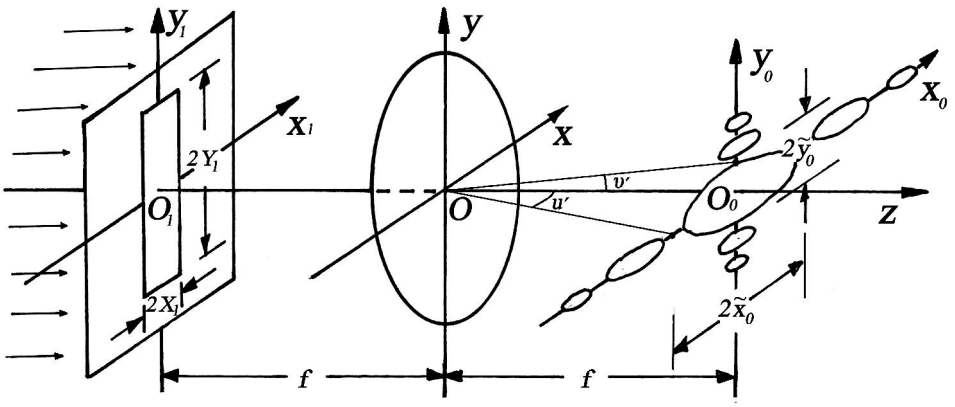
το οποίο φαίνεται και γραφικά στο (Σχ. 7.4.1.7) . Κατόπιν με τη βοήθεια υποδεκάμετρου ακριβείας μετρούμε τις αποστάσεις $2\tilde{x}_0$ και $2\tilde{y}_0$ μεταξύ των πρώτων ελά-



(Σχ. 7.4.1.6)

χιστων κατά μήκος των αξόνων x_0 και y_0. Οι μετρήσεις μας δίνουν: $2\tilde{x}_0 = 7.58\text{mm}$ και $2\tilde{y}_0 = 3.78\text{mm}$.

α) Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις $2X_1, 2Y_1$ του περιθλώντος ορθογωνίου ανοίγματος με τη βοήθεια των προαναφερόμενων μετρήσεων.



(Σχ. 7.4.1.7)

β) Να περιγραφεί η μορφολογία του προκύπτοντος προτύπου περίθλασης.

- α) Από τη συνθήκη για το πρώτο ελάχιστο της έντασης του φωτός κατά μήκος του άξονα x_0 θα έχουμε:

$q_{x_0} = ku'X_1 = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\tan u'X_1 = \pi \ (u' \simeq \sin u' \simeq \tan u') \Rightarrow \tan u' = \frac{\lambda}{2X_1}$. Αλλά από το (Σχ. 7.4.1.7) βρίσκουμε: $\tan u' = \frac{\widetilde{x_0}}{f}$. Οπότε: $\frac{\lambda}{2X_1} = \frac{\widetilde{x_0}}{f} \Rightarrow 2X_1 = \frac{\lambda f}{\widetilde{x_0}}$. Και επειδή: $\lambda = 632.8\text{nm}$, $f = 300\text{mm}$ και $\widetilde{x_0} = 3.79\text{mm}$, βρίσκουμε τελικά: $2X_1 \simeq 0.05\text{mm}$.

Επίσης από τη συνθήκη για το πρώτο ελάχιστο της έντασης του φωτός κατά μήκος του άξονα y_0 θα έχουμε:

$q_{y_0} = k\upsilon'Y_1 = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\tan \upsilon'Y_1 = \pi \ (\upsilon' \simeq \sin \upsilon' \simeq \tan \upsilon') \Rightarrow \tan \upsilon' = \frac{\lambda}{2Y_1}$. Αλλά από το (Σχ. 7.4.1.7) βρίσκουμε: $\tan \upsilon' = \frac{\widetilde{y_0}}{f}$. Οπότε: $\frac{\lambda}{2Y_1} = \frac{\widetilde{y_0}}{f} \Rightarrow 2Y_1 = \frac{\lambda f}{\widetilde{y_0}}$. Και επειδή: $\lambda = 632.8\text{nm}$, $f = 300\text{mm}$ και $\widetilde{y_0} = 1.89\text{mm}$, βρίσκουμε τελικά: $2Y_1 \simeq 0.1\text{mm}$.

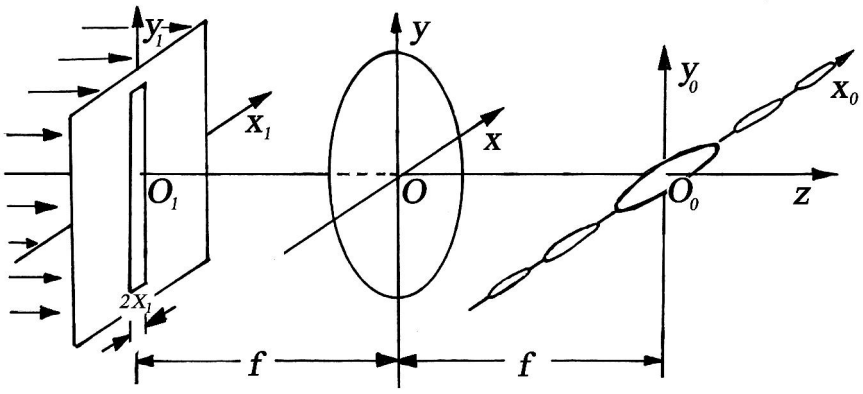
β) Με βάση την αποδεικτική διαδικασία του πρώτου μέρους του παραδείγματος, διαπιστώνουμε σαφώς ότι οι αποστάσεις μεταξύ των ελάχιστων (μηδενικών) της έντασης του φωτός κατά μήκος του άξονα x_0, βρίσκονται σε περισσότερο απομακρυσμένες αποστάσεις, σε σχέση με αυτά κατά μήκος του άξονα y_0. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για όλα τα σημεία του προτύπου περίθλασης. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα – το οποίο συνιστά γενικό κανόνα για την περίθλαση μακρινού πεδίου – ότι: Κατά μήκος της στενότερης περιοχής ενός περιθλώντος ανοίγματος (επίπεδο x_1, y_1),θα έχουμε στο επίπεδο παρατήρησης (επίπεδο x_0, y_0) και στην ίδια διεύθυνση, περισσότερο διευρυμένο το πρότυπο περίθλασης και αντίστροφα (Σχ. 7.4.1.7).

7.4.2 *Περίθλαση Fraunhofer από σχισμή πλάτους* $2X_1$ *και πολύ μεγάλου μήκους*

Το πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε, είναι του υπολογισμού του προτύπου περίθλασης Fraunhofer από μία σχισμή που φωτίζεται από ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πρόβλημα προσομοιάζει με αυτό του ορθογωνίου ανοίγματος που το πλάτος του κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 είναι $2X_1$ αλλά το πλάτος του $2Y_1$ κατά μήκος του y_1, είναι πάρα πολύ μεγάλο σε σύγκριση με αυτό του $2X_1$ (Σχ. 7.4.2.1). Ένας έμμεσος τρόπος επίλυσης του προβλήματος, είναι να χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη της περίθλασης από ορθογώνιο άνοιγμα. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή της περιθλώμενης έντασης του φωτός δίνεται από τη (σχ. 7.4.1.7):

$$\frac{I}{I_0}=\left(\frac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}\right)^2\left(\frac{\sin k\upsilon'Y_1}{k\upsilon'Y_1}\right)^2 \qquad (7.4.2.1)$$

Οπότε θέλουμε εδώ να δούμε πως ακριβώς διαμορφώνεται η σχέση αυτή για $Y_1 \gg X_1$. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε δύο χαρακτηριστικά σημεία κατά τους άξονες x_0 και y_0 για να δούμε τις τιμές των εντάσεων με βάση τις προαναφερόμενες



(Σχ. 7.4.2.1)

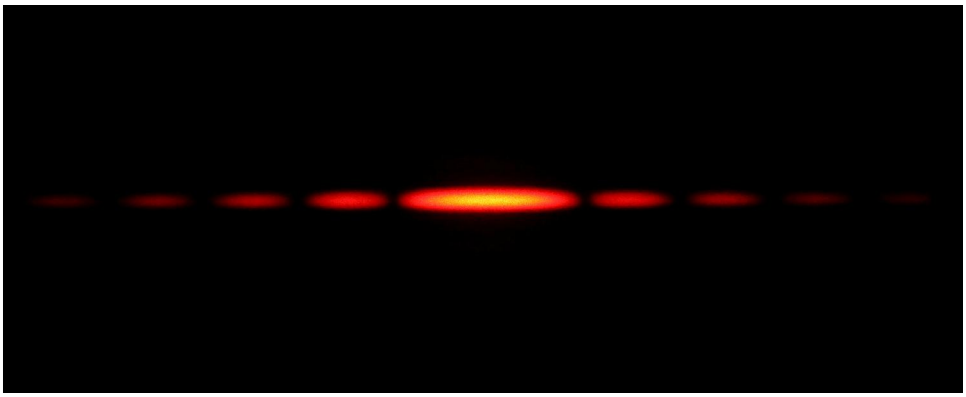
συνθήκες. Και τα επιλεγόμενα σημεία θα είναι οι θέσεις των πρώτων ελάχιστων κατά τους άξονες x_0 και y_0.

Για το πρώτο ελάχιστο κατά τον x_0 θα έχουμε:

$q_{x_0}=ku'X_1=\pi \Rightarrow \frac{2}{\lambda}u'X_1=1 \Rightarrow u'=\frac{\lambda}{2X_1}$. Επίσης για το πρώτο ελάχιστο κατά τον y_0 βρίσκουμε: $q_{y_0}=k\upsilon'Y_1=\pi \Rightarrow \frac{2}{\lambda}\upsilon'Y_1=1 \Rightarrow \upsilon'=\frac{\lambda}{2Y_1}$. Επειδή όμως για τη σχισμή ισχύει: $Y_1 \gg X_1$, από τις προηγούμενες δύο σχέσεις συνεπάγεται ότι: $\upsilon' \ll u'$. Και επειδή: $\upsilon' \simeq \tan\phi \cong \phi$ και $u' \simeq \tan\theta \simeq \theta$ θα έχουμε: $\phi_{\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ y_0} \ll \theta_{\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ x_0}$. Όπου ϕ,θ οι γωνίες με τις οποίες φαίνονται τα ελάχιστα κατά τους άξονες x_0 και y_0 γεγονός που ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο σημείο του προτύπου περίθλασης. Και το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει, είναι ότι οι κατανομές της έντασης του φωτός κατά τον y_0 συμπτύσσονται προς τον x_0. Άρα κατά τον άξονα y_0 (εννοείται ένθεν και ένθεν αυτού) δεν υφίσταται περιθλώμενη ενέργεια. Η τελευταία κατανέμεται περί το άξονα x_0. Επίσης για $\upsilon' \ll$ δηλ. για $\upsilon' \to 0 \Rightarrow \left(\sin q_{y_0}/q_{y_0}\right) \to 1$. Επομένως η κανονικοποιημένη τιμή της έντασης του φωτός, του περιθλώμενου από τη σχισμή μεγάλου μήκους και πλάτους $2X_1$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin ku'X_1}{ku'X_1} \right)^2 \qquad (7.4.2.2)$$

Για τη σχέση αυτή που είναι της μορφής: $(\sin q/q)^2 \equiv \sin c^2(q)$, έγινε εκτεταμένη μελέτη των ιδιοτήτων της στην προηγούμενη παράγραφο, όπως π.χ. όσον αφορά τη θέση εμφάνισης των ελαχίστων και των μεγίστων. Μορφολογικά λοιπόν το πρότυπο περίθλασης από μια σχισμή θα είναι το τμήμα του προτύπου κατά τον άξονα x_0, που μας δίνει ένα ορθογώνιο άνοιγμα. Οπότε τελικά για την περίπτωση που (όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.4.2.1)) η σχισμή φωτίζεται από επίπεδο μετ. κύματος, το πρότυπο περίθλασης θα είναι της μορφής που μας δίνει η (Εικ. 7.4.2.2). Δηλ. βλέπουμε



(Εικ. 7.4.2.2)

τη μονοδιάστατη κατανομή της έντασης του περιθλώμενου φωτός (περίθλαση Fraunhofer), από σχισμή ορισμένου πλάτους και μεγάλου μήκους.

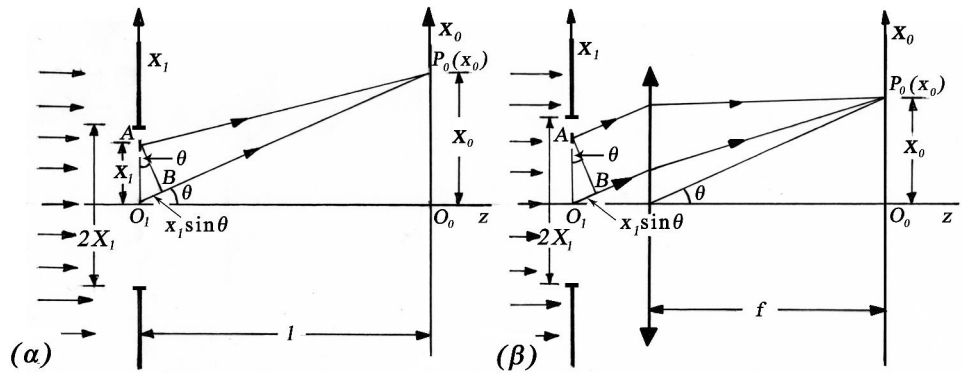
Παράδειγμα

Ν' αποδειχθεί με βάση την αρχή των Huygens-Fresnel εφαρμοσμένη κατά τη διεύθυνση του πλάτους $2X_1$ (άξονας x_1) μιας σχισμής μεγάλου μήκους, ότι το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου (χωρίς τη χρησιμοποίηση φακού), δίνεται από τη (σχ. 7.4.2.2). Ο φωτισμός της σχισμής γίνεται με επίπεδο μετ. κύματος (που προέρχεται από σημειακή πηγή) και διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα z.

- Θεωρούμε σε τομή τη σχισμή πλάτους $2X_1$ όπως αυτή του (Σχ. 7.4.2.3α) κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1, του οποίου την αρχή O_1 (του σ.σ. x_1, z) παίρνουμε στο κέντρο της. Σε πολύ μεγάλη απόσταση l από αυτήν, βρίσκεται το πέτασμα παρατήρησης στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την κατανομή του περιθλώμενου πεδίου. Κατ' αρχή το πλάτος E/E_0 του ηλ. πεδίου και κατόπιν την κατανομή

της έντασης του φωτός I/I_0. Ο άξονας O_1O_0 είναι αυτός του z, όπου O_0 το κέντρο του σ.σ. στο πέτασμα παρατήρησης.

Θεωρούμε ότι στη θέση O_1 (σαν αναφορά) (Σχ. 7.4.2.3α) βρίσκεται ένας στοιχειώδης σκεδαστής ο οποίος κατά Huygens εκπέμπει ένα σφαιρικό κυματίδιο.



(Σχ. 7.4.2.3)

Επιλέγουμε κατόπιν ένα πανομοιότυπο σκεδαστή, να εκπέμπει από τη θέση A, που βρίσκεται σε απόσταση x_1 (κατά τον άξονα O_1x_1). Οι διαταραχές τους εκπεμπόμενες, θα έρχονται σε επαλληλία στο σημείο $P_0(x_0)$ του πετάσματος παρατήρησης. Αλλά για την περίπτωση αυτή ο σκεδαστής από τη θέση A θα συμβάλλει εκεί με μια διαφορά φάσης Δ σε σχέση με αυτόν που εκπέμπει από τη θέση O_1. Το γεγονός θα οφείλεται στη διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο διαταραχών. Και επειδή το πέτασμα παρατήρησης για την προσέγγιση μακρινού πεδίου απέχει πάρα πολύ από τη σχισμή, οι διαδρομές τους θα θεωρούνται παράλληλες οπότε:
$\Delta = k\left[O_1P_0 - AP_0\right] = k\left(O_1B\right) \simeq kx_1\sin\theta$. Και επειδή $\sin\theta \simeq \tan\theta = x_0/l$ θα έχουμε τελικά: $\Delta = kx_1\left(x_0/l\right)$. Και αν στη γενικότερη περίπτωση θεωρήσουμε την επαλληλία όλων των διαταραχών στο σημείο $P_0(x_0)$, που οφείλεται σ' όλους τους εκπέμποντες σκεδαστές που κατανέμονται σ' όλο το εύρος της σχισμής (από $-X_1$ έως X_1), τότε το ηλ. πεδίο στο σημείο αυτό θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E/E_0 = \int_{-X_1}^{X_1} e^{i\frac{kx_0x_1}{l}}\,dx_1 = \int_{-X_1}^{X_1} e^{iku'x_1}\,dx_1 \qquad (7.4.2.3)$$

με την προϋπόθεση ότι οι όροι των σταθερών πλατών και φάσεων ενσωματώνονται στον παράγοντα κανονικοποίησης E_0. Όμως η μορφή αυτού του ολοκληρώματος είναι πανομοιότυπη με έκαστο των δύο διαχωρίσιμων ολοκληρωμάτων της (σχ.

7.4.1.3) που αφορούσε το ορθογώνιο άνοιγμα. Και του οποίου ο υπολογισμός μας οδηγεί στη σχέση:

$$E/E_0 = \frac{\sin ku'X_1}{ku'X_1} \qquad (7.4.2.4)$$

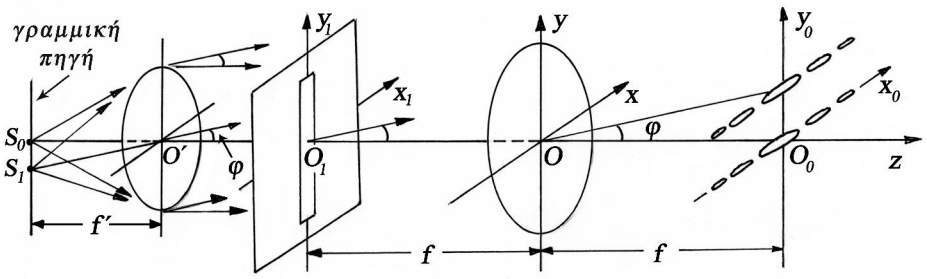
για το πλάτος του ηλ. πεδίου, όπως είδαμε αναλυτικά στην προηγούμενη παράγραφο. Επομένως με βάση τη (σχ. 7.4.2.4), η κατανομή της κανονικοποιημένης έντασης του φωτός για σχισμή πλάτους $2X_1$ και μεγάλου μήκους θα δίνεται από τη σχέση:

$$I/I_0 = \frac{\sin^2 ku'X_1}{\left(ku'X_1\right)^2} \qquad (7.4.2.5)$$

Η γραφική παράσταση των (σχ. 7.4.2.4,5) δίνεται στο (Σχ. 7.4.1.2).

Περίθλαση Fraunhofer από σχισμή, όταν αυτή φωτίζεται με παράλληλο μετ. κύματος, που προέρχεται από πηγή γραμμικών διαστάσεων

Στην προηγούμενη ανάλυσή μας – για την περίθλαση από μια σχισμή – το προσπίπτον σ' αυτήν μετ. κύματος προερχόταν από μια σημειακή πηγή η οποία βρισκόταν στο εμπρός εστιακό επίπεδο φακού εστιακής απόστασης f' (Σχ. 7.3.5). Στα επόμενα, θεωρούμε ότι ο φωτισμός της γίνεται από μια γραμμικών διαστάσεων πηγή φωτός η οποία είναι παράλληλη κατά μήκος της σχισμής, όπως ακριβώς φαίνεται και στο (Σχ. 7.4.2.4). Γνωρίζουμε βέβαια (Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (ΠΑΡ/

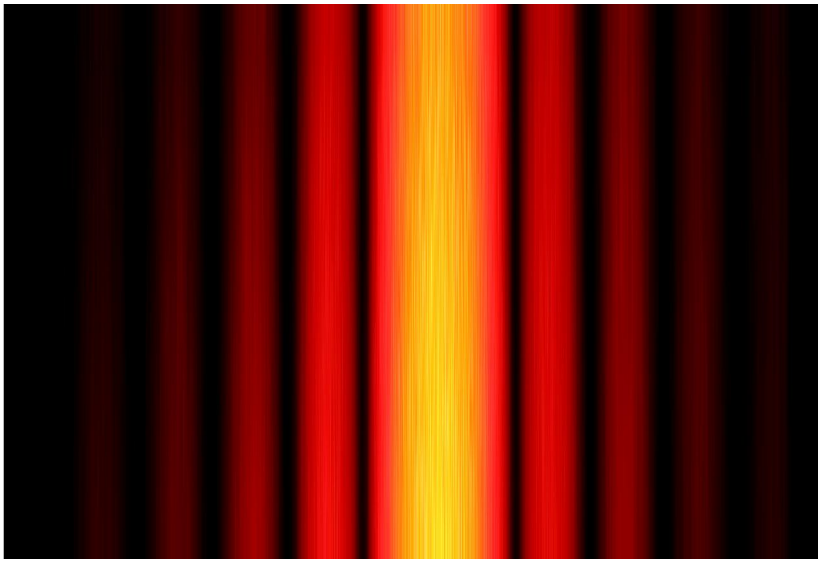


(Σχ. 7.4.2.4)

/ΜΑ 3)), ότι δέσμες φωτός που προέρχονται από διαφορετικά τμήματα μιας πηγής είναι μεταξύ τους ασύμφωνες. Θεωρούμε λοιπόν ότι από το σημείο S_0 της γραμμικής πηγής, που βρίσκεται πάνω στον άξονα z εκπέμπεται ένα σφαιρικό μετ. κύμα-

τος και ότι η γραμμική πηγή βρίσκεται πάνω στο εστιακό επίπεδο ενός φακού στο O' με εστιακή απόσταση f'. Τότε από το φακό αυτό θα εκκινεί ένα επίπεδο μετ. κύματος, με το οποίο φωτίζεται η σχισμή, προκειμένου να μας δώσει το γνωστό πρότυπο περίθλασης.

Έστω τώρα ότι ο φακός στο O' φωτίζεται με ένα σφαιρικό μετ. κύματος το οποίο εκκινεί από τη σημειακή πηγή S_1 που βρίσκεται εκτός του άξονα $O'z$. Τότε από το φακό θα προκύψει και πάλι ένα παράλληλο μετ. κύματος, το οποίο όμως θα προσπίπτει στη σχισμή με ορισμένη γωνία ϕ. Αποδεικνύεται τότε (βλ. Άσκ. 3: Λυμένη) ότι στην ίδια γωνία ϕ, από τον μετασχηματιστή φακό που βρίσκεται στη θέση O, στο επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0 θα σχηματιστεί και πάλι ένα γραμμικών διαστάσεων πρότυπο περίθλασης το οποίο θα είναι πανομοιότυπο με το προηγούμενο. Υποθέτουμε τώρα ότι η σχισμή φωτίζεται από ολόκληρη τη γραμμική πηγή. Τότε το σχηματιζόμενο πρότυπο περίθλασης στο επίπεδο παρατήρησης, θα παρουσιάζει μια συνεχή κατανομή, που θα είναι η συνεχής παράλληλη παράθεση ασύμφωνων μεταξύ τους προτύπων περίθλασης από μια σχισμή (Εικ. 7.4.2.5). Θα πρέπει

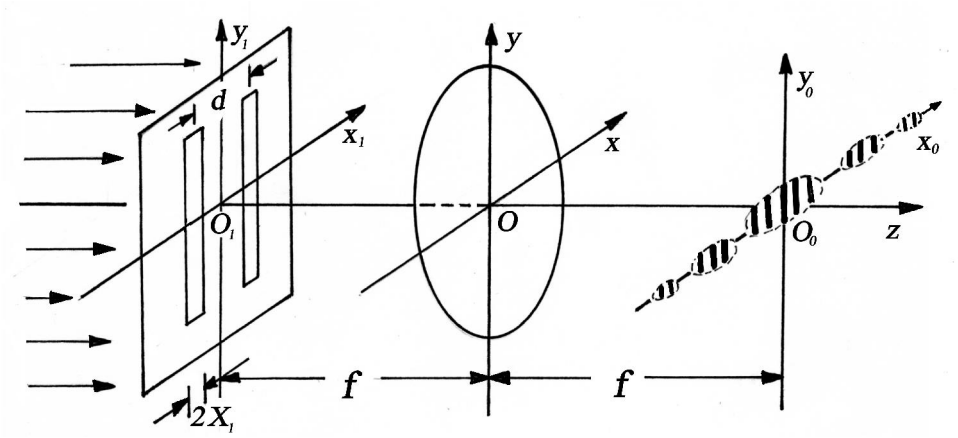


(Εικ. 7.4.2.5)

τέλος ν' αναφέρουμε, ότι γραμμική πηγή μπορούμε να δημιουργήσουμε, αν μια σχισμή πολύ μικρού πλάτους φωτιστεί μέσω συμπυκνωτή φακού (ή έλθει σε επαφή) με μια εκτεταμένη ομογενή κατά το δυνατόν πηγή φωτός.

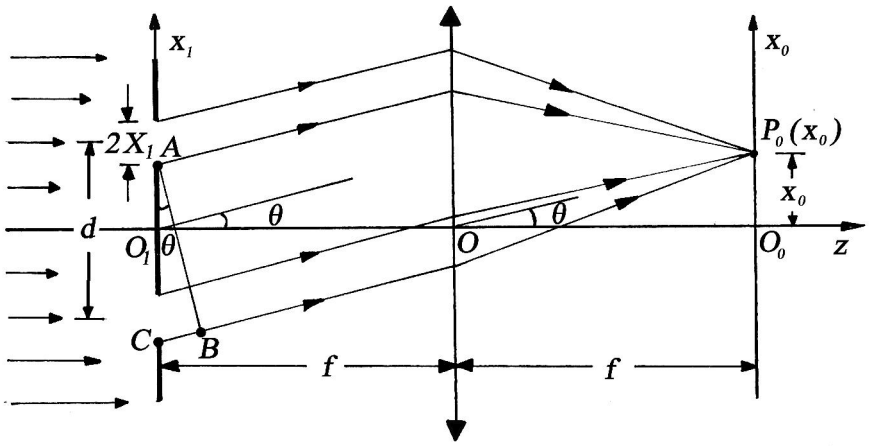
7.4.3 *Περίθλαση Fraunhofer από δύο σχισμές πλάτους $2X_1$ η κάθε μια, των οποίων τα κέντρα απέχουν μεταξύ τους απόσταση d*

Στο (Σχ. 7.4.3.1) σχεδιάζεται η διάταξη στην οποία μπορούμε να δούμε τις δύο σχισμές (κατά μήκος του άξονα O_1y_1) πλάτους η κάθε μία $2X_1$ (κατά μήκος του άξονα O_1x_1) που τα κέντρα τους απέχουν απόσταση ίση με d. Το σύστημα αυ-



(Σχ. 7.4.3.1)

τό των περιθλώντων ανοιγμάτων φωτίζεται με επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος που προέρχεται από σημειακή πηγή. Θέλουμε να υπολογίσουμε κατ' αρχή την κατανομή του πλάτους του ηλ. πεδίου $E(x_0, y_0)$ στο επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0 και κατά προέκταση την κατανομή της έντασης $I(x_0, y_0)$ του φωτός. Και για να βοηθηθούμε, θα πάρουμε μια τομή του προηγουμένου σχήματος στο επίπεδο x_1, z όπως αυτό φαίνεται στο (Σχ. 7.4.3.2).



(Σχ. 7.4.3.2)

Στην παραξονική προσέγγιση, σε συνθήκες μακρινού πεδίου, τα περιθλώμενα πεδία από τις δύο σχισμές, διαδιδόμενα ευθύγραμμα προς τη συγκεκριμένη εξε-

ταζόμενη διεύθυνση (λόγω της μεγάλης απόστασης του επιπέδου παρατήρησης , ή λόγω της ύπαρξης του φακού, στο εστιακό του επίπεδο), έρχονται σε επαλληλία στο σημείο $P_0(x_0)$. Όμως μεταξύ τους θα συμβάλλουν με μια διαφορά φάσης, επειδή διανύουν διαφορετικούς οπτικούς δρόμους, μέχρι την άφιξή τους στο $P_0(x_0)$. Η διαφορά φάσης για δύο διαδοχικά αντίστοιχα σημεία των ανοιγμάτων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d (εμείς επιλέγουμε τα σημεία A και το αντίστοιχό του C) θα είναι: $\Delta = k(CB) \simeq kd\sin\theta (\simeq kd\tan\theta)$. Επομένως η συνολική ένταση του ηλ. πεδίου στο σημείο $P_0(x_0)$ του επιπέδου παρατήρησης θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(x_0, y_0) = E_{P_0} + E_{P_0} e^{i\Delta} = E_{P_0}\left(1 + e^{i\Delta}\right) \qquad (7.4.3.1)$$

όπου $E_{P_0} = (E/E_0) = \dfrac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}$ (σχ. 7.4.2.4) με $u' = x_0/f$ και $\Delta = kd\sin\theta \simeq kd\tan\theta$.

Επίσης η κατανομή της αντίστοιχης έντασης του φωτός ($I = E \cdot E^*$) θα είναι:

$$I(x_0, y_0) = E_{P_0}^2\left(1 + e^{i\Delta}\right)\left(1 + e^{-i\Delta}\right) = 4E_{P_0}^2 \cos^2\frac{\Delta}{2}$$

$$I(x_0, y_0) = \frac{\sin^2 ku'X_1}{\left(ku'X_1\right)^2}\cos^2\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \qquad (7.4.3.2)$$

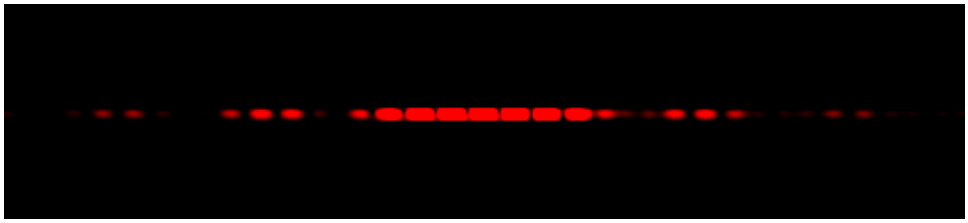
Βλέπουμε τελικά ότι η δομή του προτύπου περίθλασης από δύο σχισμές παραμένει το ίδιο (όπως αυτό από μια σχισμή), μόνο που τώρα είναι πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα $\cos^2(\pi d\sin\theta/\lambda)$. Ο τελευταίος δεν αντιπροσωπεύει παρά ένα τυπικό πρότυπο συμβολής (κροσσούς συμβολής ορισμένης περιόδου) (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (§ 6.4.1) (σχ. 6.4.1.22)). Όπου τώρα θα έχουμε: $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq x_0/f$. Δηλ. μορφολογικά το πρότυπο περίθλασης, θα διαμορφώνεται από κροσσούς συμβολής ορισμένης όπως είπαμε περιόδου και θα είναι της δομής που μας δείχνει η (Εικ. 7.4.3.3).

Γνωρίζουμε βέβαια ότι οι θέσεις των μεγίστων για τους κροσσούς συμβολής συναντώνται όταν ισχύει η σχέση:

$$\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \qquad (7.4.3.3)$$

και επειδή $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq x_0/f$, οι θέσεις αυτές (κατά μήκος του άξονα O_0x_0), θα είναι εκεί όπου:

$$x_0 = \frac{m\lambda f}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots \tag{7.4.3.4}$$

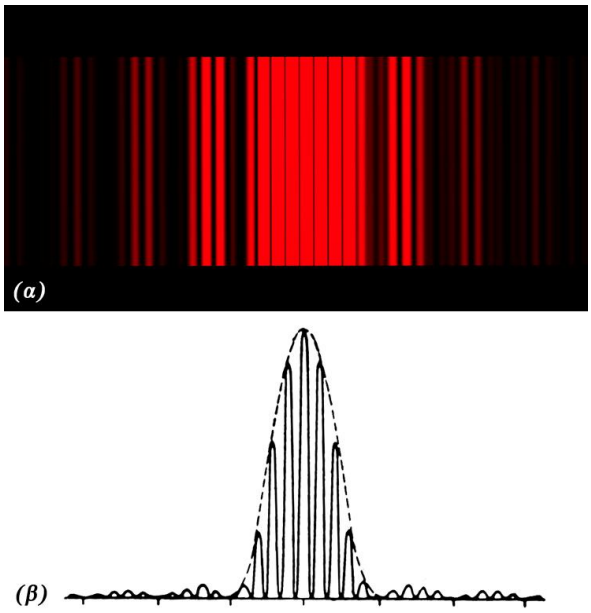


(Εικ. 7.4.3.3)

Από την τελευταία προκύπτει και η περίοδός τους, που δίνεται από τη σχέση: $T = \lambda f / d$.

Παράδειγμα

Με τη βοήθεια της διάταξης του (Σχ. 7.4.3.1), παίρνουμε το πρότυπο περίθλασης από δύο σχισμές η κάθε μια πλάτους $2X_1$, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d . Το περιθλόν άνοιγμα φωτίζεται μέσω φακού από γραμμική πηγή και η κατανομή του προτύπου της έντασης του φωτός φαίνεται στην (Εικ. 7.4.3.4α). Κά-



(Εικ. 7.4.3.4)

θετα προς τους κροσσούς (δηλ. κατά μήκος του άξονα O_0x_0) παίρνουμε το ντενσιτογράφημα (κατανομή της αυξομείωσης της αμαύρωσης των κροσσών), το οποίο φαίνεται στην (Εικ. 7.4.3.4β). Από εκεί βλέπουμε ότι το τάξης $m = 5$ μέγιστο συμ-

βολής, συμπίπτει με το $m' = 1$ ελάχιστο περίθλασης. Επομένως στον κεντρικό λοβό περίθλασης περιλαμβάνονται σαφώς $N = 9$ κροσσοί συμβολής. Ζητείται να αποδειχθεί για την περίπτωση αυτή ότι: $(d/2X_1) = 5$.

- Προκειμένου ο κεντρικός λοβός περίθλασης να περιλαμβάνει εννέα τον αριθμό ευδιάκριτους κροσσούς συμβολής, θα πρέπει το τάξης $m = 5$ μέγιστο συμβολής να 'εξαφανίζεται' (να μηδενίζεται) από το $m' = 1$ μηδενικό ελάχιστο της περίθλασης. Που σημαίνει:

α) Συνθήκη για το $m' = 1$ μηδενικό ελάχιστο της περίθλασης: $ku'X_1 = \pi \Rightarrow$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\tan\theta X_1 = \pi \Rightarrow \tan\theta \simeq \theta = \frac{\lambda}{2X_1} \quad (1)$$

β) Συνθήκη για το $m = 5$ μέγιστο συμβολής:

$$\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \simeq \frac{\pi d \tan\theta}{\lambda} = 5\pi \Rightarrow \tan\theta \simeq \theta = \frac{5\lambda}{d} \quad (2)$$

(Οι γωνίες θ είναι ίδιες, επειδή αναφερόμαστε για το ίδιο σημείο του προτύπου της έντασης). Επομένως από τις (σχ. 1,2) θα έχουμε: $\frac{\lambda}{2X_1} = \frac{5\lambda}{d} \Rightarrow \frac{d}{2X_1} = 5$.

Σημείωση

Η τάξη $m = 5$ του κροσσού συμβολής που καταστέλλεται στη θέση που έχουμε μηδενικό ελάχιστο περίθλασης, ονομάζεται ***εξαφανιζόμενη τάξη (missing order)***.

7.5 *Περίθλαση Fraunhofer από κυκλικά ανοίγματα*

7.5.1 *Περίθλαση Fraunhofer από ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου $D = 2R$*

Περίθλαση Fraunhofer έχουμε τη δυνατότητα να λάβουμε από οποιοδήποτε άνοιγμα και ήδη έχουμε μελετήσει από αυτά, το ορθογώνιο και τη σχισμή. Ιδιαίτερο όμως ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίθλαση από κυκλικά ανοίγματα. Και ο λόγος είναι ο εξής: Για τα περισσότερα από τα οπτικά όργανα όπως: Τα τηλεσκόπια, τα μικροσκόπια κ.λ.π. η μορφολογία των εξαρτημάτων τους: Φακοί, διαφράγματα, φίλτρα κ.ά. έχουν κυκλική συμμετρία. Το φως όμως που διαδίδεται διά μέσου τους, περιθλάται διά μέσω των ορίων τους. Οπότε η κατανομές της έντασης στα επίπεδα απεικόνισης ή στα εστιακά επίπεδα των συστημάτων - όπως θα δούμε στα επόμενα - θα καθορίζονται όχι μόνο από τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής αλλά και από τη φυσική οπτική (Κυματική Οπτική). δηλ. από την περίθλαση του φωτός. Και ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η πρόσπτωση σ' ένα φακό ενός επιπέδου μετ. κύματος. Για την περίπτωση αυτή, με βάση τις απόψεις της γεωμετρικής οπτικής, το φως θα εστιαστεί από το φακό (που τον θεωρούμε χωρίς σφάλματα) σ' ένα συγκεκριμένο σημείο. Η φυσική οπτική όμως έρχεται ν' αποδείξει ότι το 'σημείο' αυτό έχει συγκεκριμένη δομή, δηλ. μια συγκεκριμένη κατανομή έντασης που εμφανίζει μάλιστα μέγιστα και ελάχιστα. Και το γεγονός έχει ιδιαίτερη σημασία επειδή αφορά - όπως θα δούμε στα επόμενα - τη διακριτική ικανότητα των διαφόρων οργάνων. Δηλ. για το αν π.χ. μπορούμε να διακρίνουμε μέσω ενός τηλεσκοπίου αν ένας αστέρας είναι απλός ή διπλός ή αν μέσω ενός μικροσκοπίου μπορούμε να διακρίνουμε σαν ξεχωριστά δύο πολύ κοντινά σημεία ενός προς παρατήρηση δείγματος.

Αντικειμενικός μας λοιπόν σκοπός στα επόμενα θα είναι ο αναλυτικός υπολογισμός της κατανομής κατ' αρχή του ηλ. πεδίου και κατά προέκταση της έντασης του φωτός κατά την περίθλαση Fraunhofer ενός προσπίπτοντος επίπεδου μετ. κύματος σ' ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου $D = 2R$. Η λήψη του προτύπου περίθλασης - κατά τα γνωστά - θα γίνει σε πολύ μεγάλη απόσταση από το κυκλικό περιθλόν άνοιγμα (συνθήκες μακρινού πεδίου) ή για το ίδιο αποτέλεσμα με φακό, στο εστιακό του επίπεδο όπως ακριβώς φαίνεται στο (Σχ. 7.5.1.1).

Κατά τα γνωστά η κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου θα δίνεται από τη (σχ. 7.3.9):

$$E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1)\, e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 x_1 + y_0 y_1)}\, dx_1 dy_1 \qquad (7.5.1.1)$$

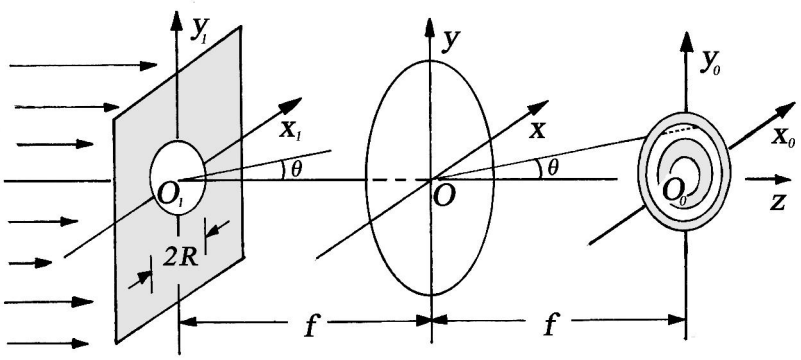
με τη συνάρτηση διαφάνειας $t(x_1, y_1)$ να έχει στο εσωτερικό του κυκλικού ανοίγματος τιμή μονάδα και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Δηλ.

$$t(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & \text{όπου } 0 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \le R \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{7.5.1.2}$$

Οπότε η (σχ. 7.5.1.1) παίρνει τη μορφή:

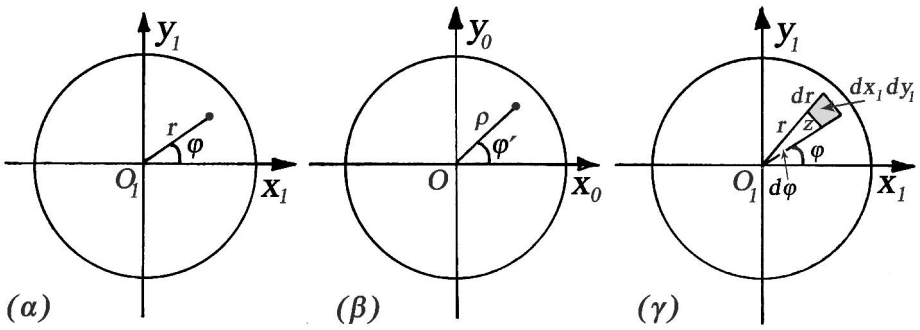
$$E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(u'x_1 + \upsilon' y_1)} dx_1 dy_1 \tag{7.5.1.3}$$

όπου: $u' = x_0 / f$, $\upsilon' = y_0 / f$ τα συνημίτονα κατεύθυνσης.



(Σχ. 7.5.1.1)

Στη συνέχεια λόγω της κυκλικής συμμετρίας του ανοίγματος, χρησιμοποιούμε για τα επίπεδα x_1, y_1 (περιθλόν άνοιγμα) και x_0, y_0 (επίπεδο παρατήρησης) μετασχηματισμούς πολικών συντεταγμένων όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.5.1.2α,β). Δηλ.



(Σχ. 7.5.1.2)

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = r\cos\phi & y_1 = r\sin\phi \\ x_0 = \rho\cos\phi' & y_0 = \rho\sin\phi' \end{array}\right\} \tag{7.5.1.4}$$

Οπότε με τη βοήθεια των (σχ. 7.5.1.4) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{x_0}{f} = \frac{\rho\cos\phi'}{f} \simeq \theta\cos\phi' \\ \upsilon' &= \frac{y_0}{f} = \frac{\rho\sin\phi'}{f} \simeq \theta\sin\phi' \end{aligned}\right\} \qquad (7.5.1.5)$$

όπου $\theta \simeq \tan\theta = \rho/f$ είναι η γνωστή γωνία με το όνομα: ***γωνία περίθλασης (diffraction angle)***. Είναι αυτή με την οποία 'φαίνεται' ένα οποιοδήποτε σημείο $P_0(x_0, y_0)$ του επιπέδου παρατήρησης από το κέντρο του μετασχηματιστή φακού O. Επίσης για το στοιχειώδες εμβαδόν dx_1dy_1 (Σχ. 7.5.1.2γ) θα έχουμε:
$dx_1dy_1 = zdr = rd\phi dr = rdrd\phi$. Οπότε:
$ik(u'x_1 + \upsilon' y_1) = ik(\theta\cos\phi' \cdot r\cos\phi + \theta\sin\phi' \cdot r\sin\phi) =$
$= ikr\theta(\cos\phi'\cos\phi + \sin\phi'\sin\phi) = ikr\theta\cos(\phi - \phi') = ikr\theta\cos\phi$, (το τελευταίο με τροποποίηση της αρχής των αζιμουθίων). Τότε το ολοκλήρωμα της (σχ. 7.5.1.3) θα πάρει τη μορφή:

$$E(x_0, y_0) = E(\theta) = \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{ikr\theta\cos\phi} rdrd\phi = \frac{1}{(k\theta)^2}\int_0^{kr\theta}\int_0^{2\pi} e^{ikr\theta\cos\phi}(kr\theta)d(kr\theta)d\phi$$ και για:

$r \to R, \quad kr\theta \to kR\theta, \quad \xi = kr\theta$ θα έχουμε:

$$E(x_0, y_0) = E(\theta) = \frac{1}{(k\theta)^2}\int_0^{kR\theta}\int_0^{2\pi} e^{i\xi\cos\phi}\xi d\xi d\phi = \frac{1}{(k\theta)^2}\int_0^{kR\theta}\xi d\xi\int_0^{2\pi} e^{i\xi\cos\phi}d\phi$$. Αλλά:

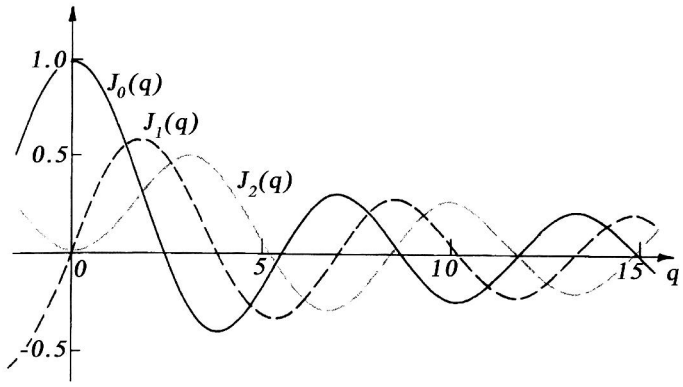
$$\int_0^{2\pi} e^{i\xi\cos\phi}d\phi = 2\pi J_0(\xi) \qquad (7.5.1.6)$$

όπου $J_0(\xi)$ είναι η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης, της οποίας η γραφική παράσταση συναρτήσει του ξ φαίνεται στο (Σχ. 7.5.1.3). Οπότε:

$$E(\theta) = \frac{1}{(k\theta)^2}\int_0^{kR\theta}\xi d\xi\int_0^{2\pi} e^{i\xi\cos\phi}d\phi = \frac{2\pi}{(k\theta)^2}\int_0^{kR\theta}\xi J_0(\xi)d\xi$$. Αλλά από το λογισμό των συναρτήσεων Bessel έχουμε: $\frac{d}{d\xi}\left[\xi J_1(\xi)\right] = \xi J_0(\xi)$. Άρα:

$E(\theta)=\frac{2\pi}{(k\theta)^2}\int_0^{kR\theta}\frac{d}{d\xi}\left[\xi J_1(\xi)\right]d\xi=\frac{2\pi}{(k\theta)^2}\left[\xi J_1(\xi)\right]\Big|_0^{kR\theta}$. Και με το δεδομένο ότι:

$J_1(0)=0$ θα έχουμε: $E(\theta)=\frac{2\pi(kR\theta)}{(k\theta)^2}J_1(kR\theta)=\frac{\pi R^2}{kR\theta}2J_1(kR\theta)$. Και τελικά:



(Σχ. 7.5.1.3)

$$E(x_0,y_0)=E(\theta)=\pi R^2\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta} \tag{7.5.1.7}$$

Όσον αφορά την κανονικοποιημένη της μορφή, αυτή θα είναι η:

$$\frac{E}{E_0}=\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta} \tag{7.5.1.8}$$

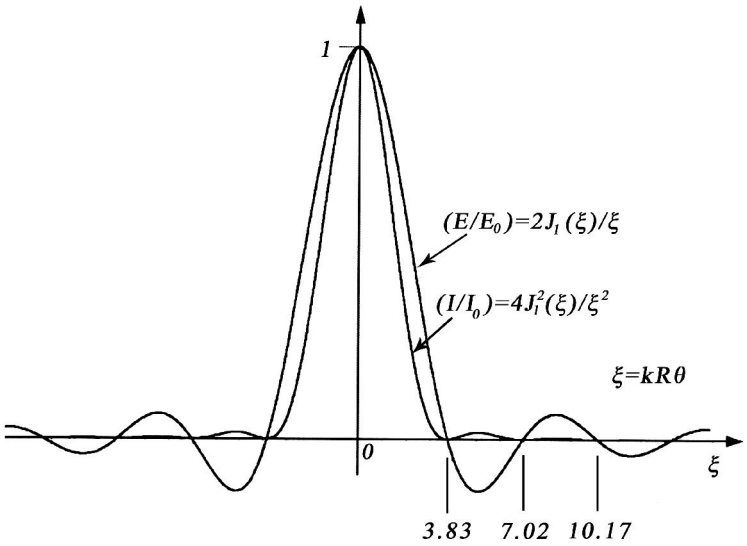
όπου το εμβαδόν του κυκλικού ανοίγματος ενσωματώθηκε στον παράγοντα της κανονικοποίησης E_0. Και η γραφική της παράσταση συναρτήσει του $\xi=kR\theta$ φαίνεται στο (Σχ. 7.5.1.4).

Η κανονικοποιημένη μορφή της έντασης του φωτός θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{I}{I_0}=\left[\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]^2=\left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right]^2 \tag{7.5.1.9}$$

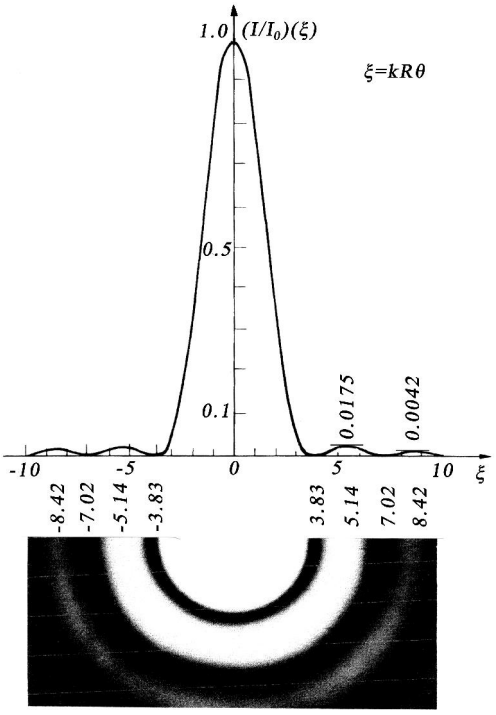
της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο (Σχ. 7.5.1.4) όπως και (Σχ. 7.5.1.5). Η συνάρτηση αυτή είναι κυκλικής συμμετρίας, κατά μήκος μιας οποιασδήποτε διεύ-

θυνσης που περνάει από το κέντρο της. Και μπορούμε να δούμε ότι το μέγιστο ποσοστό της περιθλώμενης ενέργειας, συγκεντρώνεται περί το κέντρο της κατανομής.



(Σχ. 7.5.1.4)

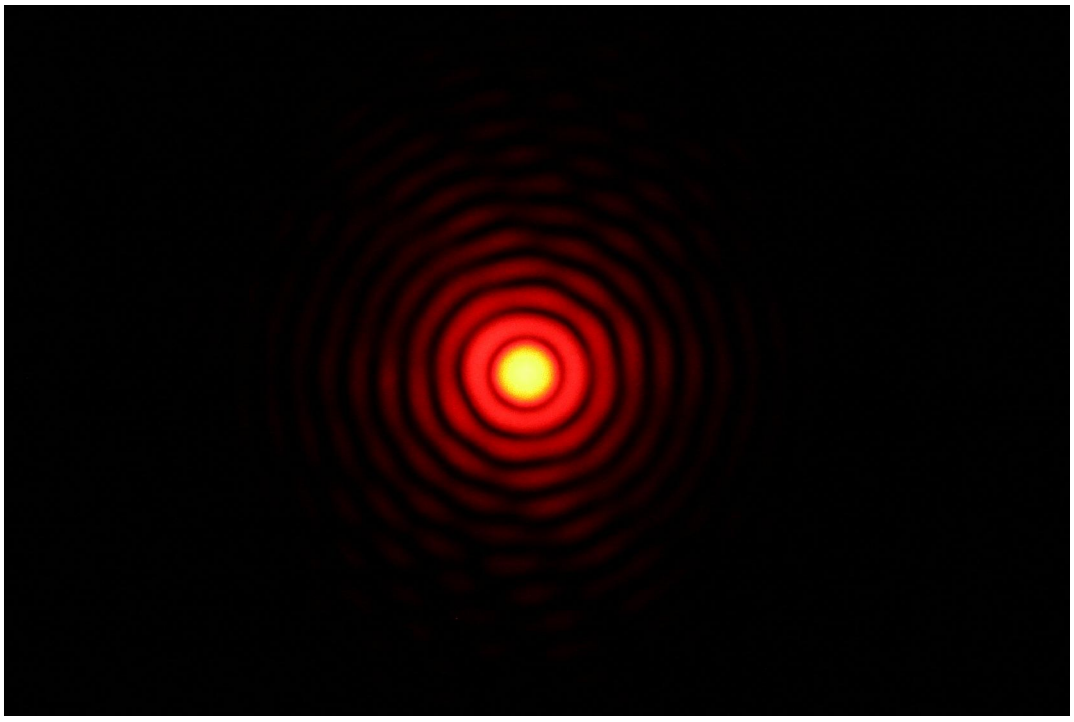
Πράγματι όπως αποδεικνύεται (βλ. Άσκ. 6: Λυμένη), με κανονικοποιημένη τιμή έντασης $(I/I_0)=1$, στο κέντρο της κατανομής $(\theta=0^0)$, η τιμή της έντασης του



(Σχ. 7.5.1.5)

πρώτου δευτερεύοντος μεγίστου είναι: $(I/I_0) = 0.0175$ και του δευτέρου: $(I/I_0) = 0.0042$. Μια άποψη αυτής της κατανομής μπορούμε να δούμε στην κατά τα άλλα υπερεκτεθειμένη φωτογραφία της (Εικ. 7.5.1.6). Στην οποία ναι μεν διακρίνονται οι δευτερεύοντες δακτύλιοι της έντασης του φωτός, αλλά περί το κέντρο υφίσταται πλήρης σύγχυση. Και προκειμένου να δούμε καθαρά την ένταση περί το κέντρο, θα πρέπει να πάρουμε μια σχετικά υποεκτεθειμένη φωτογραφία του προτύπου περίθλασης, όπως αυτή που φαίνεται στην (Εικ. 7.5.1.7). Σ' αυτήν διακρίνουμε ένα κεντρικό φωτεινό δίσκο που ονομάζεται ***δίσκος του Airy (Airy disk)***. Οι σκοτεινοί δακτύλιοι (μηδενικά ελάχιστα), αντιστοιχούν στις θέσεις για τις οποίες $J_1(\xi) = 0$ (βλ. (Σχ. 7.5.1.3)). Και από αυτό, ή πίνακες τιμών $[\xi, J_1(\xi)]$ βρίσκουμε ότι θα έχουμε μηδενικά ελάχιστα όταν:

$$\xi = 3.83,\ 7.02,\ 10.17, \cdots\cdots \qquad (7.5.1.10)$$

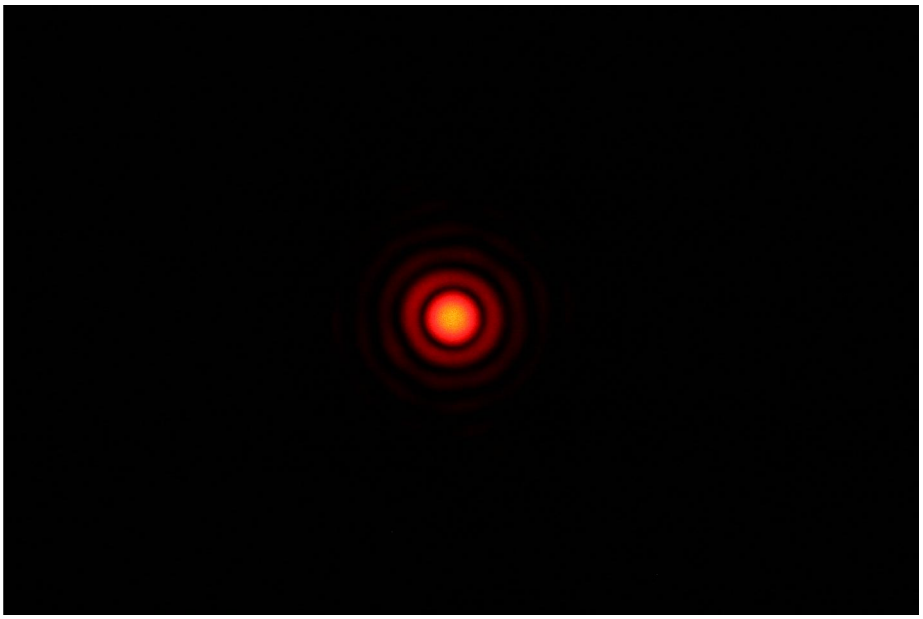


(Εικ. 7.5.1.6)

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις ακτίνες τους στο επίπεδο παρατήρησης. Π.χ. η ακτίνα ρ του δίσκου του Airy (απόσταση από το κέντρο του προτύπου μέχρις το πρώτο μηδενικό ελάχιστο) βρίσκεται όταν: $\xi = kR\theta = 3.83$. Και επειδή $\theta \simeq \tan\theta = \rho/f$ και $k = 2\pi/\lambda$ έχουμε τελικά:

$$\rho = \frac{1.22\lambda f}{2R} \tag{7.5.1.11}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι όσο ελαττώνεται η ακτίνα του κυκλικού ανοίγματος, τόσο αυξάνεται η ακτίνα του δίσκου του Airy (και κατά προέκταση διευρύνεται σαν όλο το πρότυπο περίθλασης), γεγονός που είναι χαρακτηριστικό της περίθλασης Fraunhofer. Και με βάση τη μέτρηση της ακτίνας του δίσκου του Airy στο επίπεδο παρατήρησης (με τα λ, f γνωστά), μπορούμε να υπολογίσουμε την



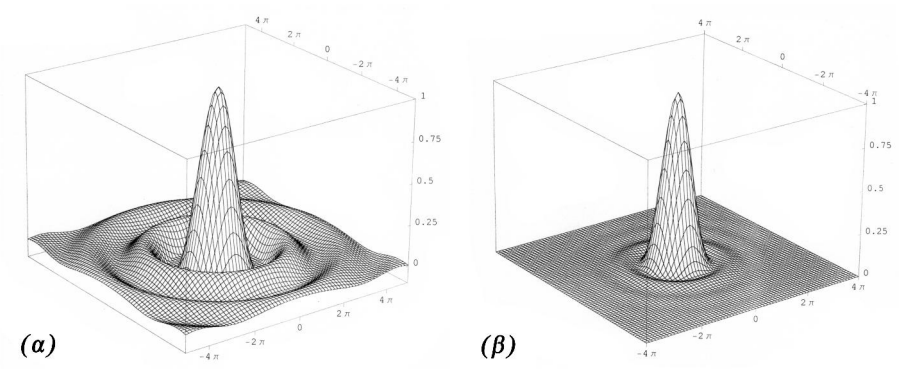
(Εικ. 7.5.1.7)

ακτίνα R του κυκλικού περιθλώντος ανοίγματος. Επίσης από τη (σχ. 7.5.1.11) βρίσκουμε:

$$\frac{\rho}{f} = \tan\theta \simeq \theta = \frac{1.22\lambda}{2R} \tag{7.5.1.12}$$

Πρόκειται για το γωνιακό άνοιγμα από το οποίο φαίνεται η ακτίνα του δίσκου του Airy από το κέντρο του φακού O (Σχ. 7.5.1.1). Ή απουσία του, από το κέντρο του κυκλικού περιθλώντος ανοίγματος, εφόσον το επίπεδο παρατήρησης βρίσκεται πολύ μακριά (συνθήκες μακρινού πεδίου)

Τις κανονικοποιημένες κατανομές του πλάτους του ηλ. πεδίου και της αντίστοιχης έντασης του φωτός στο χώρο, για πρότυπα περίθλασης από κυκλικό άνοιγ μα σε επεξεργασία Mathematica, μπορούμε αντίστοιχα να δούμε στα διαγράμματα των (Σχ. 7.5.1.8α,β).



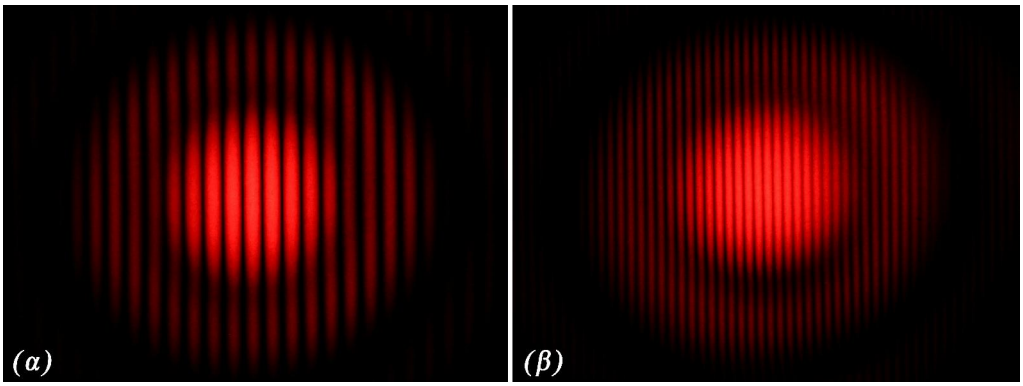
(Σχ. 7.5.1.8)

7.5.2 *Περίθλαση Fraunhofer από δύο κυκλικά ανοίγματα διαμέτρου $D = 2R$ έκαστο, που τα κέντρα τους απέχουν κατά d*

Η λογική της επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι πανομοιότυπη με αυτήν που εφαρμόσαμε στην (§ 7.4.3), για να υπολογίσουμε το πρότυπο περίθλασης από άνοιγμα δύο σχισμών. Οπότε, με δεδομένο ότι η κανονικοποιημένη κατανομή της έντασης από κυκλικό άνοιγμα δίνεται από τη (σχ.7.5.1.9), η κατανομή της έντασης του φωτός από δύο κυκλικά ανοίγματα θα είναι της μορφής:

$$I = \left[\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \qquad (7.5.2.1)$$

όπου $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ η γωνία περίθλασης, με διεύθυνση από το κέντρο O του φακού, προς οποιοδήποτε σημείο του προτύπου. Το τελευταίο μορφολογικά θα είναι αυτό από ένα κυκλικό άνοιγμα, διαμορφωμένο όμως από κροσσούς συμβολής. Πρόκειται γι' αυτό που φαίνεται στις (Εικ. 7.5.2.1α,β).



(Εικ. 7.5.2.1)

Τα μέγιστα συμβολής κατά τα γνωστά, τα παίρνουμε όταν: $\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = m\pi$ όπου $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots$ Που σημαίνει ότι το μηδενικής τάξης μέγιστο συμβολής περνάει από το κέντρο του δίσκου του Airy, όπου και το μέγιστο του προτύπου περίθλασης. Επίσης αντιστρόφως ανάλογη με την απόσταση d μεταξύ των δύο κυκλικών ανοιγμάτων, θα είναι και η περίοδος T των κροσσών συμβολής, με βάση τη γνωστή σχέση: $T = \lambda f / d$. Στις (Εικ. 7.5.2.1α,β) μπορούμε να δούμε κροσσούς με διαφορετική περίοδο, όπου στη δεύτερη εικόνα, η απόσταση d μεταξύ των δύο κυκλικών ανοιγμάτων είναι μεγαλύτερη από ότι για την πρώτη. Και όσον αφορά την διάμετρο των δίσκων του Airy, αυτή είναι ίδια και στις δύο των περιπτώσεων. Που σημαίνει ότι η ακτίνα των κυκλικών ανοιγμάτων δεν έχει μεταβληθεί. Είναι τελικά αυτονόητο ότι: Από μετρήσεις της διαμέτρου του δίσκου του Airy και της περιόδου των κροσσών συμβολής από ένα από τα προαναφερόμενα πρότυπα, μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία R, d του περιθλώντος ανοίγματος εφόσον είναι γνωστά τα λ, f.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer, το οποίο προκύπτει από την περίθλαση επιπέδου μονοχρωματικού μετ. κύματος μ.κ. λ, από διάφραγμα που περιλαμβάνει τρία κυκλικά ανοίγματα της ίδιας ακτίνας R που βρίσκονται σε μια ευθεία και που η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους είναι d.

- Γνωρίζουμε ότι η κανονικοποιημένη τιμή της έντασης του ηλ. πεδίου για την περίθλαση Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R στο επίπεδο παρατήρησης δίνεται από τη (σχ. 7.5.1.8): $E' = \frac{E}{E_0} = \frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}$. Επομένως η ένταση E'' του ηλ. πεδίου που θα προκύψει από την επαλληλία των πεδίων τριών πανομοιότυπων ανοιγμάτων στο επίπεδο παρατήρησης (βλ. και § 7.4.3)) θα έχει τη μορφή:

$$E'' = E' + E'e^{i\delta} + E'e^{i2\delta} = E'\left(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta}\right) \qquad (1)$$

όπου κατά τα γνωστά: $\delta = kd\sin\theta$. Και επειδή οι προσθετέοι στο εσωτερικό της παρένθεσης συνιστούν γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο τον $a = 1$, τελευταίο τον $\tau = e^{i2\delta}$ και λόγο: $\omega = e^{i\delta}$, τότε με βάση τη σχέση: $\Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}$ για το άθροισμά τους θα έχουμε τελικά: $E'' = E'\left(\frac{1 - e^{i3\delta}}{1 - e^{i\delta}}\right)$. Οπότε η τιμή της έντασης του φωτός θα δίνεται

από τη σχέση: $I = E'' \cdot E''^{*} = E'^{2}\left(\frac{1-e^{i3\delta}}{1-e^{i\delta}}\right)\left(\frac{1-e^{-i3\delta}}{1-e^{-i\delta}}\right) = E'^{2}\left(\frac{1-\cos 3\delta}{1-\cos\delta}\right)$. Και επειδή: $1-\cos\delta = 2\sin^{2}\frac{\delta}{2}$, θα έχουμε τελικά: $I = E'' \cdot E''^{*} = E'^{2}\left(\frac{\sin(3\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^{2}$ με: $E'^{2} = \frac{4J_1^2(kR\theta)}{(kR\theta)^2}$. Και με την αντικατάσταση: $x = (\delta/2) = \pi d \sin\theta/\lambda$ και την παράλειψη του όρου E'^{2} της περίθλασης, η κατανομή της έντασης του φωτός που οφείλεται στη συμβολή από τα τρία κυκλικά ανοίγματα θα δίνεται από τη σχέση:

$$I(x) = \left(\frac{\sin 3x}{\sin x}\right)^{2} \qquad (2)$$

Θέλουμε να δούμε στα επόμενα ποια θα είναι η δομή αυτού του όρου, η οποία τελικά θα διαμορφωθεί από τον όρο της περίθλασης προκειμένου να πάρουμε το συνολικό πρότυπο περίθλασης από τα τρία κυκλικά ανοίγματα.

Ακραίες τιμές της $I(x)$ θα έχουμε για $I'(x) = 0$. Όπου $I'(x)$ η πρώτη παράγωγος της $I(x)$ ως προς x. Θα έχουμε:

$I(x)' = \left[\left(\frac{\sin 3x}{\sin x}\right)^{2}\right]' = \frac{6\sin 3x \sin x \cos 3x - 2\sin^{2} 3x \cos x}{\sin^{3} x} = 0$, από την οποία βρίσκουμε: $\sin 3x(3\sin x\cos 3x - \sin 3x \cos x) = 0$. Οπότε θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\sin 3x = 0 \qquad (3)$$

και $$3\sin x \cos 3x - \sin 3x \cos x = 0$$

ή $$3\tan x = \tan 3x \qquad (4)$$

Για την περίπτωση της (σχ.3) $\sin 3x = 0 = \sin n\pi \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ Δηλ. θα έχουμε ακραίες τιμές για:

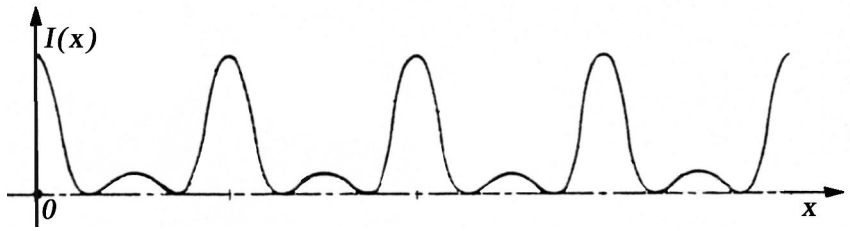
$$x = n\frac{\pi}{3} \quad \text{όπου: } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \qquad (5)$$

και μάλιστα ελάχιστα επειδή η $I''(x) = 2\Big/\sin^2\frac{n\pi}{3}$, δηλ. η δεύτερη παράγωγος της $I(x)$ ως προς x για $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$, είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Αυτά όμως τα ελάχιστα (που είναι μηδενικά) βρίσκονται μεταξύ κυρίων μεγίστων συμβολής, επειδή για: $n = 0, \pm 3, \pm 6, \cdots$ λόγω της: $x = \pi(n/3) \Rightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$. Και για τις τιμές αυτές των x με βάση τον κανόνα του L' Hospital θα έχουμε: (παρακάτω για $x \to 0$):

$$\left(\frac{\sin 3x}{\sin x}\right)^2_{x\to 0} = \frac{0}{0} = \frac{\left(\sin^2 3x\right)'}{\left(\sin^2 x\right)'} = 3\frac{\sin 3x\cos 3x}{\sin x\cos x}_{x\to 0} = 3\frac{\left(\sin 3x\cos 3x\right)'}{\left(\sin x\cos x\right)'} = 3\frac{\cos 6x}{\cos 2x}_{x\to 0} = 3^2.$$

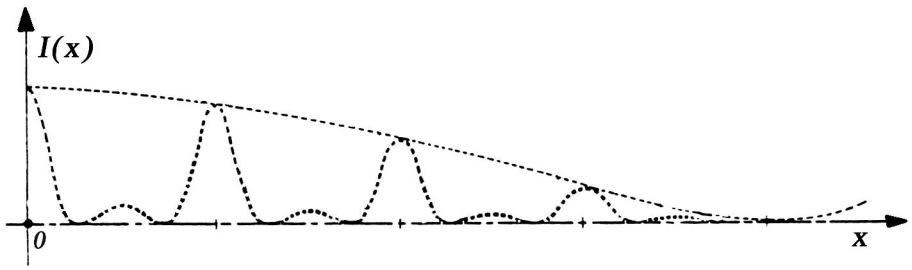
Δηλ. μέγιστο.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι ανάμεσα σε δύο κύρια μέγιστα για το πρότυπο συμβολής, υφίστανται δύο μηδενικά ελάχιστα. Άρα και μεταξύ των δύο ελαχίστων, θα υφίσταται ένα δευτερεύον μέγιστο (Σχ. 7.5.2.2). Και όσον αφορά τις θέσεις τους, (που όπως αποδεικνύεται δεν είναι συμμετρικές σε σχέση με τα διαδοχικά κύρια



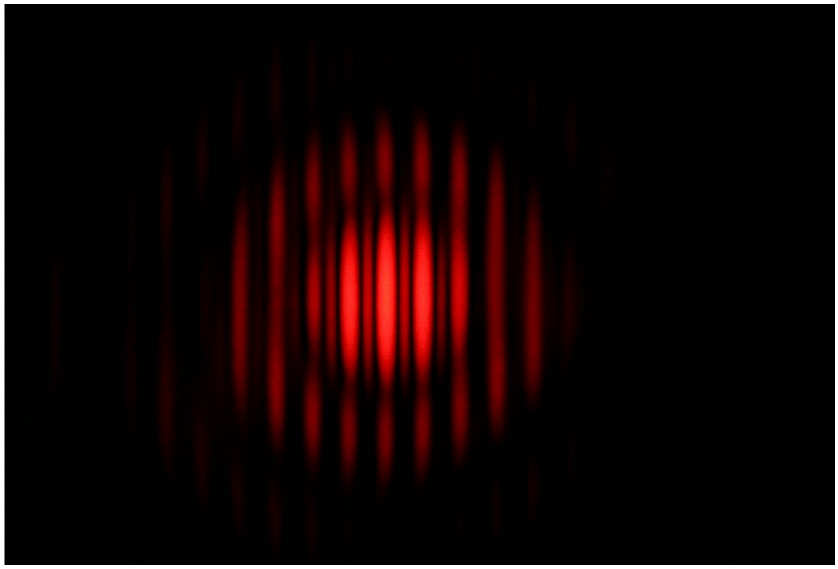
(Σχ. 7.5.2.2)

μέγιστα), μπορούν να υπολογιστούν γραφικά με τη βοήθεια της (σχ. 4). Τελικά αυτό το πρότυπο, θα διαμορφωθεί από τον παράγοντα της περίθλασης που δίνεται από τη (σχ. 7.5.1.9): $4J_1^2(kR\theta)\big/(kR\theta)^2$ (Σχ. 7.5.2.3). Και τη φωτογραφική απεικόνιση



(Σχ. 7.5.2.3)

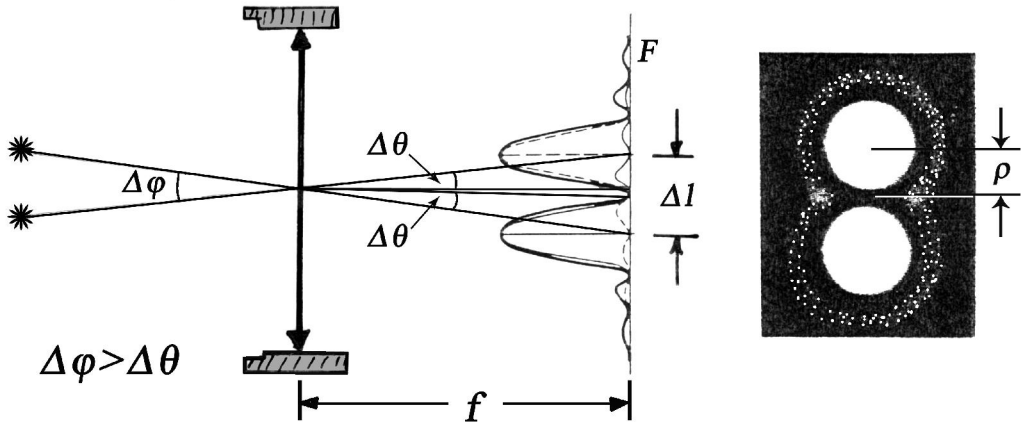
του προτύπου περίθλασης από τα τρία κυκλικά ανοίγματα το βλέπουμε στην (Εικ. 7.5.2.4).



(Εικ. 7.5.2.4)

7.5.3 *Διακριτική ικανότητα ενός φακού. Κριτήριο του Rayleigh*

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι λόγω της ύπαρξης των ορίων που προκύπτουν από: Φακούς, διαφράγματα, εμπόδια κλπ, τα οποία και περιλαμβάνονται στα οπτικά όργανα, θα έχουμε περίθλαση των διαδιδόμενων μετ. κύματος στο εσωτερικό τους. Το γεγονός αυτό έχει σαν άμεση συνέπεια την επίδραση στη διακριτική τους ικανότητα. Δηλ. στο ότι τίθενται όρια για το τι αυτά μπορούν να ξεχωρίσουν χωρίς αμφιβολία, από τη δομή των παρατηρούμενων αντικειμένων. Σαν αντιπρόσωπο για τη μελέτη της διακριτικής ικανότητας θα επιλέξουμε ένα φακό (σαν απεικονίζον σύστημα), ορισμένης διαμέτρου και εστιακής απόστασης. Μια πλέον ενδελεχής εξέταση αυτού του φαινομένου, γίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 2).



(Σχ. 7.5.3.1)

Ο φακός αυτός, που μπορεί να θεωρηθεί κατ' αρχή ότι είναι ο αντικειμενικός φακός ενός τηλεσκοπίου, δέχεται όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.5.3.1) υπό γωνία $\Delta\varphi$ τα επίπεδα μετ. κύματος που προέρχονται από δύο μακρινά αστέρια, που τελικά σχηματίζουν τα είδωλά τους στο πίσω εστιακό του επίπεδο F. Υποθέτουμε εδώ, (γεγονός που είναι αληθινό) ότι τα αστέρια θεωρούμενα σαν πηγές φωτός, είναι μεταξύ τους ασύμφωνες, δηλ. τα πεδία μεταξύ τους στο εστιακό επίπεδο του φακού δεν συσχετίζονται κατά την επαλληλία τους. Επομένως τα επίπεδα μετ. κύματος, τα αφικνούμενα στο φακό, περιθλώνται από τα όριά του (διαμέτρου $D = 2R$) και σχηματίζουν δύο ανεξάρτητα πρότυπα περίθλασης. Τότε κατά τα γνωστά η ακτίνα του δίσκου του Airy του καθενός από αυτά με βάση τη (σχ. 7.5.1.11) θα είναι:

$$\rho = \frac{1.22\bar{\lambda} f}{2R} \tag{7.5.3.1}$$

όπου R η ακτίνα του φακού, f η εστιακή του απόσταση και $\bar{\lambda}$ το μέσο μ.κ. το εκπεμπόμενο από τα αστέρια φωτός. Και επειδή $\Delta\theta = \rho / f$ είναι το γωνιακό άνοιγμα με την οποία φαίνεται η ρ από το κέντρο του φακού θα έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{1.22\bar{\lambda}}{2R} \tag{7.5.3.2}$$

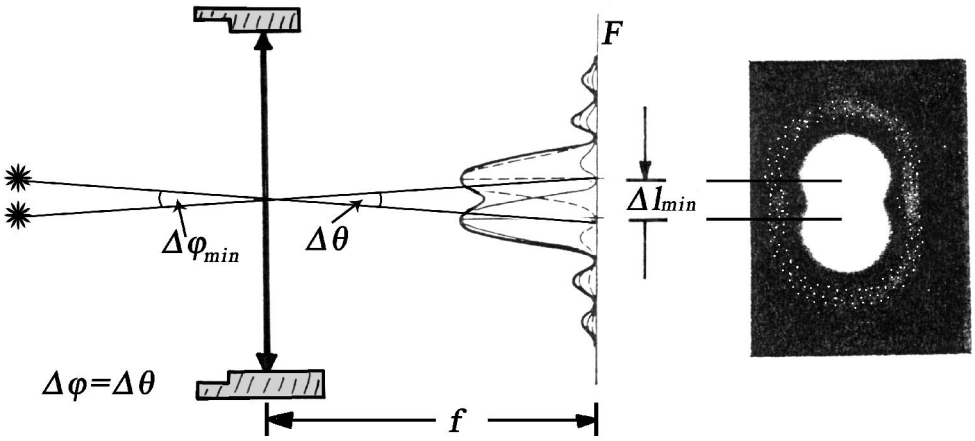
Σημείωση

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε εδώ, ότι για την περίπτωση ενός μέσης διαμέτρου φακού, η ακτίνα του δίσκου του Airy έχει πολύ μικρό μέγεθος. Π.χ. για φακό διαμέτρου $D = 50\text{mm}$ με $f = 300\text{mm}$ και $\bar{\lambda} = 550\text{nm}$ (μέση τιμή του μ.κ. στο ορατό), η (σχ. 7.5.3.1) η (σχ. 7.5.3.1) μας δίνει: $\rho \simeq 0.04\text{mm}$. Οπότε το γωνιακό άνοιγμα $\Delta\theta$ με το οποίο φαίνεται η ρ θα είναι: $\Delta\theta \simeq 0.00133\text{rad}$ ή $\Delta\theta \simeq 2.7''$ (δευτερόλεπτα της μοίρας).

Με βάση τα προαναφερόμενα, για να 'διακρίνει' ο φακός τα δύο αστέρια σαν ξεχωριστά αντικείμενα, θα εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ τους. Έστω αυτή είναι τέτοια, που το γωνιακό άνοιγμα $\Delta\varphi$ (όπως φαίνονται τα' αστέρια από το κέντρο του φακού) ισχύει η σχέση: $\Delta\varphi > \Delta\theta$ (Σχ. 7.5.3.1). Τότε η απόσταση Δl μεταξύ των κέντρων των δύο προτύπων περίθλασης στο εστιακό του επίπεδο είναι μεγαλύτερη του ρ ($\Delta l > \rho$). Επομένως οι δύο δίσκοι του Airy (τα είδωλα ουσια-

στικά των δύο αστεριών), θα είναι μεταξύ τους σαφώς διαχωρισμένοι, με σχεδόν μηδενικό ελάχιστο έντασης μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η απόσταση των αστεριών είναι τέτοια ούτως ώστε να ισχύει η σχέση: $\Delta\varphi = \Delta\theta$ (Σχ. 7.5.3.2). Που σημαίνει ότι το μέγιστο της ένταση (του προτύπου περίθλασης) του ενός, συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο του άλλου. Σ' αυτή την οριακή περίπτωση, αν λάβουμε το άθροισμα των κατανομών έντασης των δύο αστεριών (ασύμφωνη επαλληλία των δύο πεδίων), θα προκύψει μια καμπύλη έντασης που στο κέντρο της θα εμφανίζει ένα σαφές ελάχιστο όχι όμως μηδενικό. Το γεγονός αυτό όμως είναι επαρκές – όπως φαίνεται στην εικόνα του του (Σχ. 7.5.3.2) – ούτως ώστε να έχουμε την αίσθηση ότι στο εστιακό επίπεδο του φακού, απεικονίζονται δύο και όχι ένα αντικείμενο. Η ελάχιστη αυτή γωνία $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{min}$, είναι η έκφραση του λεγόμενου ***κριτηρίου του Rayleigh (Rayleigh criterion)***. Και εφαρμόζεται όταν θέλουμε ν' αναδείξουμε τη διακριτική ικανότητα ενός φακού. Δηλ. την οριακή δυνατότητά του, να ξεχωρίζει μεταξύ τους δύο απεικονιζόμενα αντικείμενα στο εστιακό του επίπεδο. Τότε θα έχουμε:

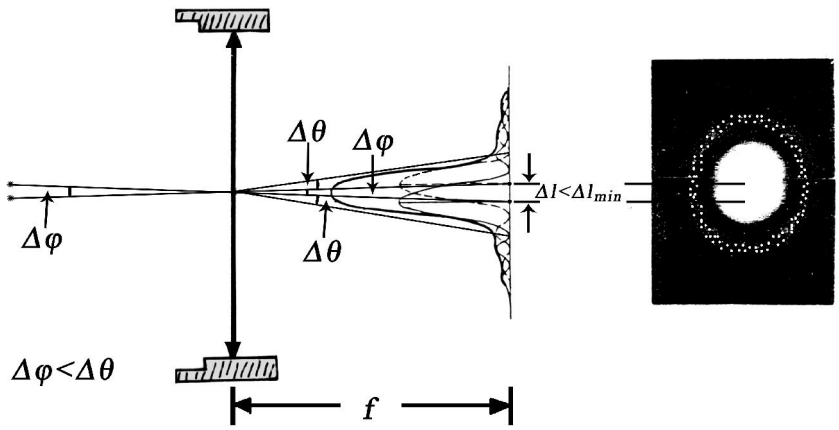


(Σχ. 7.5.3.2)

$$\Delta\varphi_{min} = \Delta\theta = \frac{1.22\bar{\lambda}}{2R} \quad \text{και} \quad \Delta l_{min} = \frac{1.22\bar{\lambda}f}{2R} \qquad (7.5.3.3)$$

Έστω τέλος η περίπτωση για την οποία η απόσταση των αστεριών είναι τόση ώστε να ισχύει η σχέση: $\Delta\varphi < \Delta\theta$ (Σχ. 7.5.3.30. Τότε η άθροιση των εντάσεων των δύο προτύπων περίθλασης, θα μας δώσει μια κατανομή χωρίς την παρουσία ελάχιστου στο κέντρο του. Που σημαίνει ότι στο εστιακό επίπεδο του φακού, τα είδωλα των δύο αστεριών φαίνονται σαν ένα. Γεγονός που μας αποτρέπει να μπορέσουμε

να διακρίνουμε ότι από την περιοχή αυτή του ουρανού εκπέμπουν δύο ξεχωριστά αντικείμενα.



(Σχ. 7.5.3.3)

Η δεύτερη των (σχ. 7.5.3.3) ονομάζεται όριο της διακριτικής ικανότητας του φακού, ενώ ο λόγος: $1/\Delta l_{min}$ ***διακριτική ισχύς (resolution power)***. Θα πρέπει βέβαια να πούμε ότι η διακριτική ικανότητα ενός οπτικού οργάνου δεν εξαρτάται μόνο από το φακό εισόδου στο οπτικό σύστημα (που τον ονομάζουμε συνήθως αντικειμενικό). Ένα όργανο – όπως ήδη έχουμε αναφέρει – θα μπορούσε να περιλαμβάνει πολλούς φακούς όπως και διαφράγματα για διάφορους λόγους. Οπότε τίθεται το εύλογο ερώτημα: Ποιο είναι το 'άνοιγμα' από το οποίο θα περιθλαστεί το φως, προκειμένου να καθορίσουμε τη διακριτική του ικανότητα. Το ερώτημα είναι λυμένο και η περίθλαση τελικά 'γίνεται' από τη λεγόμενη κόρη εξόδου του εκάστοτε οπτικού συστήματος. Ενδελεχής μελέτη του ορισμού της και των ιδιοτήτων της γίνεται στο (Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (ΘΕΜΑ 1)). Θα πρέπει επίσης να πούμε ότι για τον προσδιορισμό της διακριτικής ικανότητας που διαθέτουν τα διοπτρικά τηλεσκόπια και τα μικροσκόπια – όπως άλλωστε και για κάθε οπτικό σύστημα – θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και το μάτι του παρατηρητή. Μια πλήρης μελέτη της διακριτικής ικανότητας που διαθέτουν συγκεκριμένα τα διοπτρικά τηλεσκόπια και μικροσκόπια, δίνεται αντίστοιχα στο (Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (ΘΕΜΑ 1) και (ΘΕΜΑ 2)).

Παράδειγμα

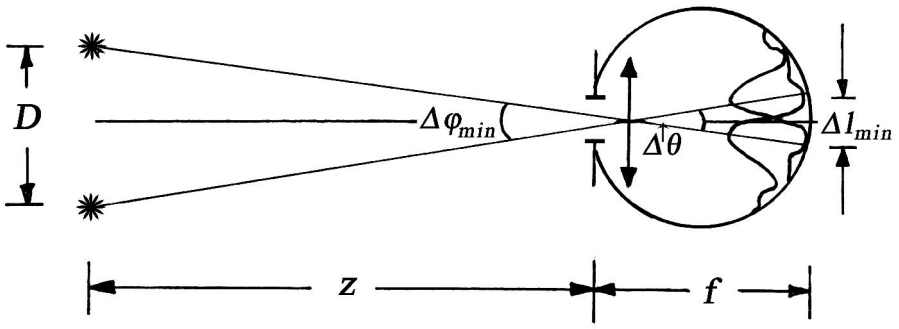
Η εστιακή απόσταση του κρυσταλλώδους φακού του ανθρώπινου ματιού (βλ. Κεφ.3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.7.1)) είναι περίπου $f = 20\text{mm}$. Η διάμετρός του όμως κατά τα γνωστά, οριοθετείται από την κόρη του ματιού, μια τυπική διάμε-

τρος της οποίας είναι $d = 2\text{mm}$. Ζητούμε να βρούμε σε ποια απόσταση το μάτι μπορεί να ξεχωρίσει δύο φωτεινές πηγές που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $D = 10\text{cm}$. Θεωρούμε ότι το μέσο μ.κ. του εκπεμπόμενου φωτός είναι $\overline{\lambda} = 550\text{nm}$ και ότι το σύστημα του ματιού δεν έχει σφάλματα.

- Με βάση το κριτήριο του Rayleigh η ελάχιστη διακριτή απόσταση Δl_{min} στο εστιακό επίπεδο του κρυσταλλώδους φακού του ματιού (δηλ. στον αμφιβληστροειδή χιτώνα, για παρατήρηση στο άπειρο), διαμέτρου $d = 2\text{mm}$ (όση η κόρη του ματιού), θα δίνεται από τη γνωστή (σχ. 7.5.3.3):

$$\Delta l_{min} = \frac{1.22\overline{\lambda}f}{2R} = \frac{1.22\overline{\lambda}f}{d} = \frac{1.22 \times 0.55 \times 10^{-3} \times 20}{2} = 0.0067\text{mm}$$

Η απόσταση αυτή είναι περίπου διπλάσια της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών υποδοχέων (κωνίων ή ραβδίων), στον αμφιβληστροειδή του ματιού. Γεγονός που σημαίνει ότι γίνεται διακριτή από αυτό.



(Σχ. 7.5.3.4)

Έστω τώρα D η απόσταση μεταξύ των δύο φωτεινών πηγών και z η απόσταση από το μάτι του παρατηρητή. Τότε με βάση το (Σχ. 7.5.3.4) επειδή: $\Delta\varphi_{min} \simeq \Delta\theta$ (σχ. 7.5.3.3), θα έχουμε κατά προσέγγιση: $(z/D) = (f/\Delta l_{min})$. Οπότε:

$$z = \frac{Df}{\Delta l_{min}} = \frac{100 \times 20}{0.0067} = 289.5\text{m}$$

Που σημαίνει από θεωρητική τουλάχιστον άποψη, ότι το ανθρώπινο μάτι μπορεί να δει σαν ξεχωριστές δύο φωτεινές πηγές (απόστασης μεταξύ τους 10cm), στην απόσταση περίπου των 300m.

7.6 *Περίθλαση Fraunhofer από επίπεδα γραμμικά φράγματα*

Μια επαναλαμβανόμενη σειρά από γραμμικά περιθλώντα στοιχεία σε επίπεδη διάταξη, που έχει σαν αποτέλεσμα να προκαλεί μεταβολές στο πλάτος ή στη φάση (ή και τα δύο) σε ένα προσπίπτον μετ. κύματος ονομάζεται ***γραμμικό φράγμα περίθλασης (linear diffraction gating)***. Τα φράγματα αυτού του είδους χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Σε αυτά του ***διερχομένου φωτός (transmittion gratings)*** ή φράγματα διαπερατότητας και τα ***φράγματα ανάκλασης (reflection gratings)***. Για τα πρώτα το περιθλώμενο πεδίο δημιουργείται κατά τη διέλευση του φωτός από το σύστημα των γραμμικών στοιχείων. Ενώ για τα δεύτερα (τα οποία είναι αδιαφανή), από την 'ανάκλαση' (στην πραγματικότητα την περίθλαση) στον ίδιο χώρο με αυτό της προσπίπτουσας δέσμης.

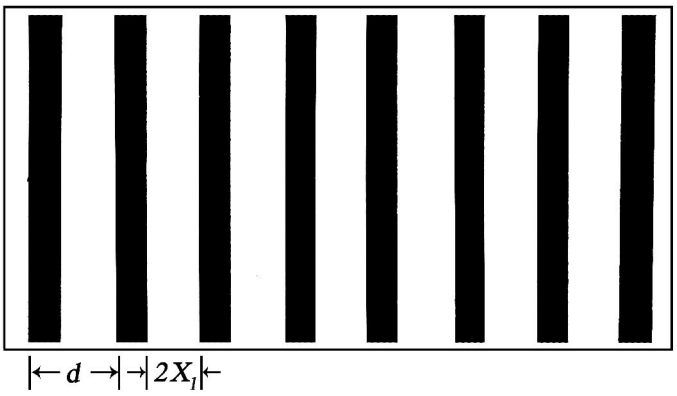
Η σπουδαιότητα των φραγμάτων περίθλασης οφείλεται στο γεγονός ότι έχουν τη δυνατότητα ν' αναλύουν το προσπίπτον σ' αυτά φως. Δηλ. να μας δίνουν το φάσμα μιας πολυχρωματικής ακτινοβολίας. Για το λόγο αυτό, είναι που αποτελούν τα κύρια στοιχεία των φασματοσκοπικών οργάνων, όπως τα φασματοσκόπια, οι μονοχρωμάτορες, οι φασματογράφοι κλπ. Είναι τα όργανα που χρησιμοποιεί ο κλάδος της οπτικής που ονομάζεται ***φασματοσκοπία (spectroscopy)***. Μόνο που η τελευταία αφορά όλο το φάσμα των Η/Μ ακτινοβολιών με εφαρμογές: Στη μετρολογία, την έρευνα της δομής της ύλης, την αστρονομία, τη μελέτη της ατμόσφαιρας κλπ.

Βέβαια θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι ανάλυση του φωτός που προέρχεται από μια πολυχρωματική πηγή, μπορούμε να πάρουμε και με τη βοήθεια των πρισμάτων, με βάση το φαινόμενο του διασκεδασμού του φωτός. (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.3.2)) και (Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.3.3)). Τα πρίσματα σαν αναλυτικά στοιχεία χρησιμοποιούνταν από τα φασματοσκοπικά όργανα σε παλαιότερες εποχές. Σήμερα τα χρησιμοποιούμε μόνο για τις περιπτώσεις που αναλύουμε μεγάλης έντασης ακτινοβολίες. Τα φασματοσκοπικά όργανα τις μέρες μας αναλύουν τις ακτινοβολίες ως επί το πλείστον μέσω διαμορφωμένων φραγμάτων ανάκλασης, τα οποία στοιχειωδώς θα μελετήσουμε στα επόμενα.

7.6.1 *Περίθλαση Fraunhofer από φράγματα διαπερατότητας πλάτους*

Τα φράγματα αυτού του είδους είναι διερχομένου φωτός και μάλιστα πλάτους. Δηλ. κατά την πρόσπτωση σ' αυτά ενός επιπέδου (συνήθως) μετ. κύματος, προκαλούνται μεταβολές μόνο στο πλάτος του ηλ. του πεδίου. Ένα από τα απλούστερα φράγματα αυτού του είδους, αποτελείται από μια σειρά διαφανών (πλάτους $2X_1$) και αδιαφανών (πλάτους $d-2X_1$) ευθυγράμμων ζωνών μεγάλου μήκους, όπως αυτό που φαίνεται στο (Σχ. 7.6.1.1).

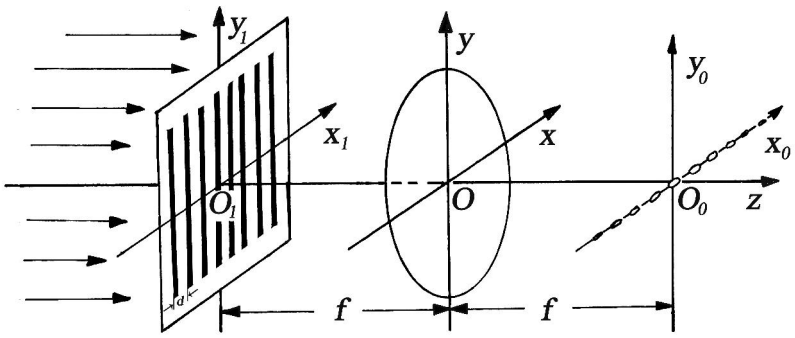
Το επαναλαμβανόμενο τμήμα του φράγματος (μια διαφανής και μια αδιαφανής ζώνη), ονομάζεται περίοδος του φράγματος και το πλάτος της είναι d. Την περίοδο την ονομάζουμε και 'γραμμή'. Συνήθως χαρακτηρίζουμε τα φράγματα με τον αριθμό των περιόδων (γραμμών), που περιλαμβάνονται στη μονάδα του μήκους.



(Σχ. 7.6.1.1)

Δύο τυπικά φράγματα π.χ. έχουν τιμές: 20γρ./mm και 1000γρ./mm. Που σημαίνει ότι το πρώτο περιλαμβάνει 20 περιόδους σε ένα χιλιοστό μήκους, ενώ το δεύτερο 1000. Τέτοιου είδους φράγματα σήμερα κατασκευάζονται με εξάχνωση Χρωμίου (οι αδιαφανείς λωρίδες), πάνω σε διαφανές οπτικά επίπεδο γυαλί. Σκοπός μας στα επόμενα είναι ο αναλυτικός υπολογισμός του προτύπου περίθλασης αυτού του φράγματος, καθώς και η μελέτη των ιδιοτήτων του.

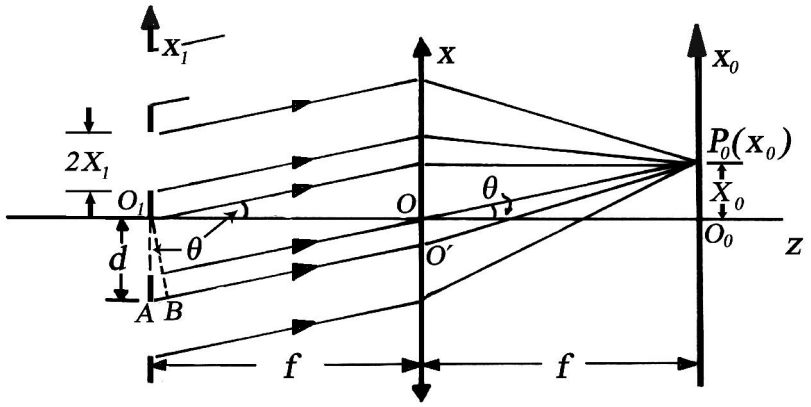
Στο επόμενο (Σχ. 7.6.1.2) βλέπουμε την τυπική διάταξη λήψης ενός περιθλώντος στοιχείου, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το φράγμα διερχομένου



(Σχ. 7.6.1.2)

φωτός. Οι λωρίδες του φράγματος είναι κατά μήκος του άξονα O_1y_1. Η περίοδός του είναι d και το πλάτος των διαφανών ανοιγμάτων $2X_1$ κατά μήκος του άξονα

O_1x_1. Το σύστημα αυτό των N τον αριθμό περιθλώντων ανοιγμάτων, φωτίζεται μ' ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος που προέρχεται από σημειακή πηγή. Αρχικά θα προσδιορίσουμε την κατανομή του πλάτους του ηλ. πεδίου $E'(x_0, y_0)$ στο επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0 και κατά προέκταση την ένταση $I(x_0, y_0)$ του φωτός. Και προκειμένου να βοηθηθούμε στον αναλυτικό υπολογισμό του πεδίου, θα θεωρήσουμε την τομή του προηγούμενου σχήματος στο επίπεδο x_1, z όπως αυτή που φαίνεται στο (Σχ. 7.6.1.3). Η λογική της επίλυσης θα είναι αυτή που αναπτύξαμε



(Σχ. 7.6.1.3)

στην (§ 7.4.3) και που αφορούσε την περίθλαση από δύο σχισμές, πλάτους η κάθε μία $2X_1$, και με απόσταση μεταξύ τους ίση με d.

Στην παραξονική προσέγγιση και σε συνθήκες μακρινού πεδίου, οι συνεισφορές των περιθλώμενων πεδίων από τις N τον αριθμό σχισμές πλάτους η κάθε μια $2X_1$ για μια συγκεκριμένη διεύθυνση θ διαδίδονται ευθύγραμμα. Συγκεντρώνονται κατόπιν από τον μετασχηματιστή φακό, ερχόμενες σε επαλληλία στο σημείο $P_0(x_0)$ του επιπέδου παρατήρησης. Για το σημείο αυτό θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του ηλ. πεδίου. Λόγω της συμφωνίας τους, οι διαταραχές θα συμβάλλουν αλλά μεταξύ τους με μια διαφορά φάσης, λόγω της διάνυσης από αυτές διαφορετικού οπτικού δρόμου μέχρι την άφιξή τους στο σημείο P_0. Η διαφορά φάσης για δύο διαδοχικά αντίστοιχα σημεία των ανοιγμάτων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d (όση δηλ. η περίοδος του φράγματος), π.χ. για τα σημεία: O_1, A θα είναι: $\Delta = k(AB) = kd\sin\theta \simeq kd\tan\theta$. Όπου B το σημείο της τομής της καθέτου από το O_1 στην AO'. Επομένως η συνολική ένταση του ηλ. πεδίου στο $P_0(x_0)$ θα είναι:

$$E' = E_{P_0} + E_{P_0}e^{i\Delta} + E_{P_0}e^{i2\Delta} + \cdots\cdots + E_{P_0}e^{i(N-1)\Delta} = E_{P_0}\left[1 + e^{i\Delta} + e^{i2\Delta} + \cdots\cdots + e^{i(N-1)\Delta}\right] \quad (7.6.1.1)$$

όπου: $E_{P_0} = \left(E/E_0\right) = \dfrac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}$ η κανονικοποιημάνη ένταση του περιθλώμενου ηλ. πεδίου από σχισμή πλάτους $2X_1$ και $u' = x_0/f$. Με την προϋπόθεση ότι οι όροι των σταθερών πλατών και φάσεων ενσωματώνονται στον παράγοντα κανονικοποίησης E_0. Το άθροισμα στην αγκύλη της (σχ. 7.6.1.1) συνιστά μια γεωμετρική πρόοδο, με πρώτο όρο $a = 1$, λόγο $\omega = e^{i\Delta}$ και τελευταίο όρο τον $\tau = e^{i(N-1)\Delta}$. Και με βάση τον τύπο: $\Sigma = \dfrac{\tau\omega - a}{\omega - 1}$ που μας δίνει το άθροισμα των όρων της γεωμετρικής προόδου βρίσκουμε τελικά: $\Sigma = \dfrac{1 - e^{iN\Delta}}{1 - e^{i\Delta}}$. Οπότε η (σχ. 7.6.1.1) παίρνει την τελική μορφή:

$$E' = \left(\frac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}\right)\left(\frac{1 - e^{iN\Delta}}{1 - e^{i\Delta}}\right) \tag{7.6.1.2}$$

Ο δεύτερος όρος της σχέσης αυτής, δεν είναι παρά αυτός της συμβολής που προέρχεται από την επαλληλία των πεδίων N ομοίων αντικειμένων (εδώ των N σχισμών). Όσον αφορά τώρα την ένταση του φωτός: θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$I = E \cdot E^* = \left(\dfrac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}\right)^2 \left(\dfrac{1 - e^{iN\Delta}}{1 - e^{i\Delta}}\right)\left(\dfrac{1 - e^{-iN\Delta}}{1 - e^{-i\Delta}}\right)$. Που μετά τις πράξεις παίρνει τη μορφή:

$$I = \frac{\sin^2 ku'X_1}{\left(ku'X_1\right)^2} \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} \tag{7.61.3}$$

Όπου: $\delta = \dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$ και $ku'X_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{x_0}{f}X_1 = \dfrac{\pi\left(2X_1\right)\sin\theta}{\lambda}$. Επειδή: $\dfrac{x_0}{f} \simeq \tan\theta \simeq \theta$.

Από την τελευταία σχέση, μπορούμε να πούμε ότι ο δεύτερος όρος (της συμβολής), διαμορφώνεται από τον πρώτο όρο (της περίθλασης).

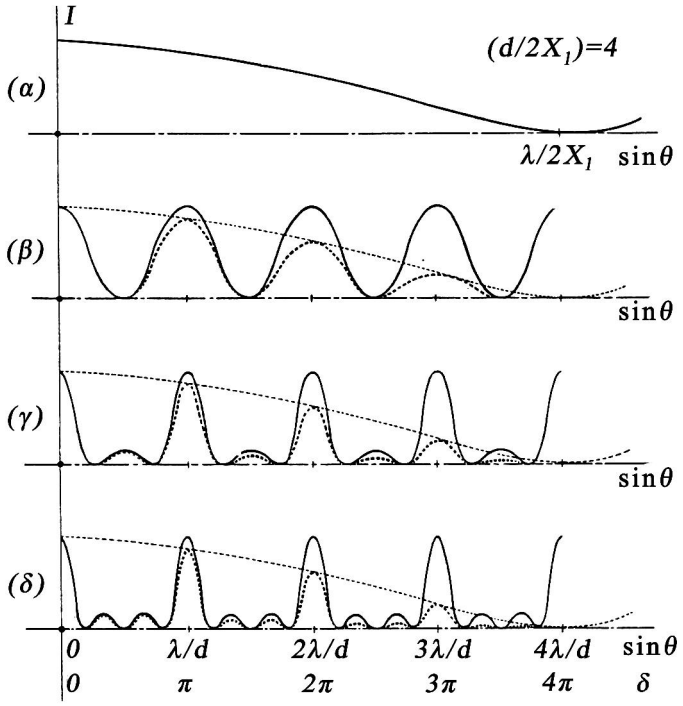
Στο (Σχ. 7.6.1.4α) παρατίθεται η γραφική παράσταση του όρου της περίθλασης συναρτήσει του $\sin\theta$ (βασικά του κεντρικού λοβού περίθλασης), όπου φαίνεται η θέση του πρώτου ελάχιστου ($\sin\theta = \lambda/2X_1$). Στα υπόλοιπα (Σχ. 7.6.1.4β,γ,δ), δίνεται με συνεχείς γραμμές η γραφική παράσταση του παράγοντα συμβολής για: $N = 2,3,4$. Και με διακεκομμένες γραμμές, ο διαμορφωμένος από τον όρο της περίθλασης παράγοντας της συμβολής. Από τον παράγοντα συμβολής, μπορούμε να υπολογίσουμε τις θέσεις όπου συναντούμε τα κύρια μέγιστα. Αυτό θα συμβαίνει όταν: $\delta = m\pi$ για $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ ή όταν:

$$\delta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = m\pi \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{x_0}{f} = m\frac{\lambda}{d} \tag{7.6.1.4}$$

Από την πρώτη των (σχ. 7.6.1.4) προκύπτει η:

$$d\sin\theta = m\lambda \quad \text{όπου} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{7.6.1.5}$$

Ο τύπος αυτός, που ονομάζεται τύπος του φράγματος ή ***τύπος του Bragg (Bragg formula)***, μας αναδεικνύει την αναλυτική ικανότητα που έχει ένα φράγμα διερχομένου φωτός. Δηλ. τη δυνατότητά του ν' αναλύει μια προσπίπτουσα σ' αυτό πολύ-

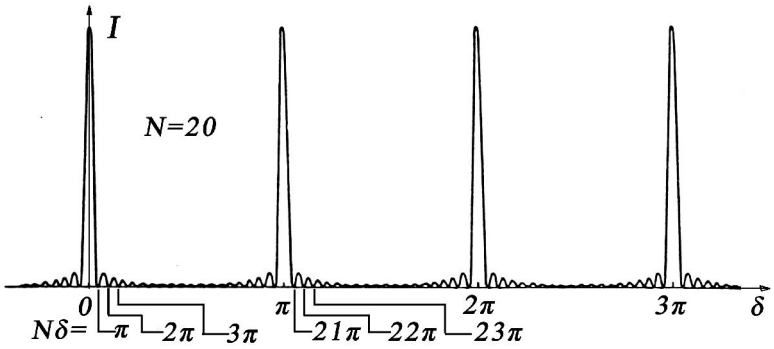


(Σχ. 7.6.1.4)

χρωματική ακτινοβολία. Και εφόσον είναι γνωστή η περίοδός του d και η γωνία θ στην οποία εμφανίζεται η συγκεκριμένη ακτινοβολία (π.χ. μια φασματική γραμμή), τότε θα είναι δυνατός ο υπολογισμός του μήκους κύματός της λ (βλ. (§ 7.6.5.1) Φασματοσκόπιο φράγματος)).

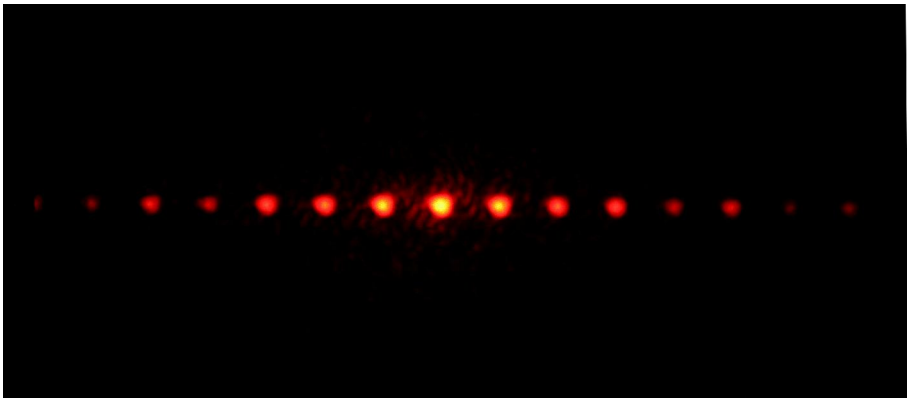
Εκτός όμως από τα κύρια μέγιστα, για $N > 2$, εμφανίζονται μεταξύ τους και δευτερεύοντα μέγιστα και ελάχιστα συμβολής. Στο (ΠΑΡ/ΜΑ 3) γίνεται μια κατά το δυνατόν λεπτομερής μελέτη του προσδιορισμού των θέσεών τους. Από τη μελέτη αυτή προκύπτει ότι όταν ο αριθμός των 'γραμμών' (περιόδων) του φράγματος γίνει αρκετά μεγάλος, τα δευτερεύοντα μέγιστα ή ελάχιστα συμβολής εκφυλίζονται

με γρήγορο ρυθμό, με συνέπεια σχεδόν να εξαφανίζονται. Το τελευταίο γίνεται φανερό στο (Σχ. 7.6.1.5), όπου φαίνεται η γραφική παράσταση του παράγοντα της συμβολής συναρτήσει του δ για $N = 20$. Το αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος εί-



(Σχ. 7.6.1.5)

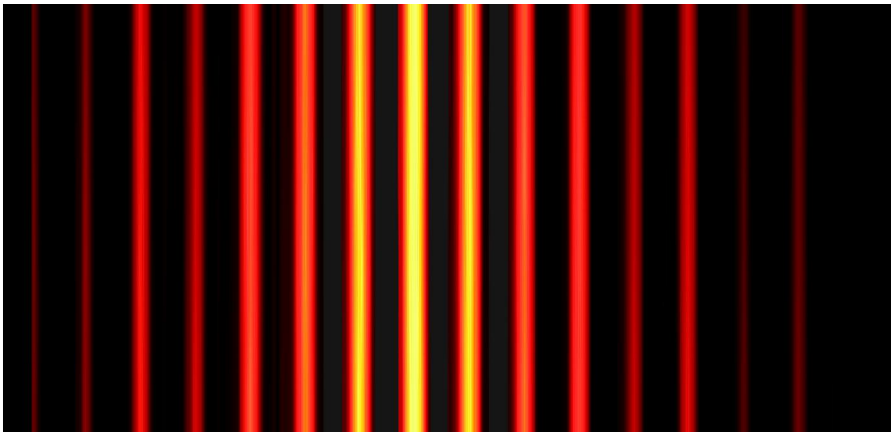
ναι ότι για $N \gg$, το πρότυπο περίθλασης του φράγματος διερχομένου φωτός των N σχισμών, θα εμφανίζει τη μορφή ισαπεχόντων φωτεινών σημείων, των οποίων η ένταση εξαρτάται από το βαθμό διαμόρφωσης που υφίσταται το πρότυπο συμβολής από αυτό της περίθλασης. Στην (Εικ. 7.6.1.6) βλέπουμε τη μορφή ενός τέτοιου προ-



(Εικ. 7.6.1.6)

τύπου, όταν όμως το φράγμα φωτίζεται από ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος που προέρχεται από μια σημειακή πηγή. Έστω όμως η σημειακή πηγή αντικαθίσταται από μια γραμμική πηγή η οποία είναι παράλληλη με τις γραμμές του φράγματος. Τότε η κάθε σημειακή πηγή (της γραμμικής), ασύμφωνη με τις υπόλοιπες, θ' αναπτύξει στο επίπεδο παρατήρησης ένα πανομοιότυπο πρότυπο. Τα πρότυπα αυτά θα είναι παράλληλα μετατοπισμένα ως προς τον άξονα O_0x_0 προς τα θετικά και τα αρνητικά του άξονα O_0y_0. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι η ανάπτυξη ε-

νός προτύπου περίθλασης λεπτών φετινών γραμμών, παράλληλων με αυτές του φράγματος δηλ. κατά τον άξονα $O_0 y_0$ (Εικ. 7.6.1.7). Και μάλιστα ακριβώς στις θέσεις που καταλάμβαναν οι φωτεινές κηλίδες του προτύπου της (Εικ. 7.6.1.6).

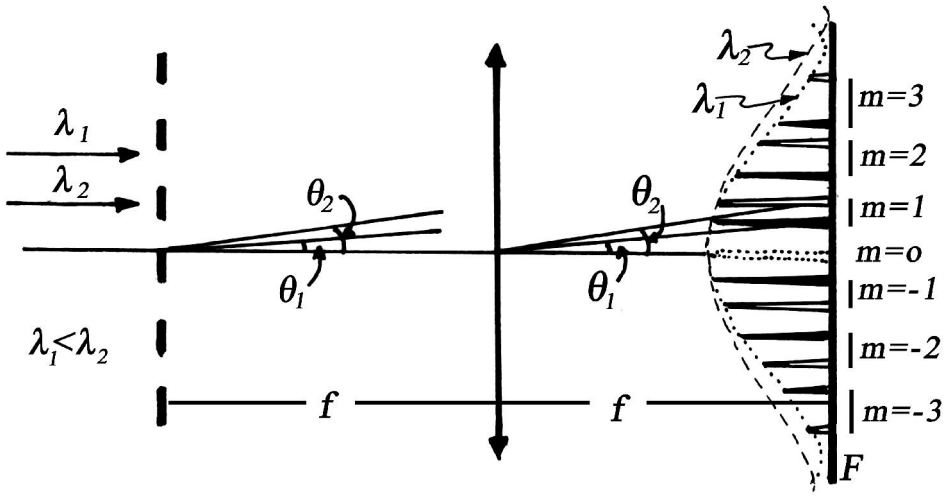


(Εικ. 7.6.1.7)

Όπως θα δούμε στοιχειωδώς στα επόμενα (§ 7.6.5), σχεδόν σε όλων των ειδών τα φασματοσκοπικά αναλυτικά όργανα, η είσοδός τους συνίσταται από μια μικρού (μεταβλητού) πλάτους σχισμή σε σχέση με το μήκος της. Η σχισμή αυτή φωτίζεται απευθείας ή μέσω συμπυκνωτών φακών, (τις περισσότερες φορές) από εκτεταμένων διαστάσεων πηγές φωτός (λυχνίες αλογόνου, φασματικές λυχνίες κλπ), των οποίων η ακτινοβολία θέλουμε ν' αναλυθεί μέσω των φραγμάτων που διαθέτουν αυτά τα όργανα. Που σημαίνει ότι η είσοδος ενός τέτοιου οργάνου συνιστά γραμμική πηγή φωτισμού του φράγματός του. Και το αποτέλεσμα θα είναι ότι η μορφολογία του προτύπου περίθλασης που θα προκύπτει από το φράγμα να είναι γραμμική, όπως ακριβώς αυτή φαίνεται στην (Εικ. 7.6.1.7).

Όσον αφορά τώρα την αναλυτική δυνατότητα ενός φράγματος διερχομένου φωτός, δηλ. τον διαχωρισμό μιας προσπίπτουσας σ' αυτό πολυχρωματικής ακτινοβολίας στις συνιστώσες της, προκύπτει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι το φράγμα φωτίζεται από ένα επίπεδο μετ. κύματος που προέρχεται από μια γραμμική πηγή που είναι διχρωματική. Δηλ. εκπέμπει σε μ.κ. λ_1 και λ_2 με $\lambda_1 < \lambda_2$. Τότε στο επίπεδο παρατήρησης δηλ. στο πίσω εστιακό επίπεδο του μετασχηματιστή φακού, θα εμφανιστούν δύο ανεξάρτητα πρότυπα περίθλασης που θα οφείλονται το καθένα στα δύο μ.κ. λ_1, λ_2. Και ο γεγονός αυτό οφείλεται στην ασυμφωνία των πεδίων με διαφορετικά μ.κ. Τα γραμμικά αυτά πρότυπα (που αντιστοιχούν στα πρότυπα συμβολής) θα είναι εν γένει μεταξύ τους μετατοπισμένα σε σχέση με τη μηδενική τους τάξη. Η κάθε γραμμή θ' αντιστοιχεί σε μια ορισμένη τάξη (θετική και αρνητική). Και μόνο για τη μηδενική τάξη οι γραμμές των διαφορετικών μ.κ. θα ταυτίζονται ($m = 0$ τά-

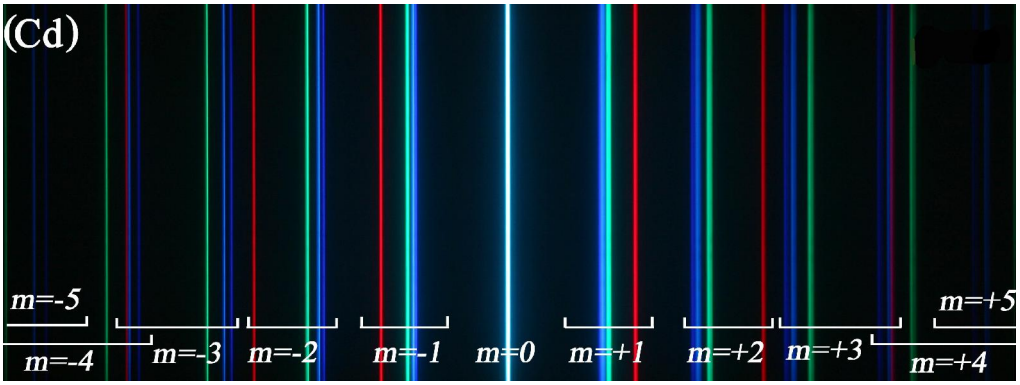
ξη συμβολής). Οι γραμμές του προτύπου συμβολής, θα διαμορφώνονται από τον παράγοντα της περίθλασης, που και αυτός με τη σειρά του εξαρτάται από τα μ. κ. όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.6.1.8). Πράγματι αν με βάση τη (σχ.7.6.1.4), που μας δίνει



(Σχ. 7.6.1.8)

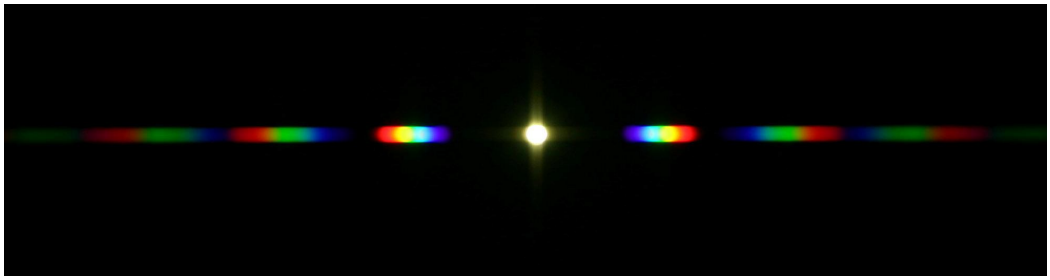
τα κύρια μέγιστα συμβολής (τις θέσεις των γραμμών) υπολογίσουμε τις γωνίες θ_1, θ_2 ή τις θέσεις των x_{01}, x_{02} για $m = 1$ (πρώτη τάξη συμβολής) για τα δύο μ.κ. λ_1, λ_2 θα έχουμε: $\sin\theta_1 = \frac{x_{01}}{f} = \frac{\lambda_1}{d}$, $\sin\theta_2 = \frac{x_{02}}{f} = \frac{\lambda_2}{d}$. Και επειδή $\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \theta_1 < \theta_2$ ή $x_{01} < x_{02}$. Από τα αποτελέσματα αυτά, αναδεικνύεται η χαρακτηριστική και σπουδαία ιδιότητα ενός φράγματος περίθλασης διερχομένου φωτός, που σε γενικές γραμμές διαθέτουν και τα άλλα είδη των φραγμάτων: Δηλ. η ικανότητά τους να διαχωρίζουν στις συνιστώσες της μια σύνθετη (πολυχρωματική) ακτινοβολία. Το ίδιο ακριβώς θα συμβεί και για οποιαδήποτε τάξη συμβολής δηλ. για $m = \pm 2, \pm 3, \cdots$. Και μάλιστα όσο αυξάνει η τάξη, οι αντίστοιχες για κάθε τάξη γραμμές, που αντιστοιχούν στα λ_1, λ_2 διαχωρίζονται περισσότερο. Η διαδικασία αυτή γίνεται αντιληπτή στην (Εικ. 7.6.1.9). Εκεί βλέπουμε το πρότυπο περίθλασης που προκύπτει, όταν το επίπεδο μετ. κύματος που προσπίπτει στο φράγμα, προέρχεται από μια γραμμική πηγή που δημιουργείται από μια φασματική λυχνία Καδμίου (Cd). Διακρίνονται π.χ. στην περιοχή της δεύτερης τάξης συμβολής ($m = \pm 2$) τέσσερες γραμμές. Τις γραμμές αυτές (συνέπεια εκπομπής της φασματικής λυχνίας), μπορούμε να τις ονομάζουμε από εδώ και στο εξής ***φασματικές γραμμές (spectral lines***). Αντιστοιχούν στα μήκη κύματος: $\lambda_1 = 468.01\text{nm}$ (χρώματος μπλε-ελεκτρίκ), $\lambda_2 = 480.0\text{nm}$ (χρώματος ουρανί), $\lambda_3 = 508.58\text{nm}$ (χρώματος πράσινου) και $\lambda_4 = 643.85\text{nm}$ (χρώματος κόκκινου). Επιλέξαμε για την ανάδειξη του φασματικού περιεχομένου της λυχνίας

του Καδμίου την τάξη $m = \pm 2$, επειδή για $m = \pm 1$ οι φασματικές γραμμές λ_1, λ_2 βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και δεν μπορούμε να τι διακρίνουμε σαν δύο,



(Εικ. 7.6.1.9)

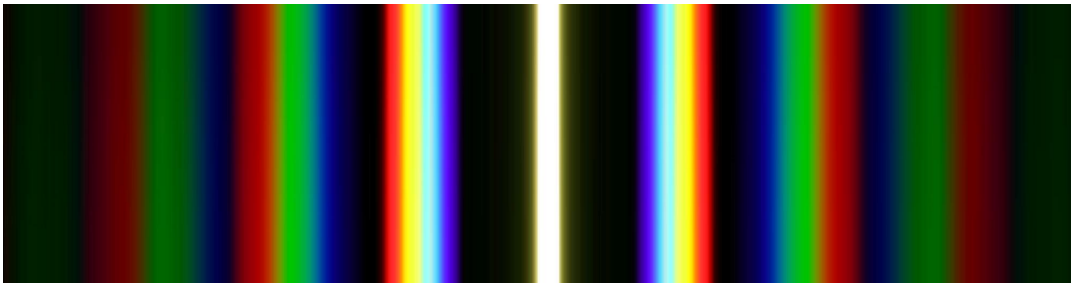
έστω με τον εμπειρικό τρόπο της άμεσης παρατήρησης που επιλέξαμε. (Την εφαρμογή του κριτηρίου του Raylaigh θα την δούμε στα επόμενα).Μπορούμε τέλος από την παρατήρηση του φάσματος της (Εικ. 7.6.1.9) να διαπιστώσουμε το εξής: Η κόκκινη γραμμή του τάξης $m = \pm 3$ φάσματος βρίσκεται στο εσωτερικό του φάσματος τάξης $m = \pm 4$. Το γεγονός αυτό ονομάζεται ***επικάλυψη των τάξεων (cover of orders)***. Στην (Άσκ. 8 Λυμένη), αποδεικνύεται στη γενικότερη περίπτωση του συνεχούς φάσματος του λευκού φωτός ότι μεταξύ της κόκκινης περιοχής της $m = +2$ και της ιώδους περιοχής της τάξης $m = +3$ υφίσταται πάντοτε μερική επικάλυψη. Το ίδιο βέβαια και για τις αντίστοιχες αρνητικές τάξεις. Το γεγονός αυτό φαίνεται (Εικ. 7.6.1.10), κατά την ανάλυση από το φράγμα λευκού φωτός που προέρχεται



(Εικ. 7.6.1.10)

από σημειακή πηγή. Κατά τα άλλα η διαδοχή των εκτρεπόμενων χρωμάτων γίνεται από το ιώδες προς το κόκκινο, επειδή με βάση τον τύπο που μας δίνει η (σχ.7.6.1.4): $\sin\theta = \frac{x_0}{f} = m\frac{\lambda}{d}$ η γωνία εκτροπής (περίθλασης) είναι ανάλογη με το μ.κ. της προς ανάλυση ακτινοβολίας. Και η εκτροπή αυτή είναι αντίθετη με αυτή

που συμβαίνει κατά την ανάλυση μέσω πρίσματος (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.3.2)). Επίσης για την τάξη $m = 0$, δεδομένου ότι η εκτροπή θα είναι μηδενική για όλα τα μ.κ., το χρώμα στην περιοχή εκείνη θα είναι αυτό της πηγής: Δηλ. λευκό. Αν το φωτίζον το φράγμα επίπεδο μετ. κύματος προέρχεται από γραμμική πηγή λευκού φωτός, τότε η ανάλυσή του θα είναι αυτή που φαίνεται στην (Εικ. 7.6.1.11).



(Εικ. 7.1.6.11)

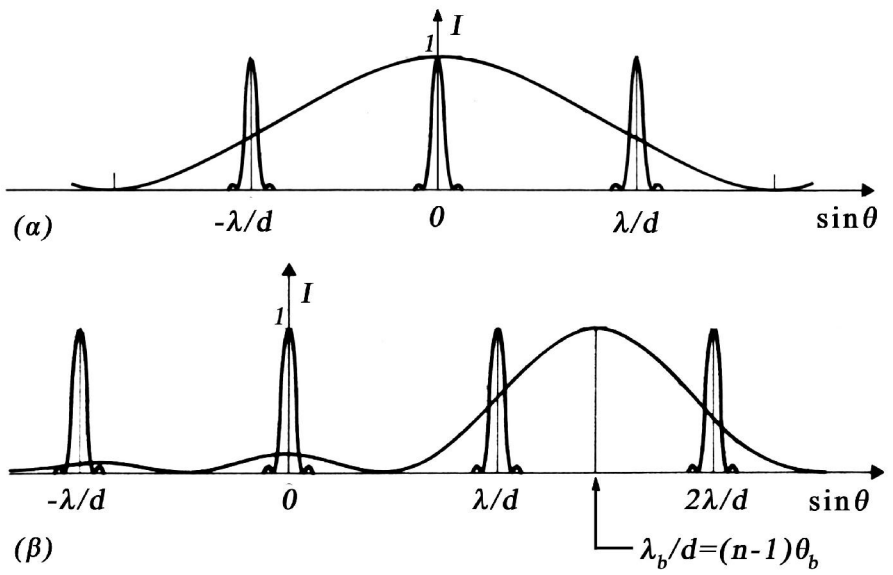
Όσον αφορά τέλος τον προσδιορισμός των τιμών των μ.κ. φασματικών γραμμών, εύρους φασματικών περιοχών κλπ, γίνεται με τη βοήθεια του φασματοσκοπίου φράγματος. Τη δομή και τη λειτουργία του θα την περιγράψουμε στην (§ 7.6.5.1).

7.6.2 *Περίθλαση από διαμορφωμένα φράγματα διαπερατότητας*

Με τα προαναφερόμενα στην προηγούμενη παράγραφο, έγινε κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο ένα απλό φράγμα διαπερατότητας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου ν' αναδείξει το φασματικό περιεχόμενο μιας πηγής φωτός. Τα φράγματα όμως αυτού του είδους παρουσιάζουν ένα βασικό μειονέκτημα, που αφορά το ποσοστό της περιθλώμενης ενέργειας που μπορεί να μας είναι ωφέλιμη, σε σχέση με τη συνολικά προσπίπτουσα στο φράγμα. Το γεγονός γίνεται εμφανές από το (Σχ. 7.6.1.8), όπου εδώ θεωρούμε ότι τα δύο μ.κ. είναι ακραία. Ανάλυση κατά τα γνωστά για τη μηδενική τάξη δεν υφίσταται. Όσον αφορά τώρα τις εντάσεις των αναλυόμενων ακτινοβολιών για $m = +1$ και το πολύ $m = +2$ (λόγω επικάλυψης των τάξεων), αυτές περιστέλλονται δραστικά από τη διαμόρφωση που προκαλεί το πρότυπο της περίθλασης. επίσης απώλεια ενέργειας θα έχουμε από το γεγονός ότι η τελευταία διασπείρεται και στις δύο αντίστοιχες αρνητικές τάξεις συμβολής.

Για το λόγο αυτό έγινε προσπάθεια αναδιευθέτησης του προτύπου συμβολής σε σχέση με αυτό της περίθλασης, κατά την περίθλαση του φωτός μέσω ενός φράγματος. Δηλ. της απομάκρυνσης της θέσης που αντιστοιχεί το μέγιστο της περίθλασης από τη θέση που σχηματίζεται το μηδενικής τάξης ($m = 0$) μέγιστο της συμβο-

λής. Η διαδικασία αυτή φαίνεται διαγραμματικά στο (Σχ. 7.6.2.1β) συγκρινόμενο με αυτό του κλασσικού προτύπου περίθλασης από απλό φράγμα πλάτους διερχομένου φωτός (Σχ. 7.6.2.1α). Εκεί πράγματι βλέπουμε ότι με τη χρήση ενός νέου εί-

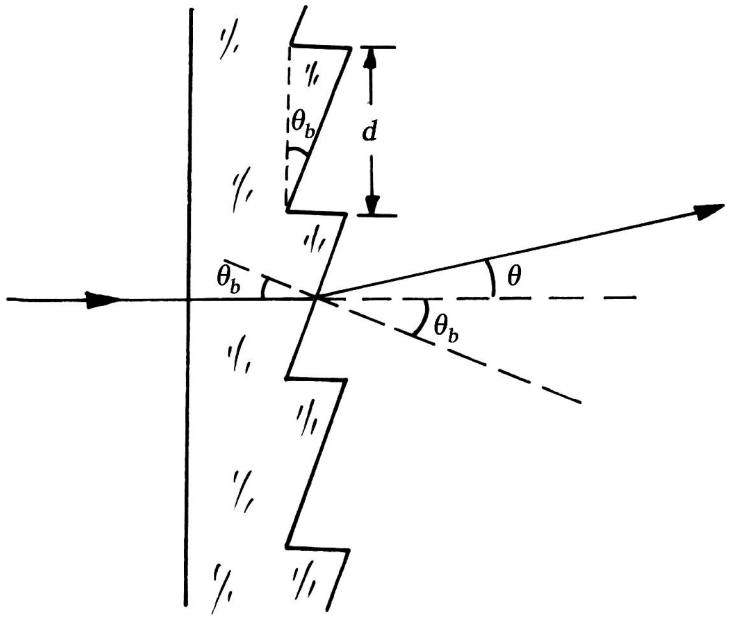


(Σχ. 7.6.2.1)

δους φράγματος διαπερατότητας που ονομάζεται ***διαμορφωμένο φράγμα περίθλασης (blazed diffraction grating)***, μπορούμε να πετύχουμε το εξής: Το μέγιστο του προτύπου περίθλασης αντί της θέσης $\theta = 0^0$ (όπου θ η γωνία περίθλασης) να μετακινηθεί στη θέση $\theta' = \arcsin(\lambda_b/d)$. Το λ_b το οποίο ονομάζεται ***διαμορφωμένο μήκος κύματος (blazed wave length)***, μπορεί να προσδιοριστεί από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του νέου φράγματος. Τελικά – όπως θα διευκρινίσουμε και στα επόμενα – το μέγιστο του προτύπου περίθλασης, μπορεί να μετακινηθεί σ' οποιοδήποτε από τα μέγιστα των τάξεων συμβολής που είναι διάφορη της μηδενικής. Με το επιπλέον πλεονέκτημα ότι όλες οι υπόλοιπες θα καταστέλλονται, επειδή τα ελάχιστα της περίθλασης θα συμπίπτουν με τα υπόλοιπα των μεγίστων συμβολής. Με τα προαναφερόμενα γίνεται σαφές το πλεονέκτημα της χρήσης των διαμορφωμένων φραγμάτων περίθλασης (στην προκειμένη περίπτωση διερχομένου φωτός), για το λόγο ότι όλη η περιθλόμενη ενέργεια κατευθύνεται στην περιοχή του μεγίστου μιας από τις τάξεις συμβολής, διάφορης της μηδενικής.

Ένα διαμορφωμένο φράγμα περίθλασης διερχομένου φωτός , έχει τη δομή που φαίνεται στο (Σχ. 7.6.2.2). Είναι κατασκευασμένο από διαφανές υλικό δ.δ. n. Η μία του πλευρά είναι επίπεδη και η άλλη διαμορφωμένη σε σκαλοπάτια (σφήνες) περιόδου d. Στην πραγματικότητα η κάθε σφήνα συνιστά ένα λεπτό πρίσμα διαθλαστικής γωνίας θ_b, με πλάτος βάσης $d\sin\theta_b$, επειδή η τιμή της διαθλαστικής

γωνίας είναι πολύ μικρή οπότε θα ισχύει: $\tan\theta_b \simeq \sin\theta_b$. Θα πρέπει βέβαια να πούμε εδώ ότι το φράγμα που περιγράψαμε μόλις πριν, είναι ένα φράγμα φάσης και όχι πλάτους . Πράγματι στην προκειμένη περίπτωση, αυτό που μεταβάλλεται κατά την



(Σχ. 7.6.2.2)

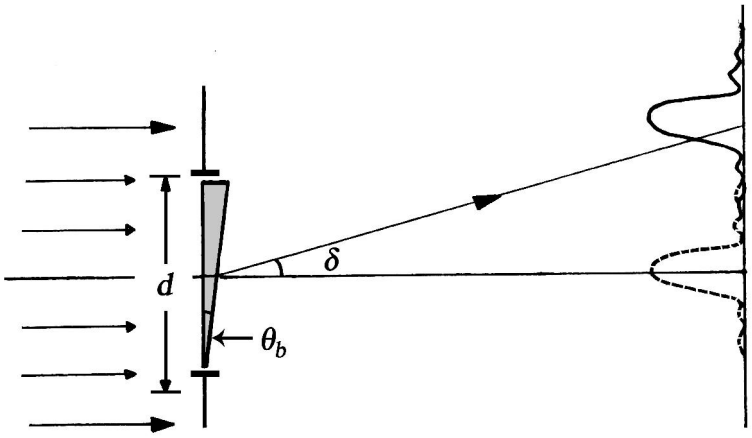
πρόσπτωση ενός επιπέδου μετ. κύματος στο φράγμα δεν είναι η απορρόφηση του φωτός από σημείο σε σημείο του (φράγμα πλάτους), αλλά η φάση του (φράγμα φάσης).

Το επίπεδο λοιπόν μετ. κύματος κατά την πρόσπτωσή του σ' αυτού του είδους το φράγμα, 'βλέπει' κατ' αρχή μια περιοδικότητα περιόδου d. Οπότε το περιθλόμενο πεδίο (σε συνθήκες μακρινού πεδίου), θα περιλαμβάνει ένα παράγοντα συμβολής που θα είναι πανομοιότυπος με αυτόν που υπολογίσαμε για το φράγμα πλάτους διερχομένου φωτός. Και θα δίνεται από τον γνωστό σε εμάς παράγοντα συμβολής: $\frac{1-e^{iN\Delta}}{1-e^{i\Delta}}$ όπου $\Delta = kdsin\theta$. Πρόκειται για το δεύτερο όρο της (σχ. 7.6.1.2). Ο τελευταίος κατά τη διαδικασία του υπολογισμού της έντασης του φωτός παίρνει τη μορφή: $\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}$ (δεύτερος όρος της (σχ. 7.6.1.3)). Όπου:

$$\delta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \qquad (7.6.2.1)$$

Και όσον αφορά τώρα τον όρο ης περίθλασης, αυτός θα είναι το περιθλόμενο πεδίο που θα προκύψει από ένα από τα N επαναλαμβανόμενα 'στοιχεία' που απαρτίζουν

το φράγμα. Και στην προκειμένη περίπτωση το 'στοιχείο' θα συνίσταται από μια 'σχισμή' πλάτους d η οποία καλύπτεται από ένα διαφανές πρίσμα του ιδίου πλάτους και διαθλαστικής γωνίας θ_b. Το πρόβλημα αυτό το διαπραγματευόμαστε αναλυτικά στην (Άσκ. 4: Λυμένη). Και το συμπέρασμα που προκύπτει είναι το εξής όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.6.2.3): Το περιθλόμενο πεδίο (στην προσέγγιση του μακ-



(Σχ. 7.6.2.3)

ρινού πεδίου), θα είναι πανομοιότυπο με αυτό μιας σχισμής πλάτους d. Όμως θα είναι μετατοπισμένο σαν όλο κατά μια γωνία δ'. Όπου $\delta' = \theta_b(n-1)$, είναι η γνωστή από την θεωρία των λεπτών πρισμάτων, γωνία εκτροπής (βλ. Κεφ.4: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.3.3) (σχ. 3.3.3.8)) και θ_b η διαθλαστική του γωνία. πότε η κανονικοποιημένη μορφή του πεδίου θα δίνεται από τη σχέση: (Άσκ. 4: Λυμένη (σχ. 4,5)): $\Psi = \sin\beta'/\beta'$, όπου:

$$\beta' = \frac{\pi d\left[\sin\theta' - \theta_b(n-1)\right]}{\lambda} \tag{7.6.2.2}$$

Και όσον αφορά την ένταση του φωτός για τον παράγοντα περίθλασης θα είναι: $I_{\pi\varepsilon\rho.} \sim \sin^2\beta'/\beta'^2$. Επομένως τελικά, κατά την πρόσπτωση ενός επιπέδου μετ. κύματος σ' ένα διαμορφωμένο φράγμα διαπερατότητας, της μορφής που περιγράψαμε προηγουμένως, η κανονικοποιημένη ένταση του φωτός θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\sin^2\beta'}{\beta'^2}\cdot\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta} \tag{7.6.2.3}$$

όπου ο παράγοντας της περίθλασης θα διαμορφώνει τον παράγοντα της συμβολής.

Κατά τα γνωστά όμως από τη (σχ. 7.6.2.1), τα μέγιστα του προτύπου συμβολής τα συναντούμε για τις γωνίες θ που πληρούν τη σχέση: $\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = m\pi$ όπου: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. Ή:

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d} \qquad \text{με} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{7.6.2.4}$$

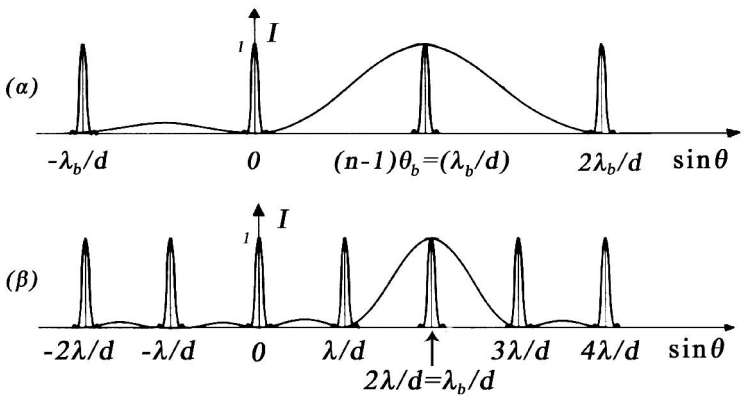
Και όσον αφορά το μέγιστο της περίθλασης, αυτό θα δίνονται από τη (σχ. 7.6.2.2) για $\beta' = 0$ ή όταν:

$$\sin\theta' = \theta_b\left(n-1\right) \tag{7.6.2.5}$$

Και προκειμένου το φράγμα να λειτουργήσει με τον βέλτιστο τρόπο, θα πρέπει το μέγιστο της περίθλασης να συμπέσει με ένα από τα μέγιστα συμβολής τάξης m. Δηλ. από τις (σχ. 7.6.2.4,5): $\theta = \theta'$ ή:

$$m\frac{\lambda}{d} = \theta_b\left(n-1\right) \tag{7.6.2.6}$$

Οπότε επιλέγοντας κατασκευαστικά το δ.δ. n και τη γωνία θ_b όπως και την περίοδο του φράγματος d, στη θέση του μέγιστου της τάξης $m = m_b$ συμβολής θα έχουμε το μέγιστο της περίθλασης. Και για τη συγκεκριμένη αυτή περίπτωση, το μ.κ.



(Σχ. 7.6.2.4)

$\lambda = \lambda_b$ θα το ονομάζουμε ***διαμορφωμένο μήκος κύματος (blazed wavelength)***. Θα πρέπει βέβαια ν' αναφέρουμε ότι οι εντάσεις των τάξεων συμβολής m εκτός της m_b

καταστέλλονται πλήρως, δεδομένου ότι συμπίπτουν με τα ελάχιστα του προτύπου περίθλασης.

Από φασματοσκοπική άποψη, εφόσον η προσπίπτουσα στο φράγμα ακτινοβολία είναι πολυχρωματική, κατά την ανάλυσή της οι συνιστώσες της θα κατανέμονται ένθεν και ένθεν του μ.κ. $\lambda = \lambda_b$, στο εσωτερικό του κεντρικού λοβού περίθλασης. Το φάσμα δηλ. της πηγής θα είναι εντοπισμένο μόνο σε μια περιοχή του επιπέδου παρατήρησης. Στο (Σχ. 7.6.2.4α) φαίνεται η γραφική παράσταση της (σχ. 7.6.2.3) συναρτήσει του $\sin\theta$ για $m = m_b = 1$. Οπότε: $\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_b}{d} = \theta_b(n-1)$. Επίσης από τη (σχ. 7.6.2.6) για $m = m_b = 2 \Rightarrow$ $\frac{2\lambda}{d} = \frac{\lambda_b}{d} = \theta_b(n-1)$. Οπότε $\lambda = \lambda_b/2$. Που σημαίνει ότι η θέση του μεγίστου της περίθλασης θ' αντιστοιχεί σε μ.κ. $\lambda = \lambda_b/2$ και θα συμπίπτει με τη θέση του δεύτερου μεγίστου συμβολής, όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.6.2.4β) κ.ο.κ. Στο (Σχ. 7.6.2.1.β) βλέπουμε την περίπτωση για την οποία: $(\lambda_b/2) < \lambda < \lambda_b$, όπου τότε η θέση του μέγιστου περίθλασης βρίσκεται μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου των μεγίστων συμβολής.

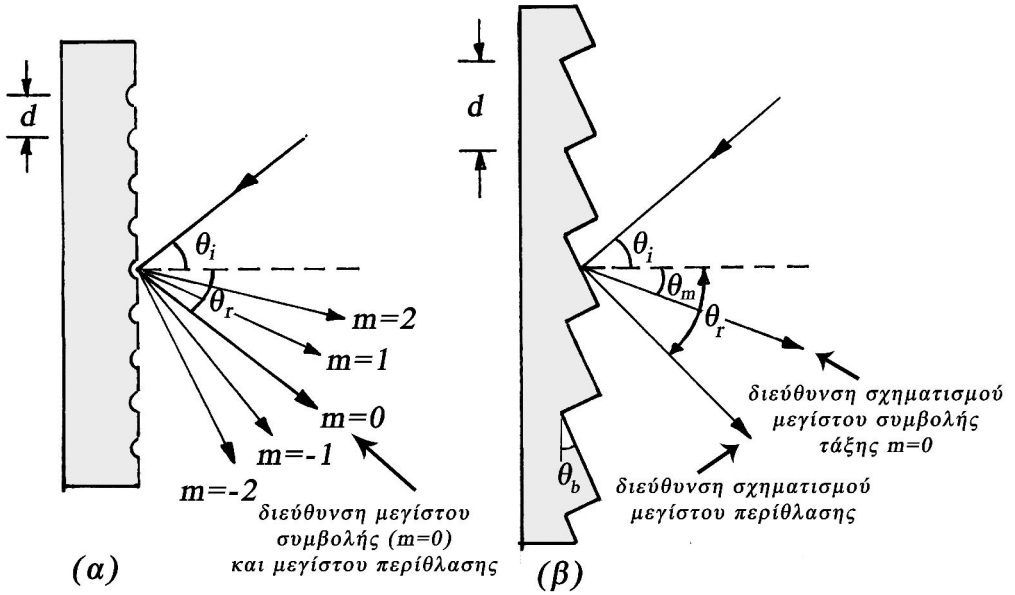
7.6.3 *Περίθλαση από φράγματα ανάκλασης. Περίθλαση από διαμορφωμένα φράγματα ανάκλασης*

Στη γενικότερη περίπτωση, τα φράγματα ανάκλασης συνίστανται από περιοδικότητες που δημιουργούνται σε αδιαφανή συνήθως υλικά. Οπότε το περιθλόμενο από αυτά φως διαδίδεται στην ίδια πλευρά με το προσπίπτον σ' αυτά μετ. κύματος. Τα πρώτα φράγματα αυτού του είδους ήταν τα λεγόμενα ***εγχάρακτα (ruled)***, όπου σε διαφανές γυαλί χαρασσόταν μηχανικά πυκνές αυλακώσεις ορισμένης περιόδου, που οι αποστάσεις τους ελεγχόταν με συμβολομετρικές μεθόδους. Σήμερα κυριαρχούν δύο άλλες μέθοδες δημιουργίας των ανάγλυφων: Η ολογραφική και αυτή με τη βοήθεια κατευθυνόμενης δέσμης ιόντων. Για την πρώτη, σε κατάλληλο επίπεδο υπόβαθρο, αναπτύσσεται ένα σταθερού πάχους φωτοευπαθές υλικό. Πάνω σ' αυτή την επιφάνεια προσπίπτουν συμβάλλοντας επίπεδα μετ. κύματος, τα οποία σχηματίζουν το λανθάνον είδωλο του φράγματος. Κατόπιν με κατάλληλη χημική επεξεργασία δημιουργούνται οι περιοδικότητες στον όγκο του υλικού, που συνιστούν το επιθυμητό φράγμα ανάκλασης. Στη δεύτερη περίπτωση, πολύ λεπτές δέσμες ιόντων υψηλής ενέργειας 'χαράσσουν' ένα κατάλληλο υλικό που βρίσκεται επιστρωμένο σε κατάλληλο υπόβαθρο, δημιουργώντας το φράγμα. Επίσης μαζική κατασκευή ανακλαστικών φραγμάτων σήμερα γίνεται με συμπίεση πλαστικών υμενίων ή φύλλων αλουμινίου πάνω σε κατάλληλες μήτρες προτύπων φραγμάτων. Τα φράγματα όμως αυτού του είδους είναι κακών προδιαγραφών και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν

για ερευνητικούς σκοπούς (π.χ. για αναλυτικά στοιχεία σε φασματοσκοπικά όργανα), αλλά μόνο για διαφημιστικούς λόγους.

Για πολύ πυκνά φράγματα ανάκλασης (δηλ. πολύ μεγάλου αριθμού 'γραμμών' (περιόδων) ανά μονάδα μήκους, η θεωρία που διέπει την περίθλαση του φωτός από την επιφάνειά τους – όπως ήδη έχουμε αναφέρει – δεν μπορεί να μην λάβει υπόψη της το διανυσματικό χαρακτήρα του φωτός. Π.χ. το μέγεθος της ***περιθλαστικής ικανότητας (diffraction efficiency)*** (που είναι ο λόγος της περιθλόμενης προς την προσπίπτουσα ένταση σ' ένα φράγμα) θα δούμε στα επόμενα ότι είναι διαφορετική, όταν το προσπίπτον στο φράγμα φως είναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα ή κάθετα στις γραμμές του φράγματος. Λόγω όμως της δυσκολίας που εμφανίζει αυτή η θεωρία, σε πρώτη προσέγγιση θα δεχτούμε το βαθμωτό χαρακτήρα του προσπίπτοντος ηλ. πεδίου και θα παραθέσουμε απλά τ' αποτελέσματά της. Στα επόμενα θα υπολογίσουμε την κατανομή της έντασης του περιθλόμενου φωτός στην προσέγγιση του μακρινού πεδίου, μόνο για τα λεγόμενα ***διαμορφωμένα φράγματα ανάκλασης (blazed reflection gratings)***.

Όσον αφορά τη διαφορά μεταξύ των κοινών εγχάρακτων και διαμορφωμένων φραγμάτων ανάκλασης, η τελευταία σχετίζεται με τη μορφολογία των ανάγλυφων περιοδικοτήτων που διέπει το κάθε φράγμα. Στο (Σχ. 7.6.3.1α) φαίνεται ένα



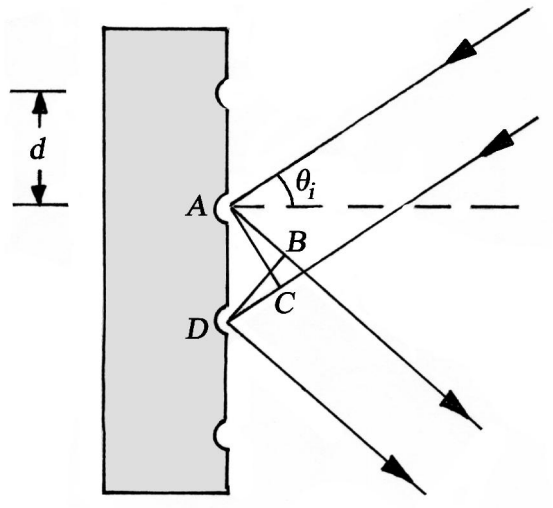
(Σχ. 7.6.3.1)

κοινό εγχάρακτο φράγμα ανάκλασης με περίοδο (απόσταση μεταξύ των αυλακώσεων) d. Ίδιας περιόδου d είναι και το διαμορφωμένο (Σχ. 7.6.3.1β) σε ορθογώνια σκαλοπάτια, με κλίση ως προς το επίπεδο μέρος του φράγματος ίση με γωνία θ_b. Αλλά οι περιθλαστικές του ιδιότητες διαφέρουν σημαντικά σε σχέση με αυτές του

πρώτου. Για το πρώτο αποδεικνύεται ότι το μέγιστο της ανακλώμενης (περιθλώμενης) ενέργειας το συναντούμε σε γωνία $\theta_r = \theta_i$. Όση δηλ. με αυτή της προσπίπτουσας στο φράγμα σε σχέση με την κάθετη σ' αυτό. Βέβαια και για τις δύο των περιπτώσεων, η συνθήκη για τη θέση σχηματισμού των μέγιστων συμβολής είναι η ίδια, δεδομένου ότι η προσπίπτουσα στο φράγμα δέσμη φωτός 'βλέπει' την ίδια περιοδικότητα d. Και δίνεται από τη γνωστή (και για το φράγμα διερχομένου φωτός σχέση:

$$d\left(\sin\theta_m - \sin\theta_i\right) = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots \tag{7.6.3.1}$$

Όπου θ_m η γωνία σχηματισμού του μέγιστου συμβολής τάξης m και θ_i η γωνία πρόσπτωσης στο φράγμα ενός επιπέδου μονοχρωματικού μετ. κύματος μ.κ. λ. Το μέγεθος: $d\left(\sin\theta_m - \sin\theta_i\right)$ όπως διευκρινίζεται στο (Σχ. 7.6.3.2) είναι η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης (περιθλώμενης)

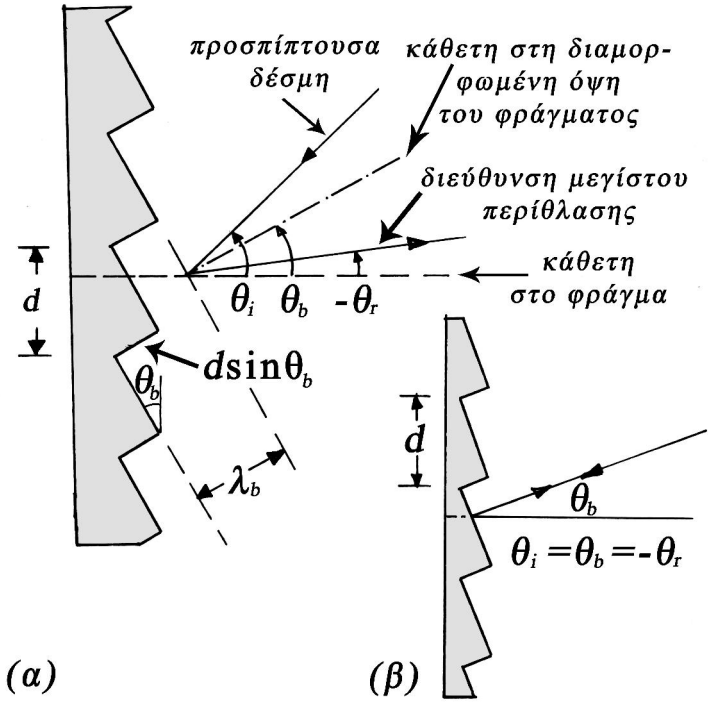


(Σχ. 7.6.3.2)

δέσμης. Για $\theta_i = \theta_m \equiv \left(\theta_r\right)$ (ως προς την κάθετη στο φράγμα) θα έχουμε την εμφάνιση της μηδενικής τάξης συμβολής ($m = 0$) και συμμετρικά προς αυτήν τις τάξεις: $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$ όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.6.3.1α). Επαναλαμβάνουμε εδώ ότι στις ίδιες θέσεις θα σχηματιστούν (δυνητικά) τα μέγιστα συμβολής και για την περίπτωση του διαμορφωμένου φράγματος ανάκλασης, για την ίδια βέβαια γωνία πρόσπτωσης θ_i του φωτός. Λέμε δυνητικά, γιατί όπως θα δούμε στα επόμενα, θα μπορούσαμε με κατάλληλη επιλογή της διαμορφωμένης γωνίας θ_b και της περιόδου d, όλα τα μέγιστα συμβολής να κατασταλούν, παραμένοντας μόνο ένα από αυτά. (π.χ. το τάξης m. Ενώ τα υπόλοιπα μέγιστα συμβολής να συμπίπτουν με τα μηδενικά

ελάχιστα της περίθλασης, οπότε και μηδενίζεται η έντασή τους. Το γεγονός αυτό συνιστά και το μέγιστο πλεονέκτημα των διαμορφωμένων φραγμάτων ανάκλασης έναντι των κοινών: Το ότι δηλ. όλη η περιθλώμενη ενέργεια δεν διασπείρεται σε διάφορες τάξεις συμβολής (οι οποίες όπως προείπαμε καταστέλονται) αλλά προς μια και μοναδική τάξη m. Θα προσπαθήσουμε αρχικά να δώσουμε μια απλοποιημένη ερμηνεία των προαναφερόμενων. Και στα αμέσως επόμενα θα παραθέσουμε (χωρίς απόδειξη) την αναλυτική σχέση που διέπει την περίθλαση του φωτός από διαμορφωμένα φράγματα ανάκλασης στη βαθμωτή της προσέγγιση.

Η αποτελεσματικότητα του τρόπου κατασκευής του διαμορφωμένου φράγματος ανάκλασης και ο ρόλος της γωνίας διαμόρφωσης θ_b, μπορούν να φανούν με τον ακόλουθο τρόπο. Στο (Σχ. 7.6.3.3α) βλέπουμε την γενική περίπτωση προσ-



(Σχ. 7.6.3.3)

πίπτουσας δέσμης (επίπεδο μετ. κύματος) μονοχρωματικού κατ' αρχή φωτός, με γωνία θ_i ως προς την κάθετη στο φράγμα. Επίσης φαίνεται η διεύθυνση διάδοσης (με γωνία $-\theta_r$) του μέγιστου της περιθλώμενης ενέργειας. Αποδεικνύεται στη γενικότερη περίπτωση των διαμορφωμένων φραγμάτων ανάκλασης ότι: $\theta_i \neq \theta_r$. Ενώ όπως ήδη αναφέραμε για τα κοινά ανακλαστικά φράγματα, ισχύει η ισότητα μεταξύ των γωνιών θ_i, θ_r. Ας υποθέσουμε τώρα ότι: $\theta_i = \theta_b = -\theta_r$ (Σχ. 7.6.3.3β) και ότι το ύψος της βαθμίδας (σκαλοπατιού) (facet): $d\sin\theta_b$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του

μισού του μ.κ. λ της προσπίπτουσας στο φράγμα μονοχρωματικής ακτινοβολίας. Δηλ. ισχύει:

$$d\sin\theta_b = p\frac{\lambda}{2} \qquad p = 1,2,3,\cdots \tag{7.6.3.2}$$

Τότε το φως που οπισθοανακλάται από μια βαθμίδα, θα βρίσκεται σε φάση με αυτό της επόμενης. Και για δεδομένα d,θ_b η διαδικασία θα μπορούσε να παρομοιαστεί (αν και πρόκειται για περίθλαση από διαδοχικές βαθμίδες του φράγματος), σαν κατοπτρική οπισθοανάκλαση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Τότε τα πανομοιότυπα μεταξύ τους περιθλώμενα πεδία από την κάθε βαθμίδα συμβάλλουν μεταξύ τους (με την προαναφερόμενη διαφορά φάσης) και μας δίνουν (στην προσέγγιση του μακρινού πεδίου) το τελικό περιθλώμενο από το διαμορφωμένο φράγμα ανάκλασης ηλ. πεδίο. Το τελευταίο θ' αποτελείται κλασσικά από δύο παράγοντες. Αυτόν της συμβολής, ο οποίος και θα διαμορφώνεται από τον παράγοντα της περίθλασης.

Με τη λογική αυτή βέβαια παραλείπουμε τη μικρή ποσότητα περιθλώμενου φωτός που θα μπορούσε να προέλθει από τις μικρές ασυνέχειες μεταξύ των βαθμίδων. Και στο βαθμό που θα θεωρήσουμε ότι αυτό είναι αμελητέο, μπορούμε να δεχτούμε ότι η συνολική προσπίπτουσα δέσμη φωτός ανακλάται (περιθλάται) με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τελικά καμία ποσότητα ενέργειας δεν περιθλάται προς άλλες διευθύνσεις. Επειδή όμως: $\theta_i = \theta_b = -\theta_r$ (το αρνητικό πρόσημο της θ_r οφείλεται στο ότι έχουμε διάδοση αντίθετη με τη διεύθυνση πρόσπτωσης), τότε θα είναι: $-\sin\theta_i = \sin\theta_r = \sin\theta_b$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η (σχ. 7.6.3.1) που συνιστά την εξίσωση φράγματος και που καθορίζει τα μέγιστα συμβολής, επειδή $\theta_m = \theta_r$ γίνεται:

$$d\left(\sin\theta_r - \sin\theta_i\right) = m\lambda = 2d\sin\theta_b \tag{7.6.3.3}$$

η οποία αν συγκριθεί με την 9σχ. 7.6.3.2) μας δίνει: $m = p$ όπου τώρα $m \neq 0$. Επομένως για $m = p = 1$ από τη (σχ. 7.6.3.3) θα έχουμε:

$$\lambda = \lambda_b = 2d\sin\theta_b \tag{7.6.3.4}$$

Το μ.κ. $\lambda = \lambda_b$ (που η τιμή του είναι διπλάσια του μήκους της βαθμίδας του φράγματος), το ονομάζουμε ***διαμορφωμένο μήκος κύματος (blazed wave length)*** και καθορίζεται από τις κατασκευαστικές παραμέτρους d,θ_b του φράγματος. Επομένως αν κατ' αντίστροφο τρόπο και κάθετα προς τις βαθμίδες προσπέσει ένα επίπεδο μετ. κύματος με μ.κ. $\lambda = \lambda_b$, από τη (σχ. 7.6.3.2) βρίσκουμε: $p = (m) = 1$, το οποίο είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον να σχολιαστεί. Πράγματι το $m = 1$ σημαίνει ότι κατά τη

διεύθυνση της οπισθοανακλώμενης της προσπίπτουσας δέσμης της καθέτου στις βαθμίδες του φράγματος, βρίσκεται το μέγιστο πρώτης τάξης συμβολής. Αλλά επίσης για $p=1$ $(p=m=1)$ θα έχουμε και τη διάδοση του μέγιστου της περιθλώμενης δέσμης. Επομένως για την περίπτωση της πρόσπτωσης στο φράγμα πολυχρωματικής ακτινοβολίας, το αναλυμένο πλέον φάσμα της πρώτης τάξης συμβολής ($m=1$) (της (σχ. 7.6.3.1)), θα βρίσκεται (ένθεν και ένθεν του μ.κ. λ_b) στην περιοχή που αντιστοιχεί στον κεντρικό λοβό περίθλασης ($p=1$) (της (σχ. 7.6.3.2)). Αν τώρα: $p=2,3,\cdots$ δηλ. αν οι διαφορές των οπτικών δρόμων για δύο οπισθοανακλώμενες διπλανών βαθμίδων του φάσματος είναι $2\lambda,3\lambda,\cdots$, τότε πλέον στη θέση του μέγιστου της περίθλασης, θα βρίσκεται το μέγιστο συμβολής τάξης: $m=2,3,\cdots$ για $\lambda=\frac{\lambda_b}{2},\frac{\lambda_b}{3},\cdots$, όπως προκύπτει από τη (σχ. 7.6.3.2).

Μια προσεγγιστική βαθμωτή θεωρία για τον υπολογισμό της κατανομής της έντασης του φωτός που προκύπτει κατά την πρόσπτωσή του σε διαμορφωμένο φράγμα ανάκλασης στη κανονικοποιημένη του μορφή, δίνεται από τη σχέση:

$$I=\frac{\sin^2\pi du'}{\left(\pi du'\right)^2}\cdot\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta} \tag{7.6.3.5}$$

όπου:

$$u'=u-\frac{2\sin\theta_b}{\lambda}=\frac{\sin\theta_r-\sin\theta_i}{\lambda}-\frac{2\sin\theta_b}{\lambda} \tag{7.6.3.6}$$

και

$$\delta=\frac{\pi d\left(\sin\theta_m-\sin\theta_i\right)}{\lambda} \tag{7.6.3.7}$$

Ο πρώτος παράγοντας της (σχ. 7.6.3.5) είναι αυτός της περίθλασης, ο οποίος και διαμορφώνει τον δεύτερο που είναι αυτός της συμβολής. Γίνεται όμως σαφές από τη (σχ. 7.6.3.6), ότι το πρότυπο περίθλασης στην προκειμένη περίπτωση είναι σαν όλο μετατοπισμένο. Πράγματι το μέγιστο της κατανομής το συναντούμε κατά τα γνωστά όταν $\pi du'=0$ ή όταν $\left(\sin\theta_r-\sin\theta_i\right)-2\sin\theta_b=0$ οπότε:

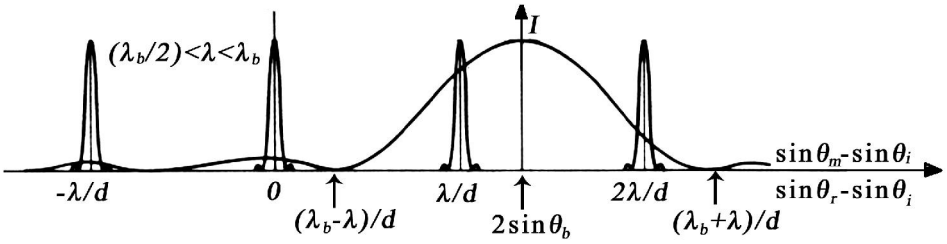
$$\sin\theta_r=\sin\theta_i+2\sin\theta_b \tag{7.6.3.8}$$

και όχι όταν $\sin\theta_r-\sin\theta_i=0$, σχέση που ισχύει για το κοινό φράγμα ανάκλασης. Επίσης οι σχέσεις των ελάχιστων περίθλασης προκύπτουν από τη συνθήκη: $\pi du'=m\pi \quad m=\pm1,\pm2,\cdots$. Επομένως τα ελάχιστα θα βρίσκονται στις θέσεις:

$$\sin\theta_r - \sin\theta_i = m\frac{\lambda}{d} \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{7.6.3.9}$$

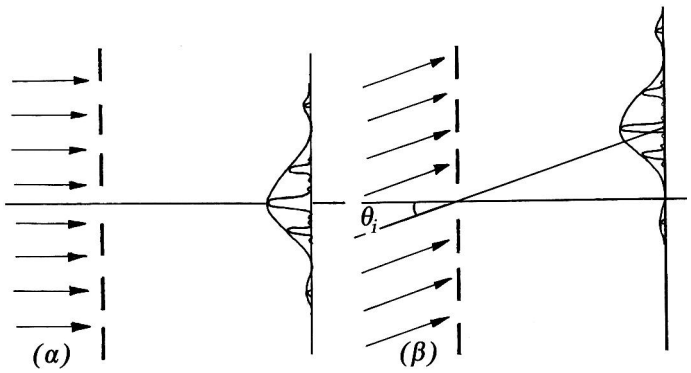
σε σχέση με τη θέση του κύριου μεγίστου. Οπότε διαπιστώνουμε εδώ το γεγονός ότι οι αποστάσεις των μέγιστων συμβολής, είναι ίσες μεταξύ των ελάχιστων περίθλασης.

Με βάση τα προαναφερόμενα, η γραφική παράσταση της κατανομής της έντασης που μας δίνει η (σχ. 7.6.3.5) συναρτήσει του $\sin\theta_r - \sin\theta_i$ για τον παράγοντα περίθλασης και συναρτήσει του $\sin\theta_m - \sin\theta_i$ για τον παράγοντα συμβολής όπου: $\frac{\lambda_b}{2} < \lambda < \lambda_b$ δίνεται στο (Σχ. 7.6.3.4), σε σχέση με αυτά του διερχομένου φωτός, όπως τα τελευταία έχουν περιγραφεί στην (§ 7.6.1) και για τα οποία το μέγιστο της περίθλασης συμπίπτει με το μέγεθος της μηδενικής τάξης συμβολής ανεξάρτητα



(Σχ. 7.6.3.4)

από τη γωνία πρόσπτωσης του φωτός στο φράγμα, όπως φαίνεται στα (Σχ. 7.6.3.5α,β). Δηλ. αυτό που βλέπουμε άμεσα από το (Σχ. 7.6.3.4) (διαμορφωμένο



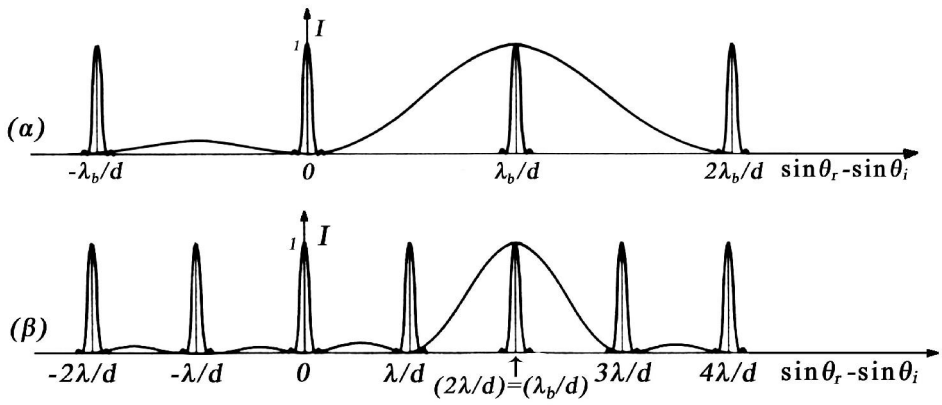
(Σχ. 7.6.3.5

φράγμα), είναι η χαρακτηριστική ασύμμετρη τοποθέτηση του προτύπου περίθλασης σχετικά με το πρότυπο της μηδενικής τάξης συμβολής. Δηλ. ότι το μέγιστο της πε-

ρίθλασης μπορεί να μετατοπιστεί σε τάξεις συμβολής εκτός της μηδενικής. Που σημαίνει σε περιοχές που εντοπίζεται αναλυμένο το φάσμα λόγω της πρόσπτωσης στο φράγμα πολυχρωματικής ακτινοβολίας. Άρα τελικά μπορούμε να έχουμε τη διάθεση στον κεντρικό λοβό περίθλασης πολύ περισσότερης ενέργειας κατά τη διαδικασία της ανάλυσης του φωτός. Το γεγονός αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές για τις περιπτώσεις όπου:

$$\lambda = \lambda_b, \;\; \lambda_b/2, \;\; \lambda_b/3, \cdots \qquad (7.6.3.10)$$

Τότε το μέγιστο της περίθλασης συμπίπτει μ' ένα από τα μέγιστα της συμβολής. Όλα τα υπόλοιπα μέγιστα συμβολής καταστέλλονται επειδή συμπίπτουν με τα ελάχιστα περίθλασης. Προσπίπτοντας λοιπόν πολυχρωματικό φως στο διαμορφωμένο φράγμα, αυτό που θα περιμένουμε είναι η ανάλυσή του γύρο από το μ.κ. $\lambda = \lambda_b/m$ της τάξης συμβολής m, στο εσωτερικό της περιοχής που καθορίζεται από τον κεντρικό λοβό του προτύπου περίθλασης με κέντρο την προαναφερόμενη τάξη. Η περίπτωση αυτή φαίνεται για $\lambda = \lambda_b$ και $\lambda = \lambda_b/2$ * στα (Σχ. 7.6.3.6α,β). Αν λοιπόν



(Σχ. 7.6.3.6)

επιλέξουμε κατασκευαστικά το διαμορφωμένο μ.κ. $\lambda_b \left(= 2d \sin\theta_b\right)$ (δηλ. τα d και θ_b) ενός φράγματος ανάκλασης, μπορούμε να κατευθύνουμε όλη την περιθλώμενη ενέργεια της προσπίπτουσας δέσμης σε μια διεύθυνση που αντιστοιχεί σε μια καθορισμένη τάξη συμβολής $m \neq 0$ όπου και το μέγιστο της περίθλασης. Σήμερα σ' όλα τα αναλυτικά όργανα φασματοσκοπίας όπως οιφασματογράφοι, οι μονοχρωμάτορες κλπ), χρησιμοποιούνται διαμορφωμένα φράγματα ανάκλασης.

* M.V. Klein: 'OPTICS' John Wiley & Sons Inc. N.Y. (1970) (Ch. 7).

7.6.4 *Θεωρία Φασματοσκοπίας φραγμάτων περίθλασης*

Μας ενδιαφέρει στα επόμενα και για το λόγο αυτό θα περιγράψουμε, ορισμένες από τις φασματοσκοπικές ιδιότητες των φραγμάτων περίθλασης. Δηλ. ιδιότητες που σχετίζονται με την ικανότητά τους ν' αναλύουν το φως που προέρχεται από κάθε είδους πηγές. Όσον αφορά τα φάσματα των πηγών φωτός και την κατάταξή τους, αυτή έγινε στο: (Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.4.4)).

Έστω τώρα ότι διαθέτουμε μια πηγή φωτός ατμών Υδραργύρου (Hg) της οποίας κατά τα γνωστά το φάσμα είναι γραμμικό. Δηλ. συνίσταται από διακεκριμένες φασματικές γραμμές. Με την παρεμβολή μετά την πηγή (σε επίπεδο μετ. κύματος) ενός συμβολομετρικού φίλτρου (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (§ 6.8.3)), απομονώνουμε την πράσινη φασματική γραμμή, κεντρικού μ.κ. $\lambda_0 = 546\text{nm}$. Παρεμπιπτόντως αναφέρουμε ότι η τελευταία λόγω των διαφόρων μηχανισμών συχνοτικής διεύρυνσης (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός ΘΕΜΑ 3), διαθέτει ένα ορισμένο φασματικό εύρος $\delta\lambda$. Το φως αυτό το συγκεντρώνουμε μ' ένα φακό πάνω σε μια πολύ μικρού πλάτους σχισμή. Στη συνέχεια το αποκλίνον από τη σχισμή αυτή κυλινδρικό μετ. κύματος, μ' ένα θετικό φακό ορισμένης εστιακής απόστασης, το καθιστούμε επίπεδο. Και με αυτό τελικά φωτίζουμε κάθετα ή υπό κλίση ένα φράγμα περίθλασης διερχομένου ή ανακλωμένου φωτός.

Όλων των ειδών τα φράγματα που περιγράψαμε στα προηγούμενα, διαθέτουν ένα ορισμένο αριθμό 'γραμμών' (περιόδων) ανά mm. Για παράδειγμα, ένα φράγμα ανακλωμένου φωτός, έχει διαστάσεις $5\times5\text{cm}$ και εγγεγραμμένες $600\,\text{γραμμές/mm}$. Που σημαίνει ότι ο αριθμός των γραμμών του για όλο το εύρος του φράγματος θα είναι $N = 3\times10^4$. Όσον αφορά τώρα το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου που προκύπτει μέσω ενός μετασχηματιστή φακού στο εστιακό του επίπεδο, μετά την πρόσπτωση σ' αυτό του επιπέδου (μονοχρωματικού κατ' αρχή) μετ. κύματος, θα συνίσταται κατά τα γνωστά από τον όρο της συμβολής καθώς και τον όρο της περίθλασης που διαμορφώνει το πρώτο. Θα δούμε στα επόμενα ότι οι χωρικές διαστάσεις του φράγματος, δρουν καθοριστικά στο γωνιακό και κατά προέκταση στο χωρικό εύρος των κατανομών. Δηλ. τη μορφολογία των κατανομών έντασης των διαφόρων τάξεων συμβολής. Το γεγονός αυτό έχει σαν συνέπεια, να υπάρχουν περιορισμοί όσον αφορά το να διακρίνουμε κατανομές έντασης που αφορούν διαφορετικά μ.κ. συνήθως πολύ κοντά μεταξύ τους, κατά την ανάλυση του φωτός, όταν το φράγμα φωτιστεί με πολυχρωματική ακτινοβολία. Ένα από τα βασικά μεγέθη που προσδιορίζει αυτού του είδους τους περιορισμούς στη μελέτη της ανάλυσης των φασμάτων μέσω των φραγμάτων περίθλασης, είναι το γωνιακό εύρος $\Delta\theta$ (και κατά προέκταση το χωρικό εύρος Δx) με το οποίο 'φαίνονται' οι κατανομές της έντασης των διαφόρων τάξεων συμβολής. Εκκινώντας από τον ορισμό αυτού του μεγέθους, στα επόμενα θα μελετήσουμε και τις έννοιες του γωνιακού δι-

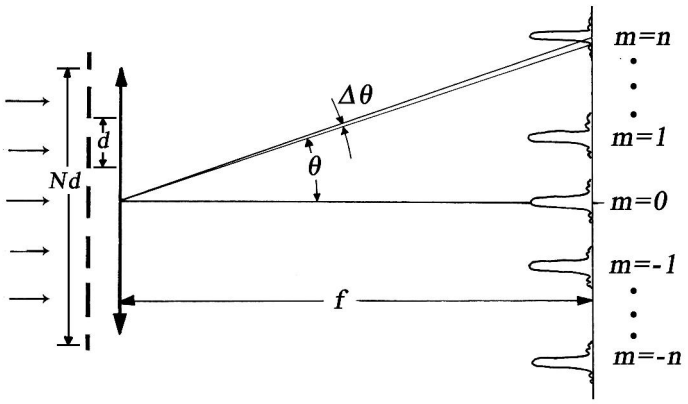
ασκεδασμού, του γραμμικού διασκεδασμού, καθώς και της διακριτικής ικανότητας των φραγμάτων.

α) ***Γωνιακό εύρος των κατανομών συμβολής***

Γνωρίζουμε ότι κατά την περίθλαση Fraunhofer από φράγμα N γραμμών (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 3), το γωνιακό άνοιγμα $\Delta\theta$ μεταξύ του κυρίου μεγίστου συμβολής τάξης m (Σχ. 7.6.4.1) σε γωνία θ και του πρώτου ελάχιστου, δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \qquad (7.6.4.1)$$

Όπου N ο αριθμός των γραμμών του φράγματος (περιόδων) και d η περίοδός του. ***Γωνιακό εύρος (angular width)*** ονομάζουμε τη γωνία $2\Delta\theta$ με την οποία φαίνεται



(Σχ. 7.6.4.1)

το συγκεκριμένο μέγιστο και οφείλεται στη διεύρυνση των επί μέρους κατανομών που προκαλεί το φράγμα λόγω των συγκεκριμένων χωρικών του ορίων. Από τη (σχ. 7.6.4.1) βλέπουμε ότι είναι αντιστρόφως ανάλογο με το πλάτος Nd του φράγματος. Δηλ. όσο το πλάτος του φράγματος γίνεται μεγαλύτερο, τόσο τα μέγιστα οξύνονται. Και τελικά τόσο μεγαλύτερη δυνατότητα έχουμε να ξεχωρίσουμε μεταξύ τους δύο φασματικές γραμμές (κατανομές συμβολής) παραπλήσιου μήκους κύματος.

β) ***Γωνιακός διασκεδασμός***

Πρόκειται για τον γωνιακό διαχωρισμό $\Delta\theta$ που επιτυγχάνεται για δύο φασματικές γραμμές (κατανομές εντάσεων συμβολής) διαφορετικών μηκών κύματος λ_1, λ_2 τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους κατά $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{D} \equiv d\theta / d\lambda \tag{7.6.4.2}$$

και προκύπτει από τη διαφόριση της εξίσωσης του φράγματος (για πλάγια πρόσπτωση σ' αυτό με γωνία θ_i): $d\left(\sin\theta_r - \sin\theta_i\right) = m\lambda \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ για $\theta_i =$ σταθ. Οπότε: $\cos\theta d\theta = \left(m/d\right) d\lambda$ και άρα:

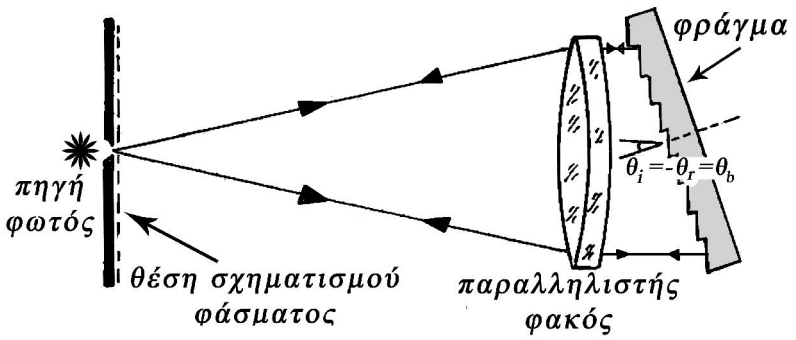
$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \tag{7.6.4.3}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι θα έχουμε τόσο μεγαλύτερο διαχωρισμό, όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη συμβολής m και όσο μικρότερη είναι η περίοδος του φράγματος.

Τα προηγούμενα, ισχύουν για φράγματα διερχομένου φωτός και ανακλωμένου. Σε πολλές περιπτώσεις βέβαια τα διαμορφωμένα (blazed) φράγματα ανάκλασης, διευθετούνται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η πρόσπτωση να γίνεται κάθετα (ή σχεδόν κάθετα) προς τις βαθμίδες του φράγματος(Σχ. 7.6.3.3β). Στην περίπτωση αυτή: $\theta_i = \theta_b = -\theta_r$ οπότε: $d\left(\sin\theta_r - \sin\theta_i\right) = m\lambda \Rightarrow 2d\sin\theta_r = m\lambda \Rightarrow m = \left(2d\sin\theta_r\right)/\lambda$ και επειδή: $d\theta/d\lambda = m/d\cos\theta \;\Rightarrow$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2\tan\theta_r}{\lambda} = \frac{2\tan\theta_i}{\lambda} \;\; \left(-\theta_r = \theta_i\right) \tag{7.6.4.4}$$

Άρα ο γωνιακός διασκεδασμός γίνεται ανεξάρτητος του d. Και αυτός ο τρόπος τοποθέτησης του φράγματος (Σχ. 7.6.4.2) ονομάζεται ***διευθέτηση αυτοπαραλληλισ-***



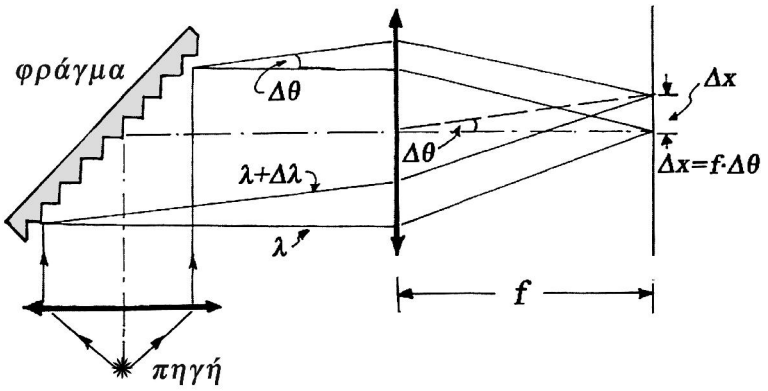
(Σχ. 7.6.4.2)

μού Litrow. Το άνοιγμα που αφήνεται στο διάφραγμα και φωτίζεται από την πηγή της οποίας θέλουμε να πάρουμε το φάσμα, συνιστά σημειακή πηγή φωτός που εκ-

πέμπει ένα σφαιρικό μετ. κύματος. Ένας αχρωματικός φακός (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.6.2)) το καθιστά επίπεδο και προσπίπτει στο διαμορφωμένο ανακλαστικό φράγμα σχεδόν κάθετα. Το ανακλώμενο (περιθλώμενο) μετ. κύματος, το οποίο τώρα συνίσταται από το αναλυμένο φάσμα γύρω από μια και μοναδική τάξη συμβολής m (συνήθως την $m=1$), επανακάμπτει μέσω του φακού και αναπτύσσεται πάνω στο διάφραγμα όπου μπορούμε και να το μελετήσουμε.

γ) *Γραμμικός διασκεδασμός*

Με το ***γραμμικό διασκεδασμό (linear dispersion)*** μετρούμε το εύρος $\Delta\lambda$ (μεταξύ δύο μ.κ. λ_1, λ_2), το οποίο εμφανίζεται ανά μονάδα μήκους Δx πάνω σ' ένα επίπεδο μετά την εστίαση του αναλυόμενου από το φράγμα φωτός, μέσω ενός οπτικού συστήματος (φακού, κατόπτρου κλπ). Δίνεται από το αντίστροφο του γραμμικού διασκεδασμού, επί την εστιακή απόσταση του απεικονίζοντος μέσου. Πράγματι με τη βοήθεια του (Σχ. 7.6.4.3) θα έχουμε: $1\Big/\left(\frac{d\theta}{d\lambda}f\right)=1\Big/\left(\frac{f\Delta\theta}{\Delta\lambda}\right)=1\Big/\frac{\Delta x}{\Delta\lambda}\Rightarrow$



(Σχ. 7.6.4.3)

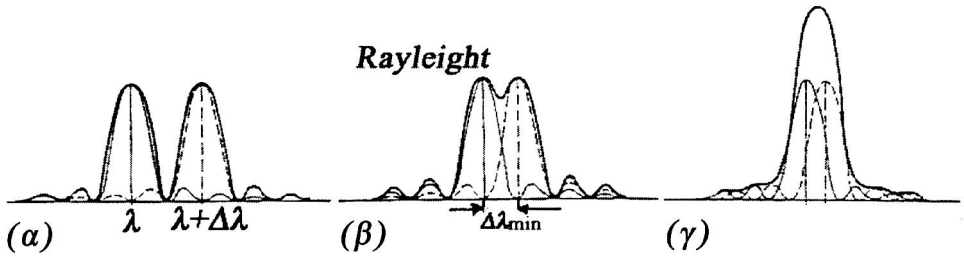
$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}=\frac{d\cos\theta}{mf} \qquad (7.6.4.5)$$

Που σημαίνει ότι το εύρος των μ.κ. $\Delta\lambda$ γίνεται πιο μικρό, όσο μεγαλώνει η τάξη m ή η εστιακή απόσταση f, καθώς και όσο μικραίνει η περίοδος d του φράγματος.

δ) *Διακριτική ικανότητα (ή ισχύς) του φράγματος*

Η έννοια της διακριτικής ικανότητας φράγματος, προκύπτει από την ανάγκη να γνωρίζουμε μέχρις ποιου ορίου έχουμε τη δυνατότητα να ξεχωρίσουμε δύο π.χ.

φασματικές γραμμές διαφορετικού μ.κ. που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Στο (Σχ. 7.6.4.4α) οι δύο γραμμές βρίσκονται σε αρκετά μεγάλη απόσταση, οπότε το τελικό αποτέλεσμα (η άθροιση των εντάσεών τους) θα μας δώσει δύο σαφώς διαχωρισμένες κατανομές. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για την περίπτωση του



(Σχ. 7.6.4.4)

(Σχ. 7.6.4.3γ) όπου οι γραμμές είναι τόσο κοντά μεταξύ τους έτσι ώστε η συνολική τους ένταση να μας δίνει μια τέτοια κατανομή, μέσω της οποίας δεν είναι δυνατόν να διακρίνουμε ότι πρόκειται για δύο. Σαν κριτήριο διαχωρισμού δύο γραμμών γίνεται γενικά αποδεκτό αυτό του Rayleigh: Όπου οι γραμμές μόλις θα διαχωρίζονται, όταν το μέγιστο της κατανομής της μιας, θα συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο της άλλης. Πράγματι τότε η συνολική κατανομή της έντασης είναι τέτοια (Σχ. 7.6.4.4β) έτσι ώστε μόλις να ξεχωρίζουμε τις κορυφές τους. Η ***διακριτική ικανότητα (resolving power)*** ενός φράγματος ορίζεται από το λόγο:

$$\mathcal{R} = \lambda / (\Delta\lambda)_{\min} \tag{7.6.4.6}$$

όπου: $(\Delta\lambda)_{\min}$ η μικρότερη διακριτή διαφορά μ.κ. που ονομάζεται και ***διακριτικό όριο (resolving limit)***. Μας είναι γνωστό όμως (σχ. 7.6.4.1) ότι:

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \tag{7.6.4.7}$$

όπου θ η γωνία με την οποία φαίνεται το m τάξης μέγιστο συμβολής. Οπότε από το συνδυασμό της (σχ. 7.6.4.7) και αυτής που αφορά το γωνιακό διασκεδασμό: $(\Delta\theta)_{\min} / \Delta\lambda = m/d\cos\theta$ βρίσκουμε:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = mN \tag{7.6.4.8}$$

Ή επειδή: $d(\sin\theta_r - \sin\theta_i) = m\lambda$ βρίσκουμε τελικά:

$$\mathcal{R} = \frac{Nd\left(\sin\theta_r - \sin\theta_i\right)}{\lambda} \qquad (7.6.4.9)$$

Δηλ. η διακριτική ικανότητα του φράγματος είναι ανάλογη του πλάτους του φράγματος $N \cdot d$, της γωνίας πρόσπτωσης, καθώς και αντιστρόφως ανάλογη του λ.

Παράδειγμα

Ποιο είναι το διακριτικό όριο ενός φράγματος που το πλάτος του είναι 50mm ($500\,\text{γρ/mm}$) στην περιοχή του μ.κ. $\lambda = 555\text{nm}$ για την τάξη $m = 2$.

- Ο αριθμός των γραμμών που περιλαμβάνονται στο πλάτος των 50mm θα είναι $N = 25000$. Τότε για $m = 2$ και $\lambda = 555\text{nm}$ από τη (σχ. 7.6.4.8) βρίσκουμε: $(\Delta\lambda)_{\min} = 0.0111\text{nm}$. Δηλ. το φράγμα αυτό στην περιοχή του μ.κ. των 555nm, μπορεί να διαχωρίσει δύο γραμμές που η διαφορά τους είναι περίπου το ένα δέκατο του Å και η διακριτική του ικανότητα $\lambda/\Delta\lambda$ θα έχει την τιμή: 5×10^4.

Το κάθε φράγμα έχει ένα όριο στη διακριτική του ικανότητα. Αυτό δίνεται από τη (σχ. 7.6.4.9) για $\theta_i = -\theta_r = 90^0$ (εφαπτομενική πρόσπτωση της προς ανάλυση δέσμης φωτός). Οπότε: $\sin\theta_r - \sin\theta_i = 2$ και επομένως:

$$\mathcal{R}_{max} = 2Nd/\lambda \qquad (7.6.4.10)$$

Για την περίπτωση της διευθέτησης αυτοπαραλληλισμού Litrow για την οποία όπως αποδείξαμε (σχ. 7.6.4.4): $\Delta\theta/\Delta\lambda = 2\tan\theta_r/\lambda$ $(\theta_i = -\theta_r)$ (με προσπίπτουσα και ανακλώμενη στην ίδια πλευρά της κάθετης στο φράγμα), επειδή: $\Delta\theta = \lambda/N\cos\theta$ θα έχουμε:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2Nd\sin\theta_i}{\lambda} \qquad (7.6.4.11)$$

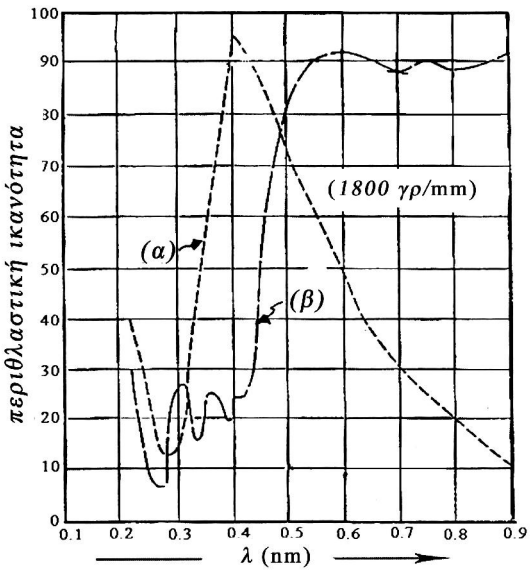
Αν το φράγμα του προηγούμενου παραδείγματος το χρησιμοποιήσουμε στη διευθέτηση αυτοπαραλληλισμού για την οποία: $\theta_i = 75^0$, $\lambda = 555\text{nm}$ και $Nd = 50\text{mm}$, τότε: $R = 1.7\times10^5$.

Θα πρέπει τέλος ν' αναφέρουμε εδώ, ότι τα αντίστοιχα με τα προαναφερόμενα φασματοσκοπικά μεγέθη για την περίπτωση που σαν αναλυτικά στοιχεία χρησιμοποιούμε τα πρίσματα, δίνονται στο (Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.4.1)).

Περιθλαστική ικανότητα διαμορφωμένου ανακλαστικού φράγματος

Σαν ***περιθλαστική ικανότητα (diffraction efficiency)*** φράγματος ορίζουμε το λόγο της περιθλώμενης από αυτό ισχύος προς την προσπίπτουσα σ' αυτό. Ο παράγοντας αυτός θα εξαρτάται από το μ.κ., γεγονός το οποίο μπορεί να γίνει εμφανές από τη (σχ. 7.6.3.4). Από αυτήν βλέπουμε ότι για ένα συγκεκριμένο φράγμα με $\lambda_b = 2d\sin\theta_b$ όπου λ_b το διαμορφωμένο μ.κ. (και θ_b η γωνία διαμόρφωσης), θα έχουμε μέγιστη περιθλώμενη για προσπίπτον μ.κ. $\lambda = \lambda_b$. Γίνεται φανερό ότι για το ίδιο φράγμα και για μ.κ. $\lambda \neq \lambda_b$ η περιθλώμενη ισχύς θα είναι μικρότερη, όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.6.3.4) για $\lambda_b/2 < \lambda < \lambda_b$, για την περιοχή διασκεδασμού γύρω από το μ.κ. λ_b.

Στη γενικότερη περίπτωση μελέτης της περίθλασης από ένα πυκνό σχετικά φράγμα ανάκλασης θα πρέπει (το έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου), να λάβουμε υπόψη μας τη διανυσματική φύση της έντασης του ηλ. πεδίου του προσπίπτοντος φωτός (διανυσματική θεωρία της περίθλασης του φωτός). Το γεγονός αυτό οδηγεί στον υπολογισμό διαφορετικών περιθλαστικών ιδιοτήτων για τις περιπτώσεις που το πεδίο είναι πολωμένο κάθετα ή παράλληλα προς τις γραμμές του φράγματος. Στο (Σχ. 7.6.4.5) φαίνονται οι καμπύλες της περιθλασ-



(Σχ. 7.6.4.5)

τικής ικανότητας φράγματος ανάκλασης για τις περιπτώσεις: α) Όπου το προσπίπτον πεδίο είναι παράλληλα πολωμένο με τις γραμμές του φράγματος και β) Όταν αυτό είναι κάθετο. Το φράγμα είναι 1800 γρ./mm και το διαμορφωμένο μ.κ. είναι

$\lambda_b \simeq 500\text{nm}$. Είναι κατασκευασμένο ολογραφικά και ο γραμμικός του διασκεδασμός για $\lambda = \lambda_b$ είναι $1.7\,\text{nm/mm}$. Για απόδοση πάνω από 20% μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μ.κ. μεταξύ των 300nm και 800nm.

Στην περίπτωση που το προσπίπτον φως είναι φυσικό, τότε κατά τα γνωστά λόγω της πλήρους συμμετρίας του, μπορούμε να το αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες κάθετες και ασύμφωνες μεταξύ τους, που θα έχουν την ίδια ένταση. Η μία από αυτές θα είναι κάθετη με τις γραμμές του φράγματος και η άλλη παράλληλη. Η συνολικά περιθλώμενη ένταση του φωτός από το φράγμα θα είναι το άθροισμα των εντάσεων της κάθετης και της παράλληλης προς τις γραμμές του φράγματος συνιστωσών. Θα πρέπει τέλος να επισημάνουμε ότι η περιθλαστική ικανότητα ενός φράγματος μεταβάλλεται με την παράμετρο m της αντίστοιχης τάξης. Γενικά όσο αυξάνεται η τάξη m, τόσο η περιθλαστική ικανότητα ελαττώνεται.

Η επικάλυψη των τάξεων

Από την εξίσωση: $d\left(\sin\theta_r - \sin\theta_i\right) = m\lambda$ του φράγματος, βλέπουμε ότι για δεδομένη περίοδο d και γωνίες θ_r, θ_i το γινόμενο:

$$m\lambda = \text{σταθ.} \tag{7.6.4.12}$$

Δηλ. αν η τάξη m διπλασιαστεί και το λ υποδιπλασιαστεί, το γινόμενό του παραμένει σταθερό. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η προσπίπτουσα στο φράγμα ακτινοβολία είναι μια συνεχής κατανομή μεταξύ 200nm και 1000nm. Τότε όπως φαίνεται από τον (Πίν. 7.6.4.6) η θέση που περιθλάται η ακτινοβολία των 800nm τάξης $m = 1$ θα ταυτίζεται με αυτήν της ακτινοβολίας των 400nm τάξης $m = 2$, καθώς επίσης και αυτή των 266.66nm τάξης $m = 3$ κ.ο.κ. Δηλ. θα έχουμε επικάλυψη των διαφόρων

Τάξη	**Μήκος κύματος (nm)**				
m=1	200	400	600	800	1000
m=2	(100)	200	300	400	500
m=3	(66.6)	(133.3)	200	266.6	333.3
m=4	(50)	(100)	(150)	200	250

(Πίν. 7.6.4.6)

τάξεων του φάσματος. Οι ακτινοβολίες με μ.κ. που είναι γραμμένα μέσα σε παρενθέσεις, στην πραγματικότητα δεν εμφανίζονται επειδή σαν υπεριώδεις με μ.κ. κάτω

των 190nm απορροφούνται από τον αέρα. Αν θέλουμε ένας ανιχνευτής στην έξοδο ενός φασματογράφου φράγματος να καταγράψει π.χ. το φάσμα τάξης $m=1$ μεταξύ των ορίων: $800\text{nm}-400\text{nm}$, τότε θα πρέπει στην είσοδό του να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα φίλτρα που θ' απορροφούν τις ακτινοβολίες κάτω των 400nm.

Πιο αναλυτικά, αν δύο φασματικές γραμμές μ.κ. λ και $\lambda+\Delta\lambda$ διαδοχικών τάξεων αντίστοιχα $m+1$ και m συμπίπτουν ακριβώς, τότε θα ισχύει:

$$d\left(\sin\theta_r-\sin\theta_i\right)=\left(m+1\right)\lambda=m\left(\lambda+\Delta\lambda\right) \qquad (7.6.4.13)$$

Οπότε από τη σχέση αυτή βρίσκουμε:

$$\Delta\lambda=\Delta\lambda_{fsr}=\lambda/m \qquad (7.6.4.14)$$

όπου η διαφορά $\Delta\lambda_{fsr}$ ονομάζεται ***ελεύθερη φασματική περιοχή (free spectral range)***. Από φυσική άποψη εκφράζει τη μεγαλύτερη δυνατή διαφορά την οποία θα μπορούσαν να έχουν δύο φασματικές γραμμές με διαφορετικά μ.κ. στην περιοχή του μ.κ. λ του φάσματος, προκειμένου να μην έχουμε επικάλυψη των τάξεών τους m και $m+1$ αντίστοιχα. Η έννοια της ελεύθερης φασματικής περιοχής, είχε αναφερθεί και στην περίπτωση της μελέτης του συμβολόμετρου Fabry-Perrot σαν αναλυτικού στοιχείου. Δηλ. οργάνου λήψης των φασμάτων διαφόρων πηγών φωτός. Για την περίπτωση εκείνη, είχαμε υπολογίσει (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (§ 6.8.2)) ότι μεταξύ της διακριτικής ικανότητας: $\mathcal{R}\equiv\lambda/\Delta\lambda$ και ***της λεπτότητας (finesse)*** των κροσσών συμβολής $\mathcal{F}$ υφίσταται η σχέση: $\mathcal{R}=\mathcal{F}\cdot m$ (σχ. 6.8.2.19) όπου m η τάξη συμβολής. Με αντίστοιχο τρόπο για την περίπτωση των φραγμάτων περίθλασης, επειδή από τη (σχ. 7.6.4.8): $\mathcal{R}=m\cdot N$, μπορούμε να πούμε ότι η λεπτότητα των κροσσών την προκειμένη περίπτωση εκφράζεται από το N που είναι ο αριθμός των περιόδων του φράγματος. Δηλ.

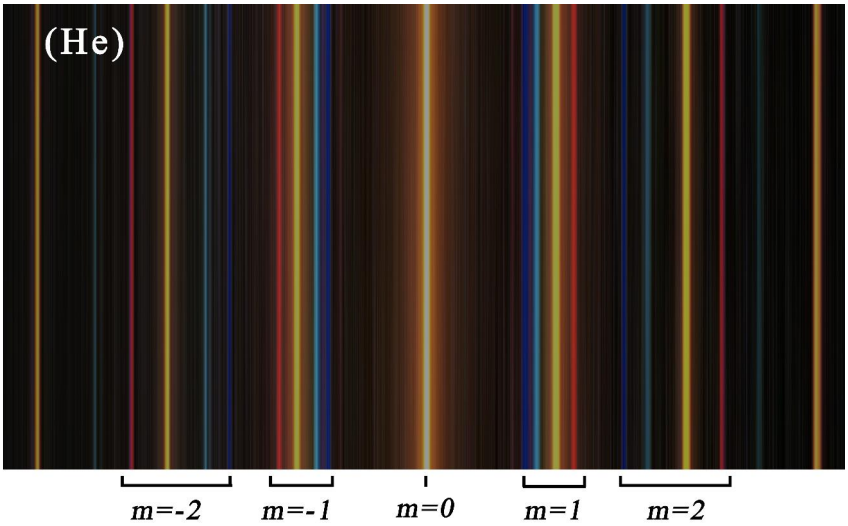
$$\mathcal{F}=N \qquad (7.6.4.15)$$

7.6.5 *Φασματοσκόπια, Μονοχρωμάτορες και φασματογράφοι φράγματος*

7.6.5.1 *Φασματοσκόπια φράγματος*

Η αναλυτική περιγραφή ενός ***φασματοσκόπιου (spectroscope)*** έχει γίνει στο (κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.4.2)). Μόνο που εκεί , το στοιχείο που προκαλούσε την ανάλυση του φωτός ήταν ένα πρίσμα. Στην προκειμένη περίπτωση (του φασματοσκόπιου φράγματος), όλο το μηχανικό τμήμα του (στην πραγματικότητα ένα γωνιόμετρο μεγάλης ακρίβειας), παραμένει το ίδιο. Αυτό που αντικαθίσταται είναι το πρίσμα από ένα φράγμα πλάτους διερχομένου φωτός ή ένα φράγμα ανάκλασης.

Το φράγμα (έστω ότι είναι διερχομένου φωτός), τοποθετείται σταθερά στη θέση του κατακόρυφου άξονα περιστροφής του τηλεσκοπίου ανάγνωσης. Και είναι κάθετο στη διεύθυνση πρόσπτωσης σ' αυτό, του επιπέδου πολυχρωματικού μετ. κύματος, το οποίο και πρόκειται ν' αναλυθεί. Τότε το πρότυπο περίθλασης που προκύπτει (βλ. § 7.6.1) θ' αποτελείται: α) Από το μηδενικής τάξης ($m = 0$) μη περιθλώμενο φως και μη αναλυμένο, κατά τη διεύθυνση της πρόσπτωσης. β) Τα αναλυμένα φάσματα (συνεχή ή διακριτά) τάξεων: $m = +1, +2, +3, \cdots$ και γ) Τα ίδια φάσματα τάξεων $m = -1, -2, -3, \cdots$ σε θέσεις συμμετρικές ως προς τα προηγούμενα σε σχέση με τη μηδενική τάξη. Στην (Εικ. 7.6.5.1.1) μπορούμε να δούμε την ανά-



(Εικ. 7.6.5.1.1)

λυση μέσω φασματοσκοπίου φράγματος διερχομένου του φωτός που εκπέμπεται από μία φασματική λυχνία Ηλίου (He). Πρόκειται για γραμμικό φάσμα δεδομένου

ότι το στοιχείο He είναι αέριο. Στην ίδια εικόνα μπορούμε να παρατηρήσουμε και το φαινόμενο της επικάλυψης των διαφόρων τάξεων.

Τα φασματοσκόπια ακριβείας, πέραν της ανάδειξης (συνήθως κατά περιοχές) των κάθε είδους φασμάτων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον προσδιορισμό των μηκών κύματος των φασματικών γραμμών. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του γνωστού τύπου του φράγματος (σχ. 7.6.1.5):

$$m\lambda = d\sin\theta \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \qquad (7.6.5.1.1)$$

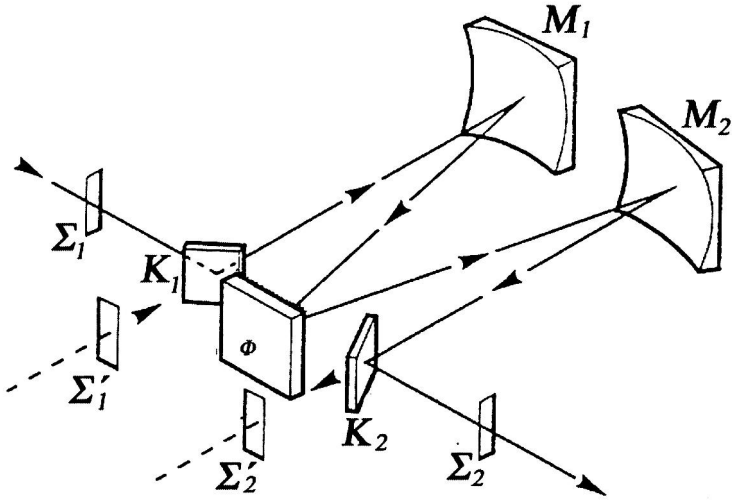
που αφορά τον εντοπισμό των θέσεων των μέγιστων συμβολής τάξης m. Τότε με δεδομένο ότι η περίοδος του φράγματος είναι γνωστή και επειδή οι γωνίες θ στις οποίες βλέπουμε τις φασματικές γραμμές μπορούν να μετρηθούν, με τη βοήθεια της (σχ. 7.6.5.1.1), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα διάφορα μήκη κύματος που αντιστοιχούν στα μέγιστα της κατανομής των φασματικών γραμμών.

7.6.5.2 *Μονοχρωμάτορες φράγματος*

Οι ***μονοχρωμάτορες (monochromators)*** είναι φασματοσκοπικά όργανα των οποίων η βασική λειτουργία είναι ν' αναλύουν την προσπίπτουσα στην είσοδό τους πολυχρωματική ακτινοβολία (στην πράξη συνεχούς κατανομής). Και στην έξοδό τους να υπάρχει η δυνατότητα να επιλέγεται βήμα προς βήμα μια καθορισμένη πάντα στενή φασματική περιοχή εύρους $\Delta\lambda$ (σε σχέση με ένα κεντρικό μ.κ. λ_0). Μέχρι σήμερα έχει αναπτυχθεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός τέτοιων διατάξεων, που σαν αναλυτικά στοιχεία χρησιμοποιούν ως επί το πλείστον πρίσματα (για μεγάλης ισχύος ακτινοβολίες) ή φράγματα ανάκλασης όπως αυτά που περιγράψαμε στην (§ 7.6.3). Στα επόμενα θα περιγράψουμε τη δομή ενός αντιπροσωπευτικού είδους μονοχρωμάτορα φράγματος ανάκλασης, αυτόν με την ονομασία Czerny-Turner.

Τα βασικά στοιχεία αυτού του μονοχρωμάτορα είναι τα δύο κοίλα κάτοπτρα M_1, M_2 και το φράγμα Φ (διαμορφωμένο φράγμα ανάκλασης) όπως αυτά φαίνονται στο (Σχ. 7.6.5.2.1). Η προς ανάλυση ακτινοβολία εστιάζεται στη μεταβλητού πλάτους σχισμή Σ_1 στην είσοδο του οργάνου. Το επίπεδο κάτοπτρο K_1 με κατάλληλη κλίση, οδηγεί την αποκλίνουσα δέσμη του φωτός προς το κοίλο κάτοπτρο M_1. Η εστιακή απόσταση αυτού του κατόπτρου είναι ίση με την απόσταση $\Sigma_1 K_1 M_1$, με συνέπεια το μετ. κύματος το οποίο ανακλάται προς το φράγμα Φ να είναι επίπεδο. Το φράγμα αναλύει το φως οπότε τα διάφορα επί μέρους μέτ. κύματος φιαφορετικών μ.κ. με τη βοήθεια του κοίλου κατόπτρου M_2 και του επιπέδου κατόπτρου K_2 εστιάζονται στην περιοχή της μεταβλητού πλάτους σχισμής εξόδου

Σ_2 του οργάνου. Για να γίνει η επιλογή του (ορισμένου εύρους ζώνης $\Delta\lambda$) κεντρικού μ.κ. λ_0 το οποίο κάθε φορά θα εμφανίζεται στη σχισμή εξόδου, το φράγμα περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, μετακινώντας το φάσμα μπροστά από



(Σχ. 7.6.5.2.1)

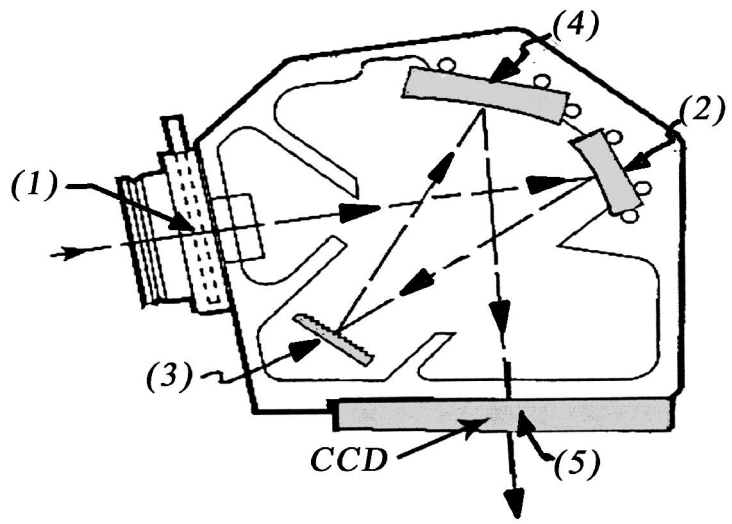
τη σχισμή εξόδου Σ_2 του οργάνου. Η περιστροφή αυτή γίνεται χειροκίνητα ή μέσω ειδικών βηματικών κινητήρων ελεγχόμενων από Η/Υ , έτσι ώστε η η κίνησή του να είναι προγραμματισμένη. Επίσης η ένδειξη για το κεντρικό μ.κ. λ_0 που κάθε φορά περνάει από το κέντρο της σχισμής εξόδου, είναι δυνατόν ν' αναγνωσθεί πάνω σε μηχανική ή ψηφιακή οθόνη. Στην προαναφερόμενη περιγραφή της διάταξης, η προσπίπτουσα ακτινοβολία και η αναλυόμενη βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση. Με την απομάκρυνση όμως των κατόπτρων K_1, K_2 (Σχ. 7.6.5.2.1), η προσπίπτουσα ακτινοβολία μπορεί να γίνεται μέσω της σχισμής Σ_1' κατ' ευθείαν στο κάτοπτρο M_1 οπότε οι αναλυόμενες θα βγαίνουν από τη σχισμή Σ_2' με παράλληλη με την προσπίπτουσα διεύθυνση.

Σαν φασματοσκοπικά όργανα οι μονοχρωμάτορες χρησιμοποιούνται σε πλείστους κλάδους της επιστήμης. Εκεί όπου απαιτείται μονοχρωματικός φωτισμός ορισμένου εύρους κάθε φορά για μια εκτεταμένη περιοχή του ορατού φάσματος. Μονοχρωμάτορες βέβαια μπορούν να κατασκευαστούν, προκειμένου να εργάζονται και σε άλλες περιοχές του Η/Μ φάσματος εκτός του ορατού. Π.χ. στην υπεριώδη (UV), την υπέρυθρη (IR) κλπ. Αυτό εξαρτάται από τις προδιαγραφές των αναλυτικών τους στοιχείων. Δηλ. των πρισμάτων των φραγμάτων κλπ.

7.6.5.3 *Φασματογράφοι φράγματος*

Οι ***φασματογράφοι (spectrographs)*** είναι αναλυτικά όργανα παρόμοια με αυτά των φασματοσκοπίων, με μόνη τη διαφορά ότι στους πρώτους έχουμε άμεση εποπτεία όλου του αναλυμένου φάσματος και όχι τη σταδιακή μετάβαση από περιοχή σε περιοχή όπως συμβαίνει συνήθως στα δεύτερα με τη μετακίνηση του τηλεσκοπίου πααρτήρησης. Το φάσμα είναι δυνατόν να καταγραφεί σ' ένα μέσο όπως π.χ. ένα φωτογραφικό φιλμ. Στις μέρες μας τα φιλμς έχουν αντικατασταθεί από ανιχνευτές CCD Με τη βοήθειά τους, είναι δυνατόν να καταγραφούν μέσω Η/Υ στιγμιότυπα ακόμη και από χρονικά μεταβαλλόμενα φάσματα, με δυνατότητα επεξεργασίας τους. Οι φασματογράφοι διακρίνονται ανάλογα με το αναλυτικό μέσο που χρησιμοποιούν, σε πρίσματος και φράγματος με τους τελευταίους να έχουν καθιερωθεί στις μέρες μας έναντι των πρώτων.

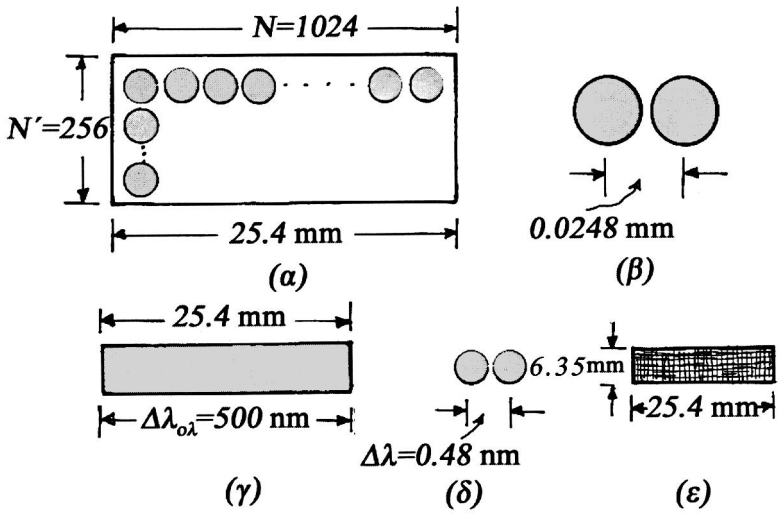
Ένα σύγχρονο μοντέλο φασματογράφου διαμορφωμένου φράγματος ανάκλασης φαίνεται στο (Σχ. 7.6.5.3.1). Τα βασικά του στοιχεία είναι τα εξής: (1) Η



(Σχ. 7.6.5.3.1)

μεταβλητού πλάτους σχισμή εισόδου της προς ανάλυση ακτινοβολίας. (2) Κοίλο κάτοπτρο που μετατρέπει την αποκλίνουσα από τη σχισμή εισόδου δέσμη σε παράλληλη. (3) Το διαμορφωμένο φράγμα ανάκλασης, το οποίο αναλύει την παράλληλη δέσμη φωτός που δέχεται από το κάτοπτρο (2). (4) Το κοίλο κάτοπτρο που απεικονίζει όλο το αναλυμένο από το φράγμα φάσμα στη θέση (5). (5) Στη θέση αυτή είναι τοποθετημένο το ανιχνευτικό στοιχείο που στην προκειμένη περίπτωση είναι μια CCD κάμερα.

Ένας τυπικός ανιχνευτής CCD (ανιχνευτής συζευγμένου φορτίου), αποτελείται από μια δύο διαστάσεων κατανομή φωτοευαίσθητων στοιχείων (pixels). Στην συγκεκριμένη περίπτωση του ανιχνευτικού στοιχείου του φασματογράφου που περιγράψαμε, ο αριθμός τους (Σχ. 7.6.5.3.2α) είναι $N \times N' = 1024 \times 256$. Οι χωρικές



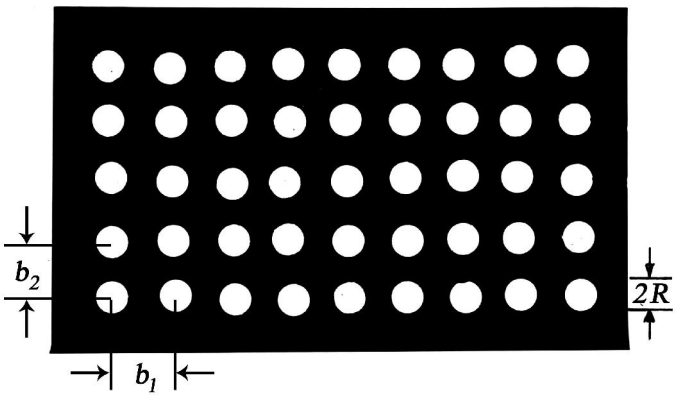
(Σχ. 7.6.5.3.2)

διαστάσεις στις οποίες κατανέμονται τα στοιχεία αυτά είναι: $25.4 \times 6.32\text{mm}$ (Σχ. 7.6.5.3.2ε) (διαστάσεις του ανιχνευτικού στοιχείου στη θέση (5) του (Σχ. 7.6.5.3.1). Η ***φασματική διάκριση (spectral resolution)*** ενός φασματογράφου που χρησιμοποιεί στην έξοδό του ένα τέτοιο ανιχνευτή δεχόμαστε ότι περιορίζεται από το εύρος ζώνης $\Delta\lambda$ σε μ.κ. μεταξύ δύο pixels (Σχ. 7.6.5.3.2δ). Με συγκεκριμένο φράγμα 1200γρ/mm και πλάτος σχισμής εξόδου ίσο περίπου με $25\mu\text{m}$, στο εύρος 25.4mm όλης της ενεργού επιφάνειας του ανιχνευτή, θα καταγράφεται μια φασματική περιοχή που το συνολικό της εύρος θα είναι $\Delta\lambda_{o\lambda} = 500\text{nm}$ (Σχ. 7.6.5.3.2γ). Επειδή η απόσταση μεταξύ δύο pixels (Σχ. 7.6.5.3.2δ) είναι 0.0248mm, τότε η αντίστοιχη φασματική διάκριση αυτού του φασματογράφου με τα δεδομένα που αναφέραμε θα είναι $\Delta\lambda \simeq 0.48\text{nm}$ δηλ. $\Delta\lambda = (500 \times 0.0248)/24.5$. Επίσης η φασματική διάκριση θα εξαρτάται από τη θέση του φράγματος. Τέλος ανάλογα με το φράγμα που θα χρησιμοποιηθεί, θα έχουμε και τις αντίστοιχες αναλυόμενες περιοχές. Π.χ. για ολογραφικής κατασκευής φράγμα ανάκλασης 1200γρ/mm, η περιοχή αυτή θα είναι μεταξύ $(180-650)\text{nm}$. Για εγχάρακτα σε γυαλί φράγματα ανάκλασης των 600γρ/mm και 500γρ/mm οι αντίστοιχες περιοχές θα είναι: $(450-2000)\text{nm}$ και $(575-2500)\text{nm}$ αντίστοιχα.

7.7 *Περίθλαση από περιοδικά φράγματα δύο και τριών διαστάσεων*

7.7.1 *Περίθλαση από περιοδικό φράγμα δύο διαστάσεων*

Μια επαναλαμβανόμενη σειρά από περιθλώντα στοιχεία σε δύο διαστάσεις, που έχουν σαν αποτέλεσμα να προκαλούν μεταβολές στο πλάτος ή στη φάση (ή και στα δύο) ενός προσπίπτοντος μετ. κύματος, ονομάζεται περιοδικό φράγμα περίθλασης δύο διαστάσεων. Για τον αναλυτικό υπολογισμό της κατανομής της έντασης του περιθλώμενου ηλ. πεδίου και κατά προέκταση της έντασης του φωτός σε συνθήκες μακρινού πεδίου, θα χρησιμοποιήσουμε το φράγμα δύο διαστάσεων της (Εικ.. 7.7.1.1). Αποτελείται από πανομοιότυπα κυκλικά ανοίγματα διαμέτρου $d' = 2R$ σε αποστάσεις μεταξύ τους b_1 κατά τον άξονα O_1x_1 και b_2 κατά τον άξονα



(Εικ. 7.7.1.1)

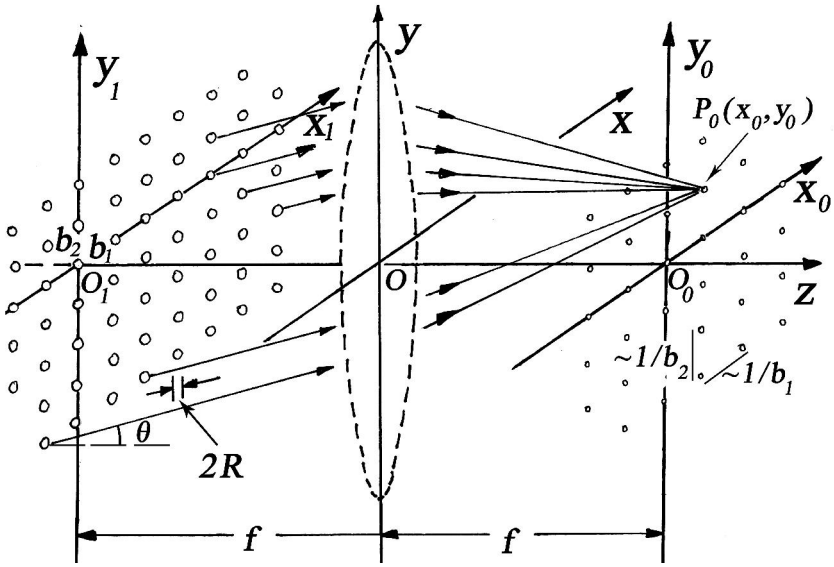
O_1y_1. Το φράγμα αυτό τοποθετείται (Σχ. 7.7.1.2) στο εμπρός εστιακό επίπεδο ενός φακού εστιακής απόστασης f και ο υπολογισμός του πεδίου γίνεται στο πίσω εστιακό του επίπεδο (διάταξη λήψης προτύπων περίθλασης Fraunhofer).

Για τις συντεταγμένες θέσεις των κυκλικών ανοιγμάτων του φράγματος θα ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= n_1 b_1 \qquad 0 \le n_1 \le N_1 - 1 \\ y_1 &= n_2 b_2 \qquad 0 \le n_2 \le N_2 - 1 \end{aligned}\right\} \tag{7.7.1.1}$$

Όπου N_1, N_2 είναι ακέραιοι αριθμοί και το γινόμενο $N_1 \times N_2$ δηλώνει το συνολικό αριθμό των κυκλικών ανοιγμάτων που περιλαμβάνονται στο φράγμα. Κατά τα γνωστά για τον υπολογισμό τις έντασης του ηλ. πεδίου Ψ σ' ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε την επαλληλία στο P_0 των διαταραχών που προκύπτουν από κάθε κυκλικό άνοιγμα του φράγματος και βαίνουν παράλληλες πριν τον φακό,

συγκλίνουσες μετά από αυτόν στη θέση P_0. Τ' αναδυόμενα από τα ανοίγματα ατομικά πεδία Ψ_0, είναι πανομοιότυπα και είναι αυτά που αφορούν την περίθλαση



(Σχ. 7.7.1.2)

Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα. Η κανονικοποιημένη τους μορφή έχει υπολογιστεί δίνεται από τη γνωστή (σχ. 7.5.1.8):

$$\Psi_0 = \frac{E}{E_0} = \frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta} \tag{7.7.1.2}$$

Όπου θ η γωνία περίθλασης (το τόξο του συνημίτονου κατεύθυνσης). Και ναι μεν οι συνεισφορές των πεδίων Ψ_0 είναι πανομοιότυπες αλλά στη θέση P_0 συμβάλλουν η κάθε μια με μια διαφορά φάσης. Τις φάσεις αυτές τις υπολογίζουμε σε σχέση με μια αναφορά, που για την περίπτωσή μας (Σχ. 7.7.1.2) θα είναι το κυκλικό άνοιγμα στη θέση $(x_1, y_1) = (0,0)$, δηλ. για $n_1 = n_2 = 0$. Τότε η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο διαταραχών που προέρχονται από δύο νοητά σημεία (στη θέση των κέντρων των κυκλικών ανοιγμάτων) στη θέση: $(x_1, y_1) = (0,0)$ (αναφορά) και στη θέση $(x_1, y_1) = (n_1 b_1, n_2 b_2)$ προς την κατεύθυνση του σημείου $P_0(x_0, y_0)$ στο οποίο και έρχονται σε επαλληλία, θα δίνεται κατά τα γνωστά (παραξονική προσέγγιση) από τη σχέση:

$$L = \frac{x_1 x_0 + y_1 y_0}{f} = n_1 b_1 \frac{x_0}{f} + n_2 b_2 \frac{y_0}{f} \tag{7.7.1.3}$$

Συνολικά στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ θα έχουμε την επαλληλία $N_1 \times N_2$ όρων (όσων και ο αριθμός των κυκλικών ανοιγμάτων). Επομένως το ηλ. πεδίο Ψ θα δίνεται από το διπλό άθροισμα:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{ik\left(n_1 b_1 \frac{x_0}{f} + n_2 b_2 \frac{y_0}{f}\right)} \tag{7.7.1.4}$$

Όπου: $kL = k\left(n_1 b_1 \dfrac{x_0}{f} + n_2 b_2 \dfrac{y_0}{f}\right)$ η διαφορά φάσης στο P_0 των διαταραχών που αναδύονται από τα δύο κυκλικά ανοίγματα: Το ένα όπως είπαμε της αναφοράς στη θέση $(x_1, y_1) = (0,0)$ και του άλλου στη θέση $(x_1, y_1) = (n_1 b_1, n_2 b_2)$. Και επειδή ο όρος $e^{ikn_1 b_1 \frac{x_0}{f}}$ μπορεί να τεθεί εκτός του δευτέρου αθροίσματος στη (σχ. 7.7.1.4), η τελευταία παίρνει τη μορφή:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{ikn_1 b_1 \left(\frac{x_0}{f}\right)} \cdot \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{ikn_2 b_2 \left(\frac{y_0}{f}\right)} \tag{7.7.1.5}$$

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι το κάθε άθροισμα, συνιστά το άθροισμα των όρων μιας γεωμετρικής σειράς, η οποία είναι πανομοιότυπη με αυτή της (σχ. 7.6.1.1) με:

$$\Delta_1 = kn_1 b_1 (x_0 / f) \quad \text{και} \quad \Delta_2 = kn_2 b_2 (y_0 / f) \tag{7.7.1.6}$$

Τότε η κατανομή του κανονικοποιημένου πλάτους του ηλ. πεδίου του περιθλόμενου από το περιοδικό φράγμα των δύο διαστάσεων, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi = \Psi_0 \left(\frac{1 - e^{iN_1 \Delta_1}}{1 - e^{i\Delta_1}}\right)\left(\frac{1 - e^{iN_2 \Delta_2}}{1 - e^{i\Delta_{21}}}\right) \tag{7.7.1.7}$$

Και η κατανομή της έντασης του φωτός από την $(I = \Psi\Psi^*)$:

$$I = |\Psi_0|^2 \left(\frac{\sin N_1 \upsilon_1}{\sin \upsilon_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N_2 \upsilon_2}{\sin \upsilon_2}\right)^2 \tag{7.7.1.8}$$

Όπου: $$\upsilon_1 = \frac{\pi b_1 x_0}{\lambda f}, \qquad \upsilon_2 = \frac{\pi b_2 y_0}{\lambda f} \tag{7.7.1.9}$$

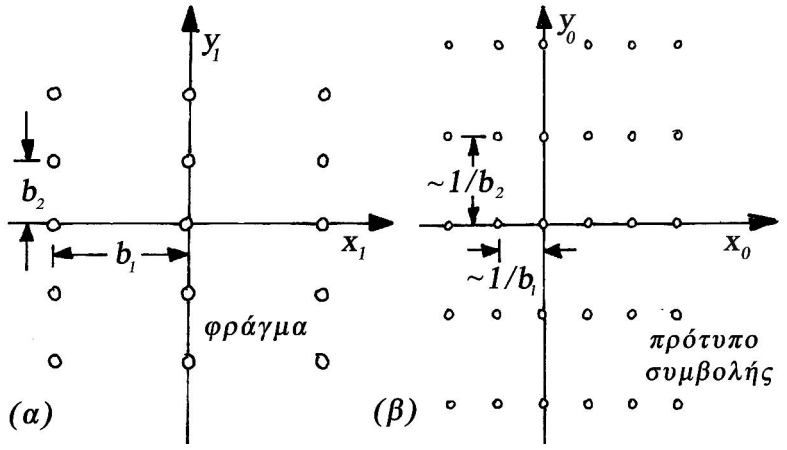
Όσον αφορά τώρα τους παράγοντες συμβολής της (σχ. 7.7.1.8), θα έχουν ένα κοινό κύριο μέγιστο όταν:

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon_1 = m_1\pi & m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \upsilon_2 = m_2\pi & m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{array}\right\} \tag{7.7.1.10}$$

οι οποίες με τη βοήθεια των (σχ. 7.7.1.9) γίνονται:

$$m_1\lambda = \frac{b_1 x_0}{f}, \qquad m_2\lambda = \frac{b_2 y_0}{f} \tag{7.7.1.11}$$

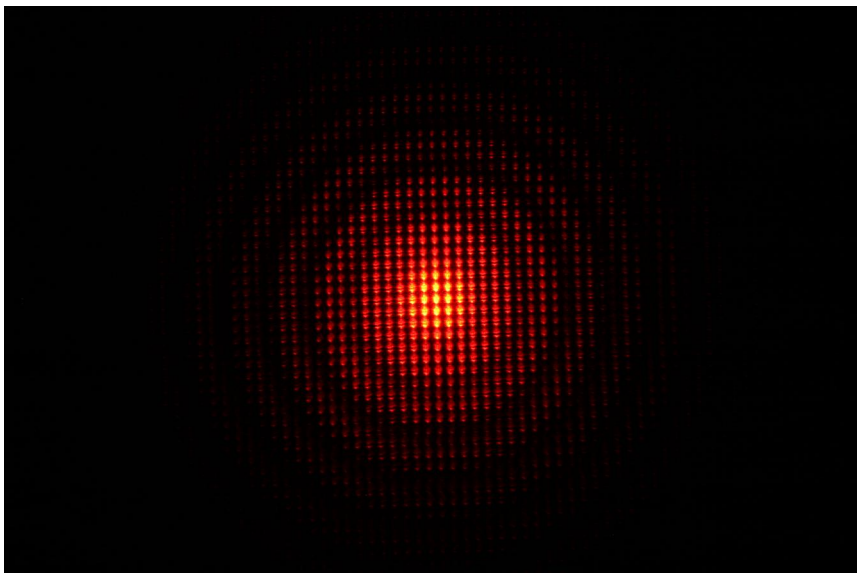
Και όσον αφορά τα κοινά κύρια μέγιστα συμβολής από γεωμετρική άποψη μπορούν να βρεθούν όταν με δεδομένο λ: α) Θεωρήσουμε όλους τους κώνους που διαγράφονται με κοινό άξονα τον O_1x_1 για τις διάφορες τιμές των m_1 και με γωνία ως προς αυτόν (πρόκειται για τα τόξα των συνημίτονων κατεύθυνσης) που είναι ίσες με: $\arccos(x_0/f) = \arccos(m_1\lambda/b_1)$. β) Θεωρήσουμε επίσης όλους τους κώνους που διαγράφονται με κοινό άξονα τον O_1y_1 για τις διάφορες τιμές των m_2 και με γωνία ως προς αυτόν (πρόκειται για τα τόξα των συνημίτονων κατεύθυνσης) που είναι ίσες με: $\arccos(y_0/f) = \arccos(m_2\lambda/b_2)$. Στα σημεία των τομών τους στο επίπεδο x_0, y_0 εντοπίζονται τα κοινά κύρια μέγιστα συμβολής. Θα έχουν ορθογώνια περιοδική διευθέτηση (Σχ. 7.7.1.3) και οι αποστάσεις μεταξύ τους κατά τον άξονα O_0x_0



(Σχ. 7.7.1.3

(και παράλληλα προς αυτόν) θα είναι ανάλογες του $1/b_1$. Κατά δε τον άξονα O_0y_0 (και παράλληλα προς αυτόν) ανάλογες του $1/b_2$, όπως αποδεικνύεται από τις (σχ.7.7.1.11).

Ένα τυπικό πρότυπο περίθλασης Fraunhofer από φράγμα δύο διαστάσεων που οι αποστάσεις των κυκλικών ανοιγμάτων διαμέτρου $d' = 2R$ είναι ίδιες κατά τους O_1x_1 και O_1y_1 (δηλ. $b_1 = b_2$) δίνεται στην (Εικ. 7.7.1.4). Οι κηλίδες σε ορθογώνια διάταξη αφορούν τα κύρια μέγιστα συμβολής, που προσδιορίζονται από τον δεύτερο και τρίτο όρο της (σχ. 7.7.1.8). Η κεντρική περιοχή του προτύπου και οι

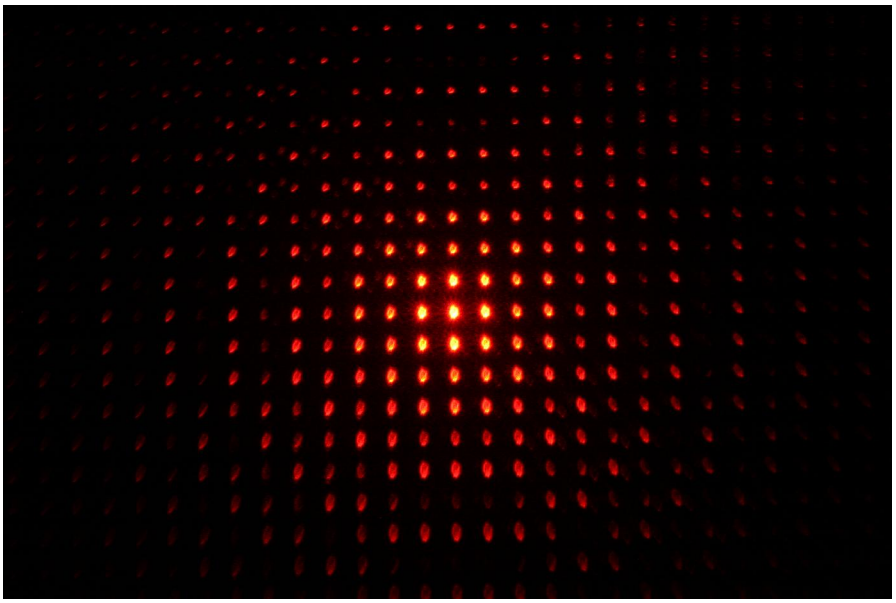


(Εικ. 7.7.1.4)

δακτύλιοι των μεγίστων και ελαχίστων, αφορούν τον διαμορφώνοντα όρο της περίθλασης $|\Psi_0|^2$, που στην προκειμένη περίπτωση (σχ. 7.7.1.2) είναι αυτός από κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου $d' = 2R$. Δηλ. η κεντρική περιοχή του προτύπου οριοθετείται από το δίσκο του Airy. Η (Εικ. 7.7.1.5) μας δείχνει και πάλι ένα πρότυπο περίθλασης από φράγμα δύο διαστάσεων με $b_1 = b_2$. Στην συγκεκριμένη όμως περίπτωση οι διάμετροι των κυκλικών ανοιγμάτων είναι πολύ μικρότερες αυτών του προηγουμένου φράγματος. Για το λόγο αυτό ο δίσκος του Airy είναι πολύ μεγαλυτέρων διαστάσεων. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση στην εικόνα του δίσκου του Airy και μόνο του πρώτου δακτυλίου.

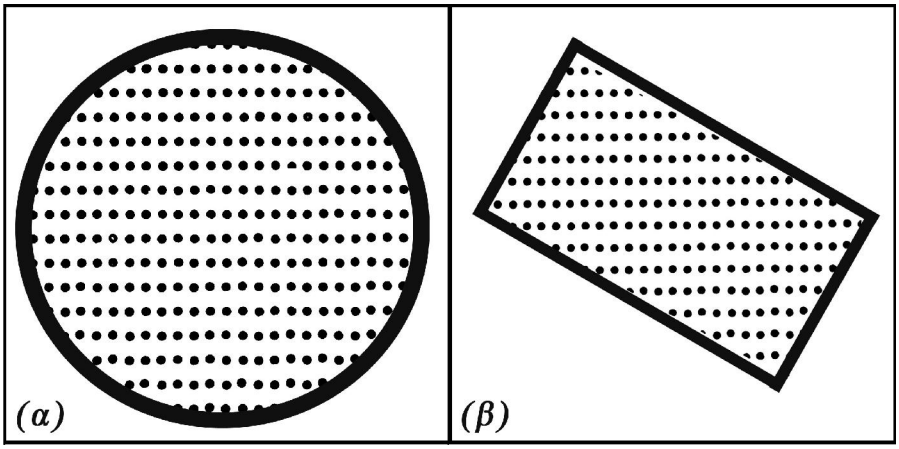
Θα πρέπει ν' αναφέρουμε επίσης για ένα άλλο παράγοντα που επιδρά στην τελική μορφή του προτύπου περίθλασης Fraunhofer από το προαναφερόμενο φράγμα δύο διαστάσεων. Είναι αυτός του περιορισμού που επιβάλλεται στα όρια των

διαστάσεών του. Στο (Σχ. 7.7.1.6α) βλέπουμε ότι οι περιοδικότητες των κυκλικών ανοιγμάτων διαμέτρου $d' = 2R$, περιορίζονται από ένα διάφραγμα κυκλικής μορφής



(Εικ. 7.7.1.5)

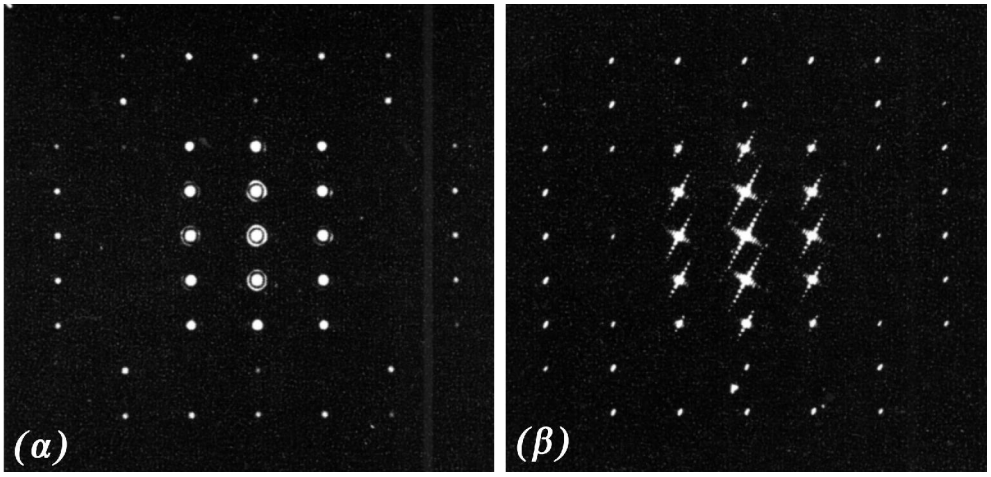
διαμέτρου $D = 2r$. Σε μια δεύτερη περίπτωση (Σχ. 7.7.1.6β) οι ίδιες περιοδικότητες περιορίζονται από ένα διάφραγμα ορθογωνίου σχήματος διαστάσεων $D_1 \times D_2$ και



(Σχ. 7.7.1.6)

ορισμένου προσανατολισμού. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις υποθέτουμε ότι στο εσωτερικό των διαφραγμάτων ο αριθμός των κυκλικών ανοιγμάτων είναι πάρα πολύ μεγάλος. Οι (Εικ. 7.7.1.7) μας δίνουν τα αντίστοιχα πρότυπα περίθλασης για τις δύο περιπτώσεις. Και όπως μπορούμε να δούμε, η διαφορά μεταξύ τους έγκειται στην μορφολογία των 'σημείων' συμβολής. Ενώ τα άλλα χαρακτηριστικά του προ-

τύπου, δηλ. ο δίσκος του Airy με τους συνοδεύοντες δακτυλίους του (στην εικόνα φαίνεται μόνο ένας), καθώς και οι θέσεις των 'σημείων' συμβολής παραμένουν οι ίδιες. Και αυτό που τελικά παρατηρούμε είναι το εξής: Το καθένα από τα 'σημεία' συμβολής στην (Εικ. 7.7.1.7α) έχουν τη μορφή του δίσκου του Airy με τους δακτυλίους του ενώ στην (Εικ. 7.7.1.7β) τα 'σημεία' έχουν τη μορφή προτύπων περίθλα-



(Εικ. 7.7.1.7)

σης από ορθογώνιο άνοιγμα της μορφής της (Εικ. 7.4.1.4), με συγκεκριμένο προσανατολισμό. Μπορούμε στα επόμενα να δώσουμε μια στοιχειώδη ερμηνεία (χωρίς λογιστική απόδειξη), της μορφολογίας των προαναφερόμενων προτύπων περίθλασης.

Κατ' αρχή οι όροι της συμβολής: $\left(\frac{\sin N_1\upsilon_1}{\sin\upsilon_1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N_2\upsilon_2}{\sin\upsilon_2}\right)^2$ είναι κοινοί και για τα δύο πρότυπα. Οι όροι αυτοί: α) Στην πρώτη περίπτωση διαμορφώνονται από μια συνάρτηση της μορφής: $\left[\frac{2J_1(kr\theta)}{kr\theta}\right]^2$ όπου r η ακτίνα του διαφράγματος που περιορίζει το φράγμα. β) Στη δεύτερη περίπτωση διαμορφώνεται από τη συνάρτηση της μορφής: $\left[\frac{\sin ku'X_1}{ku'X_1}\right]^2\left[\frac{\sin k\upsilon'Y_1}{k\upsilon'Y_1}\right]^2$, όπου X_1, Y_1 οι διαστάσεις του διαφράγματος που περιορίζει το φράγμα με τη μορφή του ορθογωνίου συγκεκριμένου προσανατολισμού. Επί πλέον οι όροι αυτοί των δύο προαναφερόμενων περιπτώσεων, διαμορφώνονται από τον παράγοντα της μορφής: $\left[\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]^2$ όπου R η ακτίνα των κυκλικών ανοιγμάτων. Οι τρεις τελικά όροι για την κάθε μια των περιπτώσεων , είναι μεταξύ τους πολλαπλασιαστικοί. Και προκειμένου να μπορέσουμε να δούμε ευκρι-

νώς τις δομές των 'σημείων' συμβολής, θα πρέπει να περιορίσουμε αρκετά τις διαστάσεις των διαφραγμάτων. Προβλήματα αυτού του είδους είναι δυνατόν να μελετηθούν με ευκολία από την Οπτική Fourier.

7.7.2 *Περίθλαση από περιοδικό φράγμα τριών διαστάσεων. Ο τύπος του* Bragg *για την περίθλαση των ακτινών-Χ από κρυσταλλικές δομές*

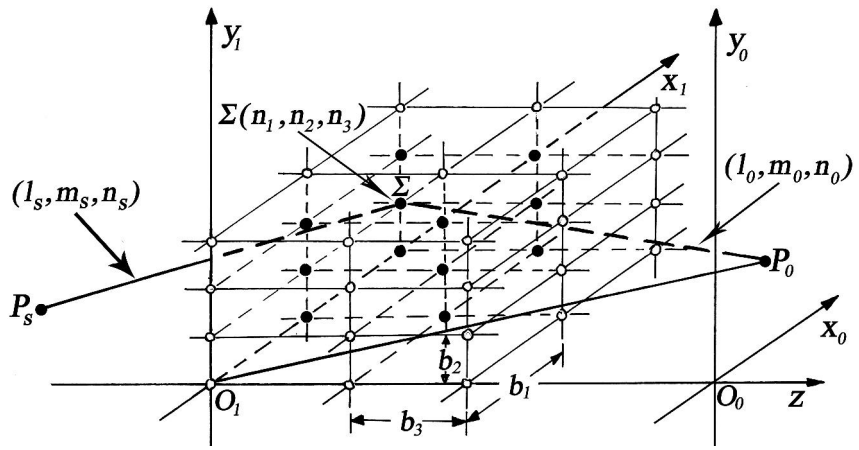
Μια περιοδική δομή κέντρων σκέδασης στο χώρο, η οποία μπορεί να μεταβάλλει το πλάτος ή τη φάση (ή και τα δύο) ενός προσπίπτοντος επιπέδου μετ. κύματος, συνιστά ένα φράγμα περίθλασης τριών διαστάσεων. Στην προκειμένη περίπτωση θα μελετήσουμε το περιθλώμενο από το φράγμα μετ. κύματος σε συνθήκες μακρινού πεδίου (περίθλαση Fraunhofer). Είναι λογικό βέβαια να δεχτούμε ότι εδώ τα κέντρα σκέδασης δεν μπορεί να είναι κυκλικά ανοίγματα σε αδιαφανές πλαίσιο (ή ισοδύναμα αδιαφανείς κύκλοι σε διαφανές πλαίσιο)(βλ. (§ 7.8.13) για την αρχή του Bobbinet)), όπως στην περίπτωση της περίθλασης από φράγμα δύο διαστάσεων με την οποία ασχοληθήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Θα είναι σημειακά ή υλικά αντικείμενα με διαστάσεις που θα μπορούν να βρίσκονται 'τοποθετημένα' στα διάφορα σημεία του χώρου. Κάτω από αυτές τις συνθήκες δόμησης του φράγματος, θα είναι δύσκολο να δημιουργήσουμε ένα τέτοιο, για περίθλαση ακτινοβολιών στη ορατή περιοχή του φάσματος.

Σε αντίθεση, τέτοιου είδους φράγματα περίθλασης, για την περιοχή όμως των ακτινών-Χ $\left[\nu:\left(10^{17}-10^{19}\right)\mathrm{Hz}\rightarrow\lambda:\left(10^{-9}-10^{-11}\right)\mathrm{m}\right]$(βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα (Πίν. 2.3.8)), υπάρχουν σε αφθονία στη φύση ή ακόμα είναι δυνατόν να κατασκευαστούν τεχνικά. Αφορά τα ομογενή ανισότροπα υλικά (βλ. Κεφ. 5: Πόλωση του φωτός (§ 5.7.2)). Για τα τελευταία, τα άτομα ή τα μόρια από τα οποία απαρτίζονται αυτά τα υλικά, βρίσκονται σε καθορισμένες θέσεις σε περιοδική δομή στο χώρο. Όπου κατά τα γνωστά η 'σταθερότητα' των θέσεων των ατόμων οφείλεται στη δράση ηλεκτρικών μεταξύ τους δυνάμεων. Πρόκειται – κατά κοινή έκφραση – για τα λεγόμενα κρυσταλλικά υλικά και η εσωτερική τρισδιάστατη δομή τους ονομάζεται κρυσταλλικό πλέγμα. Συμπερασματικά, τα μεγέθη των μ.κ. των ακτίνων-Χ σαν προσπιπτουσών ακτινοβολιών, καθώς και οι ενδοατομικές αποστάσεις των ατόμων σαν κέντρων σκέδασης (περίθλασης), συνιστούν ένα άριστο συνδυασμό, με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να πετύχουμε περίθλαση μακρινού πεδίου από φράγμα τριών διαστάσεων. Η ανάδειξη αυτού του γεγονότος από τον M. von Laue το 1912, καθώς και η πειραματική του επιβεβαίωση * το 1913, υπήρξε η αφετηρία ανάπτυξης δύο νέων επιστημονικών τομέων της Φυσικής: Της Φασματοσκο-

* W. Friedrich, P. Knipping and M. von Laue, Ann. Phys., 41: 971 (1913)

πίας των ακτινών-Χ καθώς και αυτού του προσδιορισμού της δομής των κρυσταλλικών υλικών. Δηλ. της λεγόμενης Κρυσταλλοδομής. Στα επόμενα θα εξετάσουμε ορισμένες από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των περιθλώμενων κυμάτων, από ένα απλό τριών διαστάσεων φράγμα περίθλασης της μορφής του κρυσταλλικού πλέγματος που περιγράψαμε προηγουμένως*.

Το πλέγμα αυτό φαίνεται στο (Σχ. 7.7.2.1) σε τρισορθογώνιο σ.σ. x_1, y_1, z_1. Οι αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών κέντρων σκέδασης κατά τους άξονες x_1, y_1, z_1 είναι αντίστοιχα: b_1, b_2, b_3. Όσον αφορά τον αριθμό των κέντρων σκέδασης



(Σχ. 7.7.2.1)

κατά τη διεύθυνση των ιδίων αξόνων είναι: N_1, N_2, N_3. Τότε για τις συντεταγμένες x_1, y_1, z_1 των θέσεων των διαφόρων κέντρων σκέδασης θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = n_1 b_1 & 0 \le n_1 \le N_1 - 1 \\ y_1 = n_2 b_2 & 0 \le n_2 \le N_2 - 1 \\ z_1 = n_3 b_3 & 0 \le n_3 \le N_3 - 1 \end{array}\right\} \qquad (7.7.2.1)$$

Κατ' αρχή θεωρούμε ότι ένα επίπεδο μετ. κύματος προσπίπτει στο σύστημα του φράγματος με διεύθυνση που καθορίζεται από τα συνημίτονα κατεύθυνσης: (l_s, m_s, n_s), από μία πηγή P_s που βρίσκεται πολύ μακριά του. Θα υποθέσουμε εδώ ότι το κάθε κέντρο σκέδασης περιθλά το ίδιο ποσοστό ενέργειας που οφείλεται στην προσπίπτουσα ακτινοβολία. Έτσι που το πλάτος του ηλ. πεδίου του κύματος που διαπερνά το κρυσταλλικό πλέγμα να είναι σταθερό σ' όλα του τα σημεία. Η υ-

* W. Elmore & M. Heald: 'Physics of waves'. Dover Pub., N.Y. (1969) (Ch.10).

πόθεση αυτή μας απαλλάσσει από το γεγονός του να θεωρήσουμε δευτερεύουσες εκπομπές από κάθε σκεδαστή.

Αντικειμενικός μας σκοπός κατόπιν είναι να προσδιορίσουμε το συνολικό πλάτος του ηλ. πεδίου σ' ένα σημείο P_0, που θα είναι το αποτέλεσμα της επαλληλίας $N_1 \times N_2 \times N_3$ τον αριθμό ίδιων πλατών Ψ_0. Όσων δηλ. προέρχονται από το σύνολο των σκεδαστών του κρυσταλλικού πλέγματος. Η συνεισφορά στο P_0 του κάθε σκεδαστή θα είναι η ίδια, μόνο που τα πεδία σ' αυτό το σημείο θα συμβάλλουν με μια διαφορά φάσης, λόγο της διαφορετικής θέσης τους στο χώρο. Για το λόγο αυτό θεωρούμε την αρχή O_1 του σ.σ. x_1, y_1, z_1 σαν αρχή όσον αφορά τις διαφορές φάσης στο P_0. Και έστω $\Sigma(n_1, n_2, n_3)$ ένα τυχαίο κέντρο σκέδασης με συντεταγμένες $(n_1 b_1, n_2 b_2, n_3 b_3)$. Έστω επίσης ότι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\mathbf{\Sigma P}_0$ είναι (l_0, m_0, n_0). Τότε η διαφορά δρόμου μεταξύ των διαταραχών που προέρχονται από τα κέντρα σκέδασης στα σημεία: O_1 και Σ με συντεταγμένες $(0,0,0)$ και $(n_1 b_1, n_2 b_2, n_3 b_3)$, θα δίνεται στην παραξονική προσέγγιση από τη σχέση:

$$L(n_1, n_2, n_3) = n_1 b_1 (l_s - l_0) + n_2 b_2 (m_s - m_0) + n_3 b_3 (n_s - n_0) \qquad (7.7.2.2)$$

Τότε στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ θα έχουμε όπως ήδη έχουμε αναφέρει, συνολικά την επαλληλία $N_1 \times N_2 \times N_3$ όρων, όσων και ο αριθμός των σκεδαστών. Επομένως το ηλ. πεδίο Ψ θα δίνεται από το τριπλό άθροισμα:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} e^{ikL(n_1, n_2, n_3)} \qquad (7.7.2.3)$$

όπου η τιμή της διαφοράς του οπτικού δρόμου $L(n_1, n_2, n_3)$ δίνεται από τη (σχ. 7.7.2.2). Και επειδή ο όρος $e^{ikn_1 b_1 (l_s - l_0)}$ μπορεί να τεθεί εκτός του δευτέρου και του τρίτου αθροίσματος, όπως και ο $e^{ikn_2 b_2 (m_s - m_0)}$ εκτός του τρίτου, η (σχ. 7.7.2.2) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Psi = \Psi_0 \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{ikn_1 b_1 (l_s - l_0)} \right] \cdot \left[\sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{ikn_2 b_2 (m_s - m_0)} \right] \cdot \left[\sum_{n_3=0}^{N_3-1} e^{ikn_3 b_3 (n_s - n_0)} \right] \qquad (7.7.2.4)$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι το κάθε άθροισμα συνιστά το άθροισμα των όρων μιας γεωμετρικής σειράς η οποία είναι πανομοιότυπη με αυτή της (σχ. 7.6.1.1) με:

$$\Delta_1 = kn_1b_1\left(l_s - l_0\right),\ \Delta_2 = kn_2b_2\left(m_s - m_0\right),\ \Delta_3 = kn_3b_3\left(n_s - n_0\right) \qquad (7.7.2.5)$$

Τότε η κατανομή του κανονικοποιημένου πλάτους του ηλ. πεδίου της περιθλώμενης από το φράγμα ακτινοβολίας θα δίνεται (βλ. (σχ. 7.6.1.2)) από την:

$$\Psi = \Psi_0\left(\frac{1-e^{iN_1\Delta_1}}{1-e^{i\Delta_1}}\right)\left(\frac{1-e^{iN_2\Delta_2}}{1-e^{i\Delta_2}}\right)\left(\frac{1-e^{iN_3\Delta_3}}{1-e^{i\Delta_3}}\right) \qquad (7.7.2.6)$$

Και όσον αφορά την κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας από την:

$$I = \left|\Psi_0\right|^2\left(\frac{1-e^{iN_1\Delta_1}}{1-e^{i\Delta_1}}\right)^2\left(\frac{1-e^{iN_2\Delta_2}}{1-e^{i\Delta_2}}\right)^2\left(\frac{1-e^{iN_3\Delta_3}}{1-e^{i\Delta_3}}\right)^2 = \left|\Psi_0\right|^2\left(\frac{\sin N_1\upsilon_1}{\sin\upsilon_1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N_2\upsilon_2}{\sin\upsilon_2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N_3\upsilon_3}{\sin\upsilon_3}\right)^2 \qquad (7.7.2.7)$$

Όπου: $$\upsilon_1 = \frac{\pi b_1\left(l_s - l_0\right)}{\lambda},\quad \upsilon_2 = \frac{\pi b_2\left(m_s - m_0\right)}{\lambda},\quad \upsilon_3 = \frac{\pi b_2\left(n_s - n_0\right)}{\lambda} \qquad (7.7.2.8)$$

Όσον αφορά τώρα για τα κύρια μέγιστα συμβολής θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon_1 = m_1\pi & m_1 = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \\ \upsilon_2 = m_2\pi & m_2 = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \\ \upsilon_3 = m_3\pi & m_3 = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \end{array}\right\} \qquad (7.7.2.9)$$

οι οποίες σε συνδυασμό με τις (σχ. 7.7.2.8) μας οδηγούν στις:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\lambda = b_1\left(l_s - l_0\right) \\ m_2\lambda = b_2\left(m_s - m_0\right) \\ m_3\lambda = b_3\left(n_s - n_0\right) \end{array}\right\} \qquad (7.7.2.10)$$

Με δεδομένους όμως τους περιορισμούς που αφορούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης:

$$l_s^2 + m_s^2 + n_s^2 = 1 \quad \text{και} \quad l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1 \qquad (7.7.2.11)$$

στη γενικότερη περίπτωση οι (Σχ. 7.7.2.10) δεν έχουν μια κοινή λύση. Το γεγονός αυτό γίνεται εμφανές από γεωμετρική άποψη για τον εξής λόγο: α) θεωρούμε την εγγραφή των κώνων περί τον άξονα O_0x_0 (Σχ. 7.7.2.1) με σταθερά τα λ, l_s και για

τις διάφορες τιμές των m_1, με γωνίες που δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις: $\arccos l_0 = \arccos\left(l_s - m_1\lambda/b_1\right)$. β) Επίσης θεωρούμε την εγγραφή των κώνων περί τον άξονα O_0y_0 (Σχ. 7.7.2.1) με σταθερά τα λ, m_s και για τις διάφορες τιμές των m_2, με γωνίες που δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις: $\arccos m_0 = \arccos\left(m_s - m_2\lambda/b_2\right)$. Οι κώνοι αυτοί, θα τέμνουν τους πρώτους σε ένα περιορισμένο αριθμό διευθύνσεων. Τα σημεία αυτών των τομών αντιστοιχούν σε λύσεις (εντοπισμού των κυρίων μεγίστων συμβολής) για την περίπτωση της περίθλασης από περιοδικό φράγμα δύο διαστάσεων, όπως αποδείξαμε στην (§ 7.7.1). γ) Έστω τέλος ότι θεωρούμε και την εγγραφή των κώνων περί τον άξονα O_0z_0 (Σχ. 7.7.2.1) με σταθερά τα λ, n_s και για τις διάφορες τιμές των m_3, με γωνίες που δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις: $\arccos n_0 = \arccos\left(n_s - m_3\lambda/b_3\right)$. Στη γενικότερη όμως περίπτωση το τρίτο αυτό σύστημα των κώνων δεν θα τέμνει τα δύο πρώτα σε μια διεύθυνση που θα είναι κοινή για τα τρία συστήματα. Μια αυτονόητη λύση υφίσταται όταν: $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, που αντιστοιχεί σε περιθλώμενο μετ. κύματος στη διεύθυνση του προσπίπτοντος. Στη γενικότερη περίπτωση τελικά και για πρόσπτωση στο κρυσταλλικό πλέγμα επιπέδου μετ. κύματος με συνημίτονα κατεύθυνσης $\left(l_s, m_s, n_s\right)$ για να προσδιορίσουμε τις διευθύνσεις των κυρίων μεγίστων συμβολής, θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση:

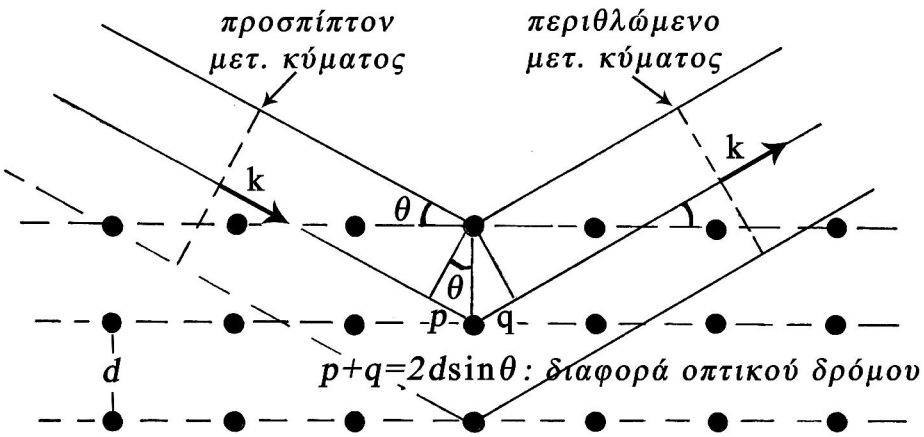
$$\left(\frac{m_1\lambda}{b_1} - l_s\right)^2 + \left(\frac{m_2\lambda}{b_2} - m_s\right)^2 + \left(\frac{m_3\lambda}{b_3} - n_s\right)^2 = 1 \qquad (7.7.2.12)$$

Η τελευταία προκύπτει αν τα l_0, m_0, n_0 της δεύτερης των (σχ. 7.7.2.11) αντικατασταθούν από αυτά που προκύπτουν από τις (σχ. 7.7.2.10). Και μας υποδεικνύει ότι για συγκεκριμένη τιμή του λ, υπάρχουν μόνο ορισμένες διευθύνσεις για το προσπίπτον μετ. κύματος που μας οδηγούν σε κύρια μέγιστα συμβολής. Δηλ. σε ισχυρά περιθλώμενη ακτινοβολία. Όμως η διαδικασία που προαναφέραμε δεν είναι τόσο δόκιμη για να περιγράψει το φαινόμενο της περίθλασης των ακτινών-Χ από τα κρυσταλλικά υλικά. Μια πλέον ευφυής και χρήσιμη στην πράξη σχέση είναι ο λεγόμενος τύπος του Bragg, με την ανάδειξη του οποίου θ' ασχοληθούμε στα επόμενα.

***Ο τύπος του* Bragg**

Ο τύπος του Bragg αναφέρεται στην περίθλαση των ακτινών-Χ από τα διάφορα νοητά επίπεδα τα οποία οριοθετούνται από τα κέντρα σκέδασης των κρυστάλλων. Δηλ. από τα άτομα από τα οποία απαρτίζονται. Και με δεδομένη την περιοδικότητα των ατόμων στο χώρο, μπορούν εντοπιστούν πλείστα όσα τέτοια επί-

πεδα. Ο τύπος του Bragg ισχύει, γιατί βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τις (σχ. 7.7.2.10) όπως και τις (σχ. 7.7.2.11). Και σ' αυτό το οποίο μας οδηγεί κατά κύριο λόγο είναι ο προσδιορισμός των ενδοατομικών αποστάσεων. Δηλ. των αποστάσεων μεταξύ των νοητών επιπέδων τα οποία σχηματίζουν τα άτομα στους κρυστάλλους. Ο τύπος θ' αποδείξουμε ότι έχει τη μορφή: $n\lambda = 2d\sin\theta$ με $n \in \mathbb{Z}$. Πρόκειται για την έκφραση της συνθήκης για ισχυρή 'ανάκλαση' (διεύθυνση κυρίου μεγίστου συμβολής κατά τη γωνία θ). Τα περιθλώμενα μετ. κύματος, προέρχονται από τη σκέδαση των ατόμων που βρίσκονται τοποθετημένα στα παράλληλα επίπεδα στα οποία όπως αναφέραμε μπορεί να υποδιαιρεθεί το κρυσταλλικό πλέγμα (Σχ. 7.7.2.2). d είναι η απόσταση των διαδοχικών επιπέδων, n η τάξη της συμβολής και



(Σχ. 7.7.2.2)

η γωνία θ καθορίζεται από τη διεύθυνση πρόσπτωσης και τη διεύθυνση των επιπέδων και όχι σε σχέση με την κάθετη προς αυτά.

Προκειμένου ν' αποδείξουμε τον τύπο του Bragg, θα θεωρήσουμε την πρόσπτωση ενός επιπέδου μετ. κύματος (Σχ. 7.7.2.3) σ' ένα κρυσταλλικό πλέγμα, με γωνία θ τέτοια ώστε το περιθλώμενο επίπεδο μετ. κύματος (στην ίδια όπως αποδεικνύεται γωνία) , ν' αντιστοιχεί σε κύριο μέγιστο συμβολής. Τότε τα μοναδιαία διανύσματα στις προαναφερόμενες διευθύνσεις θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_s &= l_s\mathbf{i} + m_s\mathbf{j} + n_s\mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{k}}_0 &= l_0\mathbf{i} + m_0\mathbf{j} + n_0\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \qquad (7.7.2.13)$$

Αν τώρα την κάθε μια των (σχ. 7.7.2.10) την πολλαπλασιάσουμε αντίστοιχα με n_1, n_2, n_3 όπου (n_1, n_2, n_3) χαρακτηρίζει ένα κέντρο σκέδασης θα έχουμε:

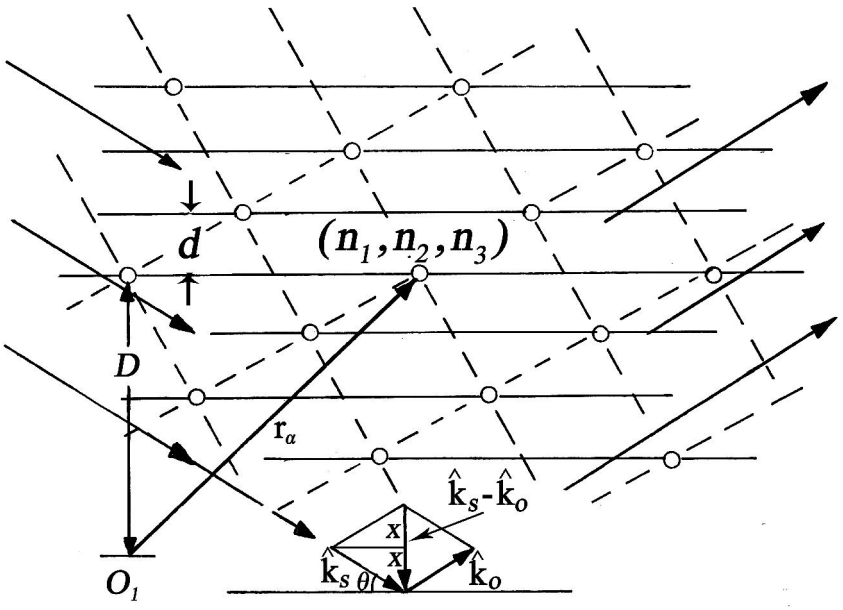
$$\left.\begin{aligned} n_1 m_1 \lambda &= n_1 b_1 \left(l_s - l_0\right) \\ n_2 m_2 \lambda &= n_2 b_2 \left(m_s - m_0\right) \\ n_3 m_3 \lambda &= n_3 b_3 \left(n_s - n_0\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7.7.2.14)$$

Και επειδή: $\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0 = \left(l_s - l_0\right)\mathbf{i} + \left(m_s - m_0\right)\mathbf{j} + \left(n_s - n_0\right)\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_a = n_1 b_1 \mathbf{i} + n_2 b_2 \mathbf{j} + n_3 b_3 \mathbf{k}$ το διάνυσμα θέσης από την αρχή O_1 προς το σημείο $\left(n_1, n_2, n_3\right)$, οι (σχ. 7.7.2.14) περιγράφονται από τη σχέση:

$$N\lambda = \mathbf{r}_a \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right) \qquad (7.7.2.15)$$

όπου: $$N = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 \qquad (7.7.2.16)$$

Για την τελευταία μπορούμε να πούμε ότι για ένα ακέραιο N και με δεδομένη την τριάδα των ακεραίων m_1, m_2, m_3 θα υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί των n_1, n_2, n_3 που



(Σχ. 7.7.2.3)

μας τον δίνουν. Και δεδομένου ότι το γινόμενο $N\lambda = \text{σταθ.}$ η (σχ. 7.7.2.15) παριστάνει – σύμφωνα με την αναλυτική γεωμετρία – μια εξίσωση επιπέδου το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0$. Οι συνδυασμοί των n_1, n_2, n_3 για τους οποίους $N\lambda = \text{σταθ.}$ (με τα m_1, m_2, m_3 δεδομένα), περιγράφουν τις θέσεις των σκεδαστών (ατόμων) στο συγκεκριμένο επίπεδο.

Και επειδή: $\left(\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right) \Big/ \left|\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right|$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του $\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0$, τότε το εσωτερικό γινόμενο: $\mathbf{r}_a \cdot \left[\left(\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right) \Big/ \left|\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right|\right]$ είναι η προβολή του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_a$ πάνω στο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0$. δηλ. είναι η απόσταση D, όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.7.2.3). Άρα:

$$D = \mathbf{r}_a \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right) \Big/ \left|\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right| \tag{7.7.2.17}$$

επομένως η (σχ. 7.7.2.15) γίνεται:

$$N\lambda = \mathbf{r}_a \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right) = D\left|\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right| \tag{7.7.2.18}$$

Επίσης από το (Σχ. 7.7.2.3): $\sin\theta = x \Big/ \left|\hat{\mathbf{k}}_0\right|$ και επειδή $\left|\hat{\mathbf{k}}_0\right| = 1 \Rightarrow x = \sin\theta$. Άρα $2x = \left|\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_0\right| = 2\sin\theta$. Και τελικά η (σχ. 7.7.2.18) μας δίνει:

$$N\lambda = 2D\sin\theta \tag{7.7.2.19}$$

Από τη σχέση αυτή είναι προφανές ότι για μια ορισμένη επιλογή των m_1, m_2, m_3 (δηλ. για μια ορισμένη επιλογή κύριου μεγίστου συμβολής), οι πιθανές τιμές του N είναι ακέραια πολλαπλάσια του μέγιστου κοινού διαιρέτη n των m_1, m_2, m_3. Όμως τα επίπεδα που αντιστοιχούν σε διαδοχικά πολλαπλάσια του n, έχουν μεταξύ τους ελάχιστη απόσταση d. Επομένως αντικαθιστώντας στη (σχ.7.7.2.19) το N με το n θα πρέπει το D ν' αντικατασταθεί με το d. Τότε η σχέση γίνεται:

$$n\lambda = 2d\sin\theta \tag{7.7.2.20}$$

Πρόκειται για το γνωστό τύπο του Bragg, όπως ισχύει στην Κρυσταλλογραφία.

7.8 *Περίθλαση Fresnel. Επανεξέταση της αρχής των Huygens- Fresnel για την περίπτωση της προσέγγισης κοντινού πεδίου*

Τα με σύντομο τρόπο αναγραφόμενα σ' αυτήν την παράγραφο, δεν έχουν μόνο ιστορική σημασία. Αλλά περιγράφουν την πρώτη προσπάθεια από τον J. A. Fresnel μιας ποσοτικής επίλυσης προβλημάτων περίθλασης του φωτός, τα οποία και επιβεβαιώνονται μέσω πειραμάτων. Πρόκειται για προβλήματα περίθλασης κοντινού πεδίου. Δηλ. για προβλήματα υπολογισμού της κατανομής της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (και κατά προέκταση της έντασης του φωτός) σε σχετικά 'κοντινή' απόσταση από τα περιθλώντα στοιχεία. Έχουμε όμως ήδη αναφέρει (και αποδείξει στην (Ασκ. 1: Λυμένη)) κατά τη μελέτη μας για την περίθλαση μακρινού πεδίου, ότι η έννοια χαρακτηρισμού του 'κοντινού' ή του 'μακρινού' πεδίου, δεν εξαρτάται μόνο από την απόσταση l επιπέδου παρατήρησης - περιθλώντος στοιχείου. Αλλά ταυτόχρονα και από τις μέγιστες των διαστάσεών τους d, καθώς και από το μήκος κύματος λ του χρησιμοποιούμενου φωτός. Αποδείχθηκε μάλιστα ότι για να έχουμε περίθλαση κοντινού πεδίου θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$l < \frac{d^2}{\lambda} \tag{7.8.1}$$

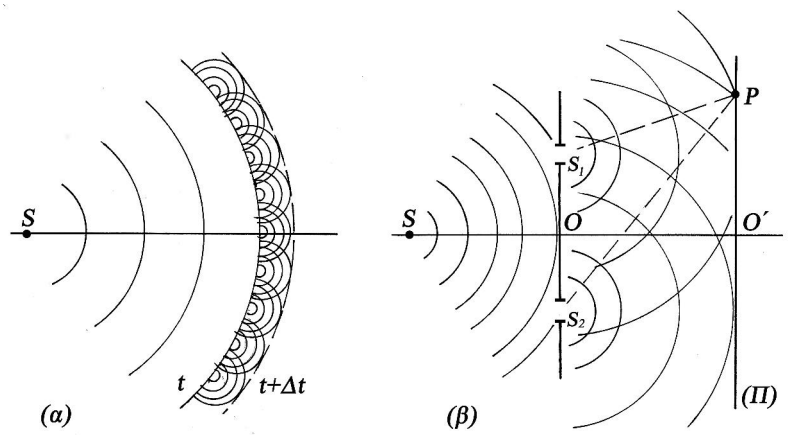
Π.χ. διαθέτουμε ένα κυκλικό άνοιγμα με $d = 5\text{mm}$ και το φωτίζουμε με ένα επίπεδο μετ. κύματος, που έχει μ.κ. ίσο με το μέσο μ.κ. του ορατού φωτός, το οποίο είναι: $\overline{\lambda} = 0.55 \times 10^{-3}\text{mm}$. Τότε πάνω από την απόσταση των: $\left(d^2/\lambda\right) \simeq 45\text{m}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της (§ 7.5.1) (περίθλαση Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα) για να υπολογίσουμε τις κατανομές του ηλ. πεδίου και της έντασης του φωτός. Κάτω όμως από την απόσταση αυτή, οι υπολογισμοί οδηγούν σε λανθασμένα αποτελέσματα. Και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι βρισκόμαστε σε περιοχές 'κοντινού' πεδίου και όχι 'μακρινού'. Με τον υπολογισμό των πεδίων στο εσωτερικό αυτών των 'περιοχών' (περιοχή περίθλασης Fresnel-κοντινού πεδίου) πρόκειται ν' ασχοληθούμε στα επόμενα.

Την εποχή των εργασιών του Fresnel ήταν γνωστές οι εξής θεωρίες:

α) ***Η αρχή του Ch. Huygens*** (περί το 1600). Η οποία αφορούσε τον τρόπο διάδοσης ενός μετ. κύματος φωτός στο χώρο (Σχ. 7.8.1α). Κατά τη διατύπωσή της: Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t κάθε σημείο ενός μετ. κύματος συνιστά συνεχή πηγή εκπομπής δευτερευόντων σφαιρικών κυματιδίων (wavelets), τα οποία διαδίδονται ομοιόμορφα και ελεύθερα στο χώρο. Και σε μια επόμενη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, το νέο μετ. κύματος θα είναι η περιβάλλουσα αυτών των κυματιδίων. Επρό-

κειτο για μια επιτυχημένη διατύπωση του συνεχούς, όσον αφορά τη διάδοση του φωτός στο χώρο, πριν αυτή εκφραστεί με μαθηματική ακρίβεια από την Η/Μ θεωρία του πεδίου σε μεταγενέστερη εποχή από τον J. C. Maxwell.

β) ***Της συμβολής, σύμφωνα με τον Th.Young*** (περί το 1802). Η οποία αφορούσε την επαλληλία δύο συμφώνων σφαιρικών μετ. κύματος. Για την περίπτωση

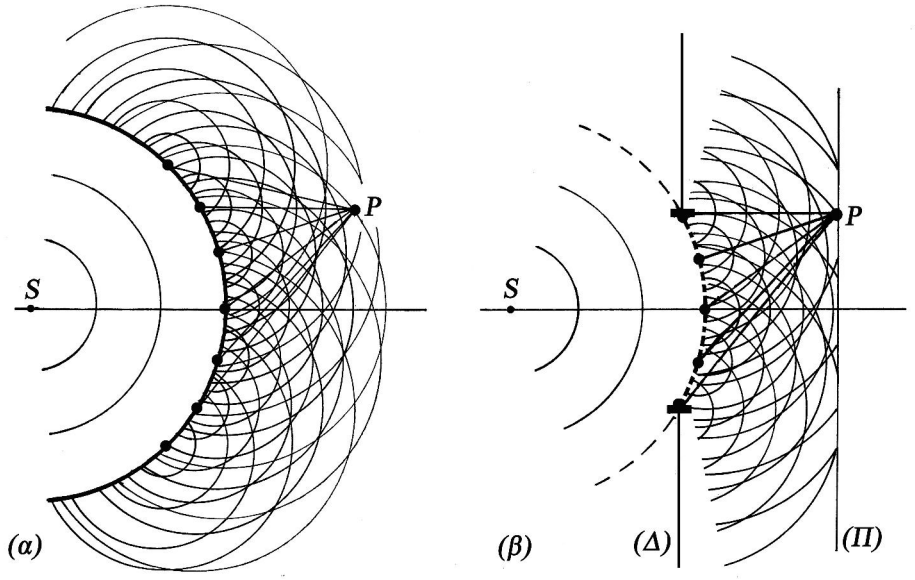


(Σχ. 7.8.1)

αυτή όπως γνωρίζουμε ο Young πέτυχε τη συμφωνία (συσχετισμό φάσεων) δύο σφαιρικών μετ. κύματος με τη διάταξη του (Σχ. 7.8.1β). Όπου η σημειακή πηγή S εκπέμπει ένα σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος το οποίο προσπίπτει σ' ένα διάφραγμα που περιλαμβάνει δύο ίδια μικρά ανοίγματα S_1, S_2 σε μια ορισμένη μεταξύ τους απόσταση. Από τα ανοίγματα αυτά επανεκπέμπονται δύο δευτερεύοντα σφαιρικά μετ. κύματος τα οποία έρχονται σε επαλληλία σ' οποιοδήποτε σημείο P ενός πετάσματος (Π) που βρίσκεται σε μια ορισμένη απόσταση από τα δύο κυκλικά ανοίγματα. Τότε με βάση την κυματική θεωρία (που ήταν αποδεκτή από τους Huygens και Young), τα κύματα συμβάλλουν στα διάφορα σημεία P με διαφορετικά πλάτη και φάσεις. Επομένως θα έχουμε αυξομείωση της έντασης του ηλ. πεδίου από σημείο σε σημείο. Με τελικό αποτέλεσμα (όσον αφορά την ένταση του φωτός) την επίσης αυξομείωσή της. Δηλ. την εμφάνιση κατά τα γνωστά φωτεινών και σκοτεινών κροσσών συμβολής καθώς και των ενδιάμεσων καταστάσεων έντασης.

Με τον συνδυασμό των δύο προαναφερόμενων διαδικασιών ο J.A. Fresnel (περί το 1818), πέτυχε την ποσοτική επίλυση προβλημάτων περίθλασης του φωτός. Στηρίχθηκε στην πρότασή του, που αργότερα ονομάστηκε ***αρχή των Huygens – Fresnel***. Εφαρμοζόμενη η αρχή αυτή για διάδοση του φωτός στον ελεύθερο χώρο, έχει να κάνει με τα εξής (Σχ. 7.8.2α): Ας θεωρήσουμε ότι οι τιμές των πλατών των κυματίων που αναδύονται από τα σημεία της επιφάνειας ενός μετώπου κύματος (στην προκειμένη περίπτωση σφαιρικού) είναι γνωστές και τα σημεία αυτά εκπέ-

μπουν με σύμφωνο τρόπο. Τότε η τιμή του πλάτους και η φάση του πεδίου σ' ένα σημείο P του χώρου σε μια ορισμένη θέση σε σχέση με το μέτ. κύματος, προκύπτει από τη σύμφωνη επαλληλία των διαταραχών που οφείλονται στα προαναφερόμενα κυμάτια. Δηλ. από τις τιμές των πλατών και τις διαφορές φάσης με τις οποίες συμβάλουν στο σημείο αυτό. Την αρχή αυτή ο Fresnel την εφάρμοσε για την επίλυση προβλημάτων περίθλασης κοντινού πεδίου όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.8.2β). Στην



(Σχ. 7.8.2)

πορεία του σφαιρικού μετ. κύματος παρενέβαλε διάφραγμα *(Δ)* που περιλάμβανε ένα κυκλικό άνοιγμα με διάμετρο πολύ μεγαλύτερη του μ.κ. της φωτίζουσας ακτινοβολίας. Τότε για να υπολογίσει το πλάτος του ηλ. πεδίου σ' ένα οποιοδήποτε σημείο του πετάσματος *(Π)* και κατά προέκταση την ένταση του φωτός (για να υπολογίσει δηλ. το περιθλώμενο πεδίο), εφάρμοσε τη προαναφερόμενη αρχή. Τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν σε πολύ καλή συμφωνία με αυτά που προέβλεπε η θεωρία. Με τελική συνέπεια η πρώτη προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων περίθλασης του φωτός να στεφθεί με επιτυχία.

Όμως η αποδοχή αυτής της αρχής από τον Fresnel (όπως θα δούμε στην (§ 7.8.1)), τον οδήγησαν στην αναθεώρηση όσον αφορά τις ιδιότητες των κυματιδίων και τον τρόπο που εκπέμπουν από τα διάφορα σημεία των μετ. κύματος. Οπότε και αναγκάσθηκε να κάνει τις εξής υποθέσεις:

α) Η τιμή του πλάτους ενός εκπέμποντος κυματιδίου δεν είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, αλλά εξαρτάται από ένα κατευθυντικό παράγοντα. Συγκεκριμένα τη γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ των διευθύνσεων πηγής – κυματιδίου και κυματιδίου – σημείου P.

β) Τα πλάτη των κυματιδίων είναι αντιστρόφως ανάλογα με το μ.κ. λ των διαταραχών.

γ) Η φάση με την οποία εκπέμπεται το κάθε κυματίδιο, προπορεύεται της φάσης του μετ. κύματος κατά $\pi/2$ rad.

Οι ιδιότητες αυτές – των υποθετικών ούτως ή άλλως κυματιδίων της αρχής του Huygens – δεν μπορούσαν να ερμηνευτούν εκείνη τη εποχή από τους υποστηριχτές της κυματικής θεωρίας για το φως, το οποίο βέβαια θεωρούνταν τότε σαν ελαστικές διαταραχές του 'αιθέρα' (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (ΘΕΜΑ 1)). Οι ιδιότητες αυτές προέκυψαν φυσιολογικά σαν αποτέλεσμα της αυστηρής μελέτης της βαθμωτής θεωρίας της περίθλασης του φωτός, για πρώτη φορά από τον G. Kirchhoff (περί το 1883) με βάση την κυματική φύση του φωτός, όπως προέκυψε από την Η/Μ θεωρία του Maxwell (βλ. ΘΕΜΑ 1).

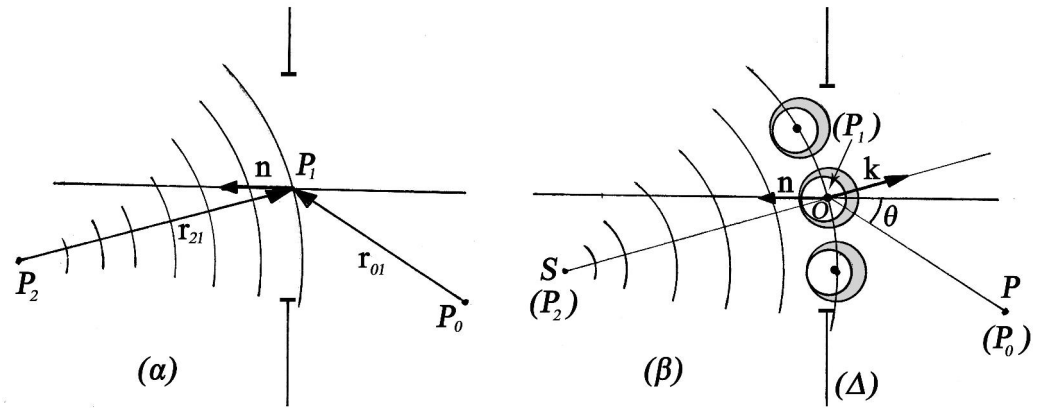
7.8.1 *Η εφαρμογή της αρχής των Huygens-Fresnel για την ελεύθερη διάδοση ενός σφαιρικού μετ. κύματος. Ζώνες Fresnel. Οι υποθέσεις του Fresnel για τα σφαιρικά κυματίδια*

Η ανάγκη της αποδοχής του παράγοντα κατευθυντικότητας που σχετίζεται με τη μη ομοιόμορφη εκπομπή – όσον αφορά το πλάτος – των κυματιδίων από ένα μετ. κύματος, προέκυψε για τον εξής λόγο. Αν υποθέταμε την ομοιόμορφη εκπομπή (βλ. Σχ. 7.8.2β) θα έπρεπε τα κυματίδια να εκπέμπουν όχι μόνο στο χώρο τον μετά το άνοιγμα, αλλά και προς την αντίθετη κατεύθυνση. Δηλ. προς την κατεύθυνση της φωτίζουσας πηγής. Ένα τέτοιο γεγονός όμως δεν παρατηρήθηκε πειραματικά. Επομένως ο κατευθυντικός παράγοντας θα έπρεπε να έχει τέτοια μορφή έτσι που να μην υφίσταται διάδοση προς τα πίσω. Δηλ. προς αυτή την κατεύθυνση να μηδενιζόταν το πλάτος του κυματιδίου. Η αναλυτική έκφραση του παράγοντα κατευθυντικότητας που κατά τα γνωστά ονομάζεται ***παράγοντας κλίσης (obliquity factor)***, αναδεικνύεται σαν συνέπεια της εφαρμογής της βαθμωτής θεωρίας της περίθλασης του Kirchhoff (βλ. ΘΕΜΑ 1 (Σχ. 1.3), (σχ. 1.28,29)) και δίνεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}\right) - \cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{21}\right)\right] \qquad (7.8.1.1)$$

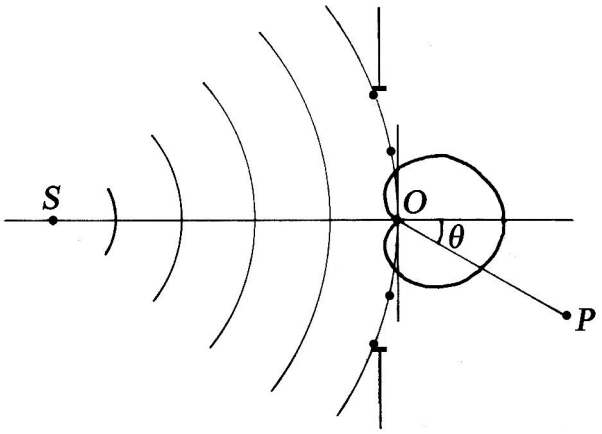
όπου για την ερμηνεία των συμβόλων θα πρέπει ν' ανατρέξουμε στο (Σχ. 7.8.1.1.α) που είναι ίδιο με αυτό του ((Σχ. 1.3) του ΘΕΜΑΤΟΣ 1). Οπότε για τη συνήθη περίπτωση που το σφαιρικό μετ. κύματος από την S προσπίπτει συμμετρικά στο περθλόν άνοιγμα (SO κάθετη στο διάφραγμα *(Δ)* που το περιλαμβάνει) θα έχουμε: $\widehat{\mathbf{n},\mathbf{r}_{21}} = \widehat{\mathbf{n},SO} = \pi$. Οπότε $\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{21}\right) = -1$ και η (σχ. 7.8.1.1) γίνεται:

$$\kappa = \kappa(\theta) = \frac{1}{2}[1+\cos\theta] \qquad (7.8.1.2)$$



(Σχ. 7.8.1.1)

Η οποία σε πολικές συντεταγμένες $\kappa = \kappa(\theta)$, ανήκει στο είδος των καρδιοειδών καμπυλών που βλέπουμε στο (Σχ. 7.8.1.2). Και η οποία προβλέπει: Πλάτος κυματι-



(Σχ. 7.8.1.2)

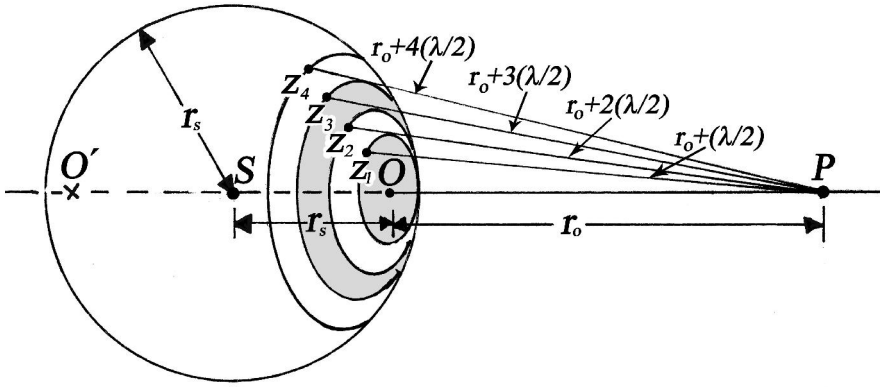
δίου για $\theta = 0$ μέγιστο. Μηδενική τιμή πλάτους για $\theta = \pi$ (δηλ. δεν υφίσταται διάδοση κυματιδίων προς το χώρο που βρίσκεται η πηγή). Και ενδιάμεσες τιμές πλάτους για $0 < \theta < \pi$ rad.

Εφαρμογή της αρχής των Huygens-Fresnel για διάδοση στον ελεύθερο χώρο

Θεωρούμε τη διάδοση στον ελεύθερο χώρο ενός σφαιρικού μετ. κύματος (Σχ. 7.8.1.3) το οποίο εκπέμπεται από μια σημειακή πηγή μονοχρωματικού φωτός S. P είναι ένα τυχαίο σημείο στο χώρο και O το σημείο στο οποίο η ευθεία SP τέμνει το σφαιρικό μέτ. κύματος. Όσον αφορά το χρόνο που μεσολάβησε για τη διάδοση του κύματος από την S στο O είναι ο t'. Τότε η ένταση του ηλ. πεδίου της διαταραχής στο σημείο O (όπως και σε κάθε σημείο της σφαίρας ακτίνας r_s όπου $r_s = SO$) θα δίνεται σε μιγαδική μορφή από τη γνωστή σχέση (βλ. Κεφ. 1: Κύματα, (§ 1.8) (σχ. 1.8.8)): $E' = \frac{E_o}{r_s} e^{(\omega t' - kr_s)}$. Και το πραγματικό μέρος της τελευταίας σχέσης μας δίνει το φυσικό μέγεθος της έντασης του ηλ. πεδίου με τη μορφή:

$$E' = \frac{E_o}{r_s} \cos\left(\omega t' - kr_s\right) \tag{7.8.1.3}$$

όπου το πλάτος E_o / r_s μετρείται σε (V/m). Αν επίσης θεωρήσουμε την ανεμπόδιστη διάδοση του σφαιρικού μετ. κύματος από την πηγή S στο P, τότε η ένταση



(Σχ. 7.8.1.3)

του ηλ. πεδίου αυτής της διαταραχής θα δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{E_o}{\left(r_s + r_o\right)} \cos\left[\omega t - k\left(r_s + r_o\right)\right] \tag{7.8.1.4}$$

Και προκειμένου να εφαρμόσουμε την αρχή των Huygens-Fresnel, θα πρέπει να φέρουμε σε επαλληλία στο P το πλήθος των στοιχειωδών κυματιδίων που αναδύονται από το σφαιρικό μέτ. κύματος που μας δίνει η (σχ. 7.8.1.3). Και βέβαια να προσδιορίσουμε αναλυτικά την συνισταμένη της έντασης του ηλ. πεδίου στο ση-

μείο P, τηρουμένων βέβαια των περιορισμών όσον αφορά το πλάτος τους που οφείλεται στον παράγοντα κλίσης $\kappa = \kappa(\theta)$. Η σχέση αυτή τελικά (την οποία θ' αναδείξουμε στα επόμενα), θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με τη (σχ. 7.8.1.4), δηλ. το πεδίο που προκύπτει στο σημείο P κατά την ανεμπόδιστη διάδοση του σφαιρικού μετ. κύματος από την πηγή S στο σημείο P. Θα επιβεβαιωθεί μ' αυτόν τον τρόπο η ακρίβεια της αρχής των Huygens-Fresnel και θα είναι μέσω αυτής της διαδικασίας που θ' αναδειχθούν οι υποθέσεις στις οποίες αναγκάστηκε να καταφύγει ο Fresnel για τα στοιχειώδη κυμάτια και τις οποίες αναφέραμε στην αρχή της (§ 7.8).

Οι ζώνες μισής περιόδου τουFresnel

Ο Fresnel, προκειμένου να δώσει μια πιο πρακτική υπόσταση στη σημασία που έχουν το σύνολο (θεωρητικά άπειρο) των στοιχειωδών εκπομπών κυματιδίων από την επιφάνεια του σφαιρικού μετ. κύματος που διέρχεται από το σημείο O (Σχ. 7.8.1.3), πρότεινε το εξής: Το σύνολο των εκπομπών, να διευθετηθούν σε κυκλικές ζώνες όπως αυτές φαίνονται από το σημείο P στο ίδιο σχήμα. Το κέντρο των ζωνών θα είναι το σημείο O. Όσον αφορά δε την απόσταση του άκρου της κάθε ζώνης: $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ από το O θα ισχύει: $r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$, $r_2 = r_0 + 2\frac{\lambda}{2}, r_3 = r_0 + 3\frac{\lambda}{2}, ...$ και στη γενικότερη περίπτωση:

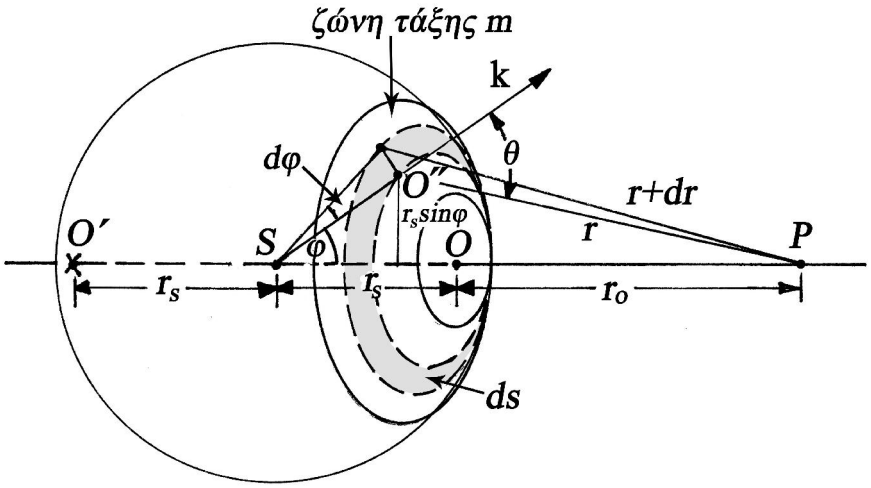
$$r_N = r_0 + N\frac{\lambda}{2} \tag{7.8.1.5}$$

που σημαίνει ότι κάθε σημείο (εκπομπός κυματιδίου) μιας ζώνης έστω της $m-1$, θα έχει ένα αντίστοιχο σημείο (εκπομπό κυματιδίου) της ζώνης m, που η διαφορά δρόμου τους από το P θα είναι ίση με $\lambda/2$ (δηλ. όσο το μισό του μ.κ.). Και κατά προέκταση η διαφορά φάσης με την οποία έρχονται σε επαλληλία στο σημείο P προκειμένου να συμβάλλουν θα είναι $\pi\,\mathrm{rad}$. Το ίδιο ακριβώς θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι συμβαίνει αμοιβαία και μεταξύ του συνόλου των εκπεμπόντων κυματιδίων μεταξύ δύο διαδοχικών ζωνών.

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχή να προσδιορίσουμε* το ηλ. πεδίο το οποίο αναπτύσσεται στο σημείο P από τη συνεισφορά όλων των κυματιδίων τα οποία εκπέμπονται από τη ζώνη τάξης m και διαδιδόμενα έρχονται σε επαλληλία και συμβάλλουν σ' αυτό. Στο (Σχ. 7.8.1.4) βλέπουμε τη ζώνη τάξης m της οποίας αν και το εμβαδόν είναι πάρα πολύ μικρό, εντούτοις είναι πεπερασμένο. Για το λόγο αυτό στο εσωτερικό της ζώνης m επιλέγουμε ένα απειροστό διαφορικό ds μορφής κυ-

* E. Hecht: 'Optics' Fifth Ed. Addison - Wesley N.Y. (2017) (Ch. 10).

κλικού δακτυλίου. Η γωνία με την οποία φαίνεται από το S, το εσωτερικό του άκρο σε σχέση με τον άξονα SOP (τον οποίο ονομάζουμε οπτικό άξονα) είναι η ϕ. Οπότε η γωνία με την οποία φαίνεται το εύρος του είναι η $d\phi$. Τα κέντρα εκπομπής των κυματιδίων στο εσωτερικό του ds είναι μεταξύ τους σύμφωνα και υποθέτουμε ότι εκπέμπουν σε φάση με το αρχικό μετ. κύματος. Τα κυματίδια, διαδιδόμενα τότε κατά μια απόσταση r φθάνουν στο σημείο P μέσα σε χρόνο t (χρόνος μετρούμενος για τη διαδρομή $SO'P$) με την ίδια φάση: $\omega t - k(r_s + r)$. Επίσης γνωρίζουμε με βάση τη (σχ. 7.8.1.3) ότι το πλάτος της έντασης του ηλ. πεδίου του αρχικού μετ. κύματος σε απόσταση r_s από την πηγή είναι E_o/r_s.



(Σχ. 7.8.1.4)

Υποθέτουμε τώρα ότι η ένταση του ηλ. πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας E_A των στοιχειωδών εκπομπών πάνω στην επιφάνεια ds, είναι ανάλογη με το πλάτος E_o/r_s του αρχικού μετ. κύματος στη θέση αυτή. Και αν Q είναι ο συντελεστής αναλογίας, τότε μπορούμε να γράψουμε: $E_A = Q(E_o/r_s)$. Επομένως η στοιχειώδης ένταση του ηλ. πεδίου dE στη θέση P που οφείλεται στα εκπεμπόμενα κυματίδια που βρίσκονται στο εσωτερικό του εμβαδού ds της ζώνης θα είναι:

$$dE = \kappa_m \frac{E_A}{r} \cos\left[\omega t - k(r + r_s)\right] ds \qquad (7.8.1.6)$$

Όπου κ_m ο παράγοντας κλίσης στη θέση της ζώνης m, όπου με δεδομένο τη μικρή του μεταβολή από ζώνη σε ζώνη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σταθερός. Προκειμένου τώρα να ολοκληρώσουμε τη (σχ. 7.8.1.6) θα πρέπει να εκφράσουμε

το διαφορικό ds συναρτήσει του r. Αυτό θα το κάνουμε με τη βοήθεια του (Σχ. 7.8.1.4) από όπου βρίσκουμε:

$$ds = r_s d\phi 2\pi \left(r_s \sin\phi \right) \tag{7.8.1.7}$$

Και εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $SO''P$ βρίσκουμε: $r^2 = r_s^2 + \left(r_s + r_0 \right)^2 - 2r_s \left(r_s + r_0 \right)\cos\phi$. Οπότε διαφορίζοντας την τελευταία σχέση, με δεδομένο ότι r_s, r_0 είναι σταθερά βρίσκουμε:

$$2rdr = 2r_s \left(r_s + r_0 \right)\sin\phi d\phi \tag{7.8.1.8}$$

Και από την τελευταία, αντικαθιστώντας το $\sin\phi d\phi$ στη (σχ. 7.8.1.7) βρίσκουμε:

$$ds = 2\pi \frac{r_s}{r_s + r_0} rdr \tag{7.8.1.9}$$

Το ds αντικαθίσταται στη (σχ. 7.8.1.6) οπότε:
$E_m = \kappa_m 2\pi \frac{E_A r_s}{\left(r_s + r_0 \right)} \int_{r_{m-1}}^{r_m} \cos\left[\omega t - k\left(r_s + r \right) \right] dr$. Και μετά την ολοκλήρωση:

$$E_m = \frac{-\kappa_m E_A r_s \lambda}{\left(r_s + r_0 \right)} \left[\sin\left(\omega t - kr_s - kr \right) \right] \Bigg|_{r=r_{m-1}}^{r=r_m} \tag{7.8.1.10}$$

Οπότε με την αντικατάσταση (με βάση τη (σχ. 7.8.1.5)):
$r_m = r_0 + m\frac{\lambda}{2}$, $r_{m-1} = r_0 + \left(m-1 \right)\frac{\lambda}{2}$ βρίσκουμε τελικά (βλ. Άσκ. 13: Λυμένη):

$$E_m = \left(-1 \right)^{m+1} \frac{2\kappa_m E_A r_s \lambda}{\left(r_s + r_0 \right)} \sin\left[\omega t - k\left(r_s + r_0 \right) \right] \tag{7.8.1.11}$$

Βλέπουμε από την τελευταία σχέση ότι οι αλγεβρικές τιμές των πλατών των εντάσεων των ηλ. πεδίων που αναπτύσσουν οι εκπομποί των διαδοχικών ζωνών στο σημείο P έχουν αντίθετο πρόσημο. Που σημαίνει ότι συμβάλλουν στο P με διαφορά φάσης $\pi\,\text{rad}$. Δηλ. το συνολικό πλάτος που προκύπτει από δύο διαδοχικές ζώνες έχει τιμή ίση με το μηδέν. Και όπως βλέπουμε από τη (σχ. 7.8.1.11) ο λόγος E_m/κ_m είναι σταθερός. Όμως το εμβαδόν S_m εκάστης ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$S_m = \frac{\pi r_s \lambda}{(r_s + r_0)}\left[r_0 + \frac{(2m-1)\lambda}{4}\right] \qquad (7.8.1.12)$$

(βλ. Άσκ. 14: Λυμένη) στην οποία επίσης αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή $\bar{r}_m$ της απόστασης εκάστης ζώνης από το P είναι:

$$\bar{r}_m = r_0 + (2m-1)\lambda/4 \qquad (7.8.1.13)$$

Επομένως το εμβαδόν κάθε ζώνης, βαίνει στοιχειωδώς αυξανόμενο καθώς αυξάνεται το m. Άρα και ο αριθμός των εκπεμπόμενων κυματιδίων. Ταυτόχρονα όμως με βάση τη (σχ. 7.8.1.2): $\kappa(\theta) = (1/2)[1+\cos\theta]$, καθώς το m αυξάνεται, αυξάνεται το θ και άρα ελαττώνεται ο παράγοντας κλίσης $\kappa(\theta)$. Η αντιστάθμιση όμως προκειμένου ο λόγος E_m/κ_m να παραμένει σταθερός είναι ότι αυξάνεται και η μέση απόσταση εκάστης ζώνης από το P με βάση τη (σχ. 7.8.1.13).

Η ανάδειξη των υποθέσεων του Fresnel

1) ***Ο ρόλος του παράγοντα κλίσης*** $\kappa(\theta)$

Από την (Άσκ. 15 Λυμένη), αποδεικνύεται ότι το πλάτος της ηλ. διαταραχής που παράγεται από το σύνολο των μη εμποδιζόμενων κυματιδίων που συμβάλλουν στο σημείο P, είναι περίπου ίσο με το μισό της συνεισφοράς της πρώτης ζώνης. Δηλ.

$$E \simeq E_1/2 \qquad (7.8.1.14)$$

Η τελευταία όμως σχέση προέκυψε με βάση την υπόθεση του Fresnel ότι η συνεισφορά της τελευταίας ζώνης E_m (την οποία συναντούμε για $\theta = 90^0$) έχει μηδενική τιμή. Δηλ. ότι ο παράγοντας κλίσης $\kappa(\theta) = 0$ για $\pi/2 \le \theta \le \pi$.

2) ***Τα πλάτη των κυματιδίων θα είναι αντιστρόφως ανάλογα του*** λ

Συγκρίνοντας τώρα τη (σχ. 7.8.1.14) με τη (σχ. 7.8.1.11) για $m=1$ βρίσκουμε τελικά:

$$E = \frac{E_1}{2} = \frac{\kappa_1 E_A r_s \lambda}{(r_s + r_0)}\sin\left[\omega t - k(r_s + r_0)\right] \qquad (7.8.1.15)$$

Η τελευταία αυτή σχέση θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με την ένταση του ηλ. πεδίου που προκύπτει κατά τη διάδοση ανεμπόδιστα του σφαιρικού μετ. κύματος κατά $r_s + r_0$ (βλ. (σχ. 7.8.1.4)) σε χρόνο t από την πηγή S στο σημείο P. Δηλ. την:

$$E = \frac{E_0}{(r_s + r_0)} \cos\left[\omega t - k(r_s + r_0)\right] \tag{7.8.1.16}$$

Οπότε από τη σύγκριση των πλατών των (σχ. 7.8.1.15,16) θα έχουμε: $E_0 = E_A r_s \lambda$ $\left[\kappa_1 \simeq 1 \ (\theta \simeq 0)\right]$. Άρα:

$$E_A = \frac{E_0}{r_s \lambda} \tag{7.8.1.17}$$

Από την οποία διαπιστώνουμε ότι το πλάτος της έντασης του πεδίου των κυματιδιων E_A (ένταση ανά μονάδα επιφάνειας), είναι αντιστρόφως ανάλογο του μ.κ. της εκπεμπόμενης διαταραχής.

3) ***Η διαφορά φάσης με την οποία εκπέμπουν τα κυματίδια σε σχέση με το αρχικό μετ. κύματος***

Η διαπίστωση αυτή γίνεται και πάλι με τη σύγκριση των αρμονικών όρων των (σχ. 7.8.1.15,16), οι οποίοι έχουν διαφορά φάσης μεταξύ τους $\pi/2$.

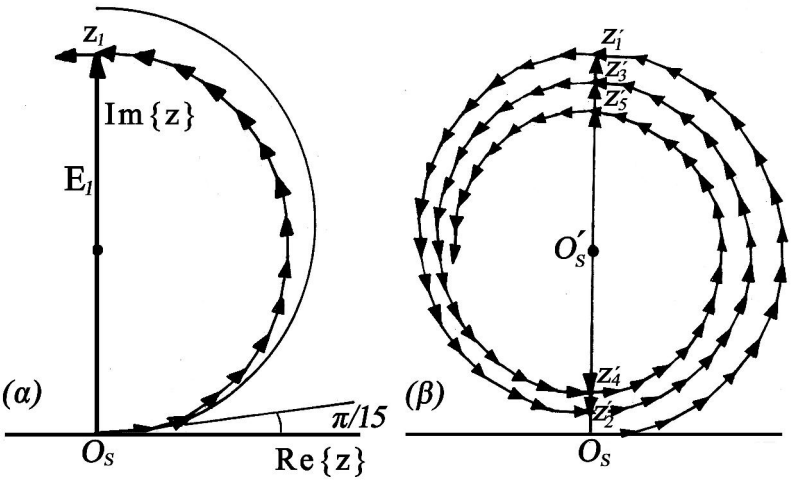
7.8.2 *Η πρόσθεση των φασόρων και η καμπύλη ταλάντωσης*

Για την ποιοτική κυρίως ερμηνεία προβλημάτων περίθλασης Fresnel από κυκλικής συμμετρίας περιθλώντα στοιχεία, τα οποία φωτίζονται από σφαιρικά ή επίπεδα μονοχρωματικά μετ. κύματος, θα χρησιμοποιήσουμε τη λεγόμενη ***καμπύλη ταλάντωσης (vibration curve)***. Πρόκειται ουσιαστικά για μια γραφική κατασκευή με τη βοήθεια της οποίας θα είμαστε σε θέση να προσδιορίζουμε κάθε φορά το μέτρο της τιμής του πλάτους της έντασης του ηλ. πεδίου στα διάφορα σημεία P. Τα πεδία αυτά θ' αναπτύσσονται από τις συνεισφορές των διαταραχών που προέρχονται από ένα ορισμένο αριθμό ζωνών (άρτιων ή περιττών) ή ακόμη και από τμήματά τους. Η αρχή γίνεται με την υπόθεση ότι κάθε ζώνη Fresnel μπορεί να διαιρεθεί σ' ένα πλήθος N τον αριθμό (άρτιο ή περιττό) υποζωνών, τα άκρα των οποίων θα απέχουν διαδοχικά από το σημείο P κατά:

$$r_0 + \frac{\lambda}{2N},\ r_0 + \frac{2\lambda}{2N},\ r_0 + \frac{3\lambda}{2N}, \cdots, r_0 + \frac{\lambda}{2} \tag{7.8.2.1}$$

Δηλ. οι διαφορές οπτικών δρόμων από το P μεταξύ δύο διαδοχικών υποζωνών θα είναι $\lambda/2N$, ή η διαφορά φάσης με την οποία συμβάλλουν οι διαταραχές που προέρχονται από αυτές θα είναι $k(\lambda/2N) = \pi/N$ rad.

Έστω λοιπόν ότι εκφράζουμε τα προαναφερόμενα στην πρώτη ζώνη Fresnel. Οπότε οι διαταραχές του συνόλου των κυματιδίων που συμβάλλουν στο σημείο P μας δίνουν σαν ένταση ηλ. πεδίου το πλάτος E_1. Το πλάτος αυτό σε ένα διάγραμμα φασόρων (Σχ. 7.8.2.1α) θα παριστάνεται με τον διανυσματικό φάσορα $\mathbf{E}_1$. Στην πραγματικότητα οι συνεισφορές της κάθε υποζώνης είναι ένας μιγαδικός αριθμός

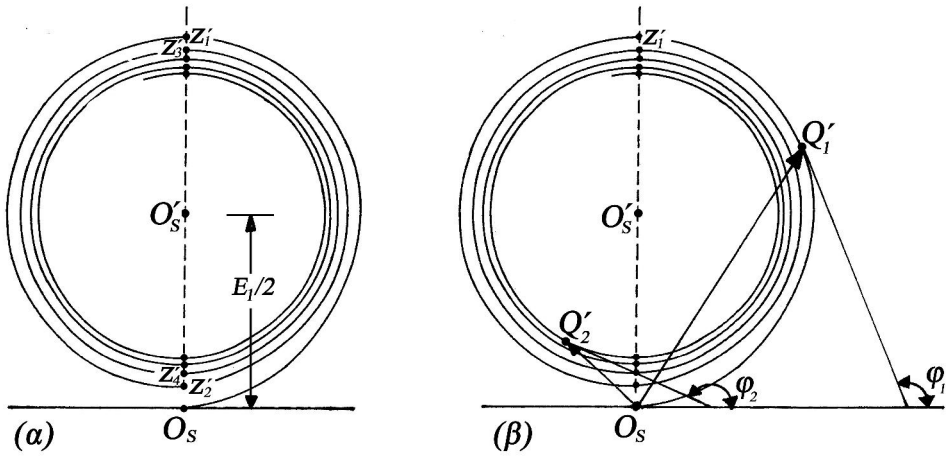


(Σχ. 7.8.2.1)

$z = \alpha' + i\beta'$ που στην πολική του μορφή $\mathrm{z} = \alpha e^{i\beta} = \alpha' + i\beta' \left(\alpha' = \mathrm{Re}\{\mathrm{z}\},\ \beta' = \mathrm{Im}\{\mathrm{z}\}\right)$ χαρακτηρίζεται από ένα πλάτος α και μια φάση β, με $a = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$ και $\beta = \arctan\left(\beta'/\alpha'\right)$. Επομένως οι φάσορες εγγράφονται στο μιγαδικό επίπεδο (Σχ. 7.8.2.1α), με τον οριζόντιο άξονα να παριστάνει το πραγματικό τους μέρος και τον κατακόρυφο το φανταστικό. Έστω τώρα ότι χωρίζουμε την πρώτη ζώνη σε 15 υποζώνες αρχής γενομένης από το σημείο O (Σχ. 7.8.1.3), το οποίο στο διάγραμμα του (Σχ. 7.8.2.1) παριστάνεται με το O_s. Από το O_s εκκινεί ο πρώτος υποφάσορας που παριστάνει την συνεισφορά στο πλάτος του ηλ. πεδίου των κυματιδίων της πρώτης υποζώνης που συμβάλλουν στο σημείο P. Η κλίση αυτού του διανύσματος σε σχέση με τον πραγματικό άξονα είναι $(\pi/15\mathrm{rad})$. Και όσον αφορά την κλίση του πραγματικού άξονα $(0\mathrm{rad})$ παριστάνει κατά παραδοχή τη φάση του σφαιρικού εδώ προσπίπτοντος μετ. κύματος. Οι διαδοχικές συνεισφορές των επόμενων υποζωνών, παριστάνονται από φάσορες των οποίων οι κλίσεις αυξάνονται διαδοχικά κατά γωνία $\pi/15\mathrm{rad}$. Ο φάσορας της τελευταίας ζώνης (με διαφορά φάσης από τον πρώτο $\pi\mathrm{rad}$) είναι ένα διάνυσμα παράλληλο και με διεύθυνση αντίθετη του πρώτου. Επειδή όμως από υποζώνη σε υποζώνη λόγω του παράγοντα κλίσης το πλάτος των υποφασόρων στοιχειωδώς ελαττώνεται, το άκρο του τελευταίου δεν συναντά την κο-

ρυφή του ημικυκλίου αλλά βρίσκεται λίγο πιο κάτω από αυτό. Το διανυσματικό τώρα άθροισμα όλων των υποφασόρων είναι το διάνυσμα $\mathbf{E}_1$ κάθετο προς τον πραγματικό άξονα (δηλ. την οριζόντια διεύθυνση). Και από το γεγονός αυτό αποδεικνύεται ότι η κατασκευή Fresnel οδηγεί στο αποτέλεσμα: Η φάση του πεδίου της συνεισφοράς της πρώτης ζώνης (όπως και των επόμενων που θα δούμε), προηγείται της φάσης του προσπίπτοντος μετ. κύματος κατά $\pi/2$rad (ή και ακέραιο πολλαπλάσιο αυτού).

Στο (Σχ. 7.8.2.1β) μπορούμε να παρακολουθήσουμε βήμα προς βήμα με τη βοήθεια της διανυσματικής πρόσθεσης των υποφασόρων, τις διαδοχικές συνεισφορές των επόμενων ζωνών $z_2, z_3, z_4, \cdots$ (σημεία $z_2', z_3', z_4', \cdots$ στο σχήμα), χωρισμένων όπως και η πρώτη σε υποζώνες*. Και αν το $N \to \infty$ για κάθε ζώνη, τότε τα διακριτά τμήματα των ημικυκλίων γίνονται συνέχεις καμπύλες που συνθέτουν συνολικά μια σπείρα η οποία ελίσσεται αριστερόστροφα (Σχ. 7.8.2.2α). Είναι αυτή που συνιστά



(Σχ. 7.8.2.2)

την καμπύλη ταλάντωσης. Οι συνεισφορές στο P της δεύτερης ζώνης, θα είναι το διάνυσμα $\overline{z_1'z_2'}$, της τρίτης ζώνης το $\overline{z_2'z_3'}$ κ.ο.κ. Οπότε το συνολικό πεδίο των συμβαλλόμενων διαταραχών στο σημείο P σε αλγεβρική μορφή θα δίνεται από τη σχέση:

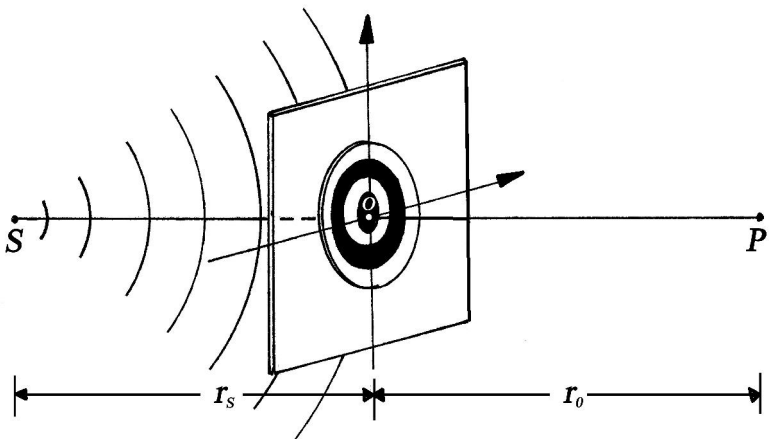
$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{i\pi} + E_3 e^{i2\pi} + E_4 e^{i3\pi} + E_5 e^{i4\pi} + \cdots + E_m e^{i(m-1)\pi} = \\ &= E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - \cdots \pm E_m \end{aligned} \qquad (7.8.2.2)$$

* F.L. Pedrotti, L.S. Pedrotti: 'Introduction to Optics', Prentice - Hall International Inc. Second Ed. (1993).

όπου m μπορεί να είναι άρτιος ή περιττός αριθμός. Η τελευταία σχέση, θ' αποτελέσει τη βάση των σε γενικές γραμμές ποιοτικών υπολογισμών για τα περιθλώμενα πεδία από κυκλικά στοιχεία στην προσέγγιση του κοντινού πεδίου (περίθλαση Fresnel). Στο (Σχ. 7.8.2.2β) το διάνυσμα $\overline{O_s Q_1'}$ παριστάνει τη συνεισφορά στην ένταση του ηλ. πεδίου των εκπομπών κυματιδίων στο σημείο P του οπτικού άξονα, που βρίσκονται στο εσωτερικό της πρώτης ζώνης σε απόσταση Q_1' από το σημείο O. Οι εφαπτόμενες στα σημεία O_s και Q_1' μας δίνουν τη γωνία ϕ_1 που είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των εκπομπών κυματιδίων στα σημεία O και Q_1'. Επίσης σαν – ένα δεύτερο παράδειγμα – το σημείο σε απόσταση Q_2' από το σημείο O, βρίσκεται στο εσωτερικό της όγδοης ζώνης. Οπότε το διάνυσμα $\overline{O_s Q_2'}$ είναι η συνεισφορά στην ένταση του ηλ. πεδίου των επτά πρώτων ζωνών και τμήματος τη όγδοης στο σημείο P του οπτικού άξονα από τα περιλαμβανόμενα σ' αυτές εκπέμποντα κυματίδια. Και η διαφορά φάσης μεταξύ κυματιδίων που εκπέμπουν από τα σημεία O και Q_2' είναι η ϕ_2.

7.8.3 *Περίθλαση Fresnel από κυκλικό άνοιγμα που φωτίζεται από σφαιρικό μετ. κύματος*

Θεωρούμε ότι από το σημείο S (Σχ. 7.8.3.1), μια σημειακή πηγή εκπέμπει ένα σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος. Το μέτωπο διαδίδεται και προσπίπτει συμμετρικά σ' ένα διάφραγμα που περιλαμβάνει ένα κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R.



(Σχ. 7.8.3.1)

Θα επιχειρήσουμε στα επόμενα να προσδιορίσουμε – ποιοτικά τουλάχιστον – με διάφορα παραδείγματα την ένταση του ηλ. πεδίου και κατά προέκταση την ένταση

του φωτός σε διάφορα σημεία του χώρου μετά το περιθλόν άνοιγμα. Τα παραπάνω με την προϋπόθεση ότι τηρούνται οι συνθήκες περίθλασης Fresnel που αφορούν: Τη διάμετρο $d = 2R$ του κυκλικού ανοίγματος, την απόσταση $l = r_0$ των σημείων P μετά από αυτό, καθώς και το μ.κ. λ της ακτινοβολίας $\left(l = r_0 < d^2/\lambda\right)$. Ο προσδιορισμός αυτός θα γίνει με τη βοήθεια της θεωρίας των ζωνών μισής περιόδου του Fresnel και ειδικότερα της καμπύλης ταλάντωσης.

Η τιμή της έντασης του περιθλώμενου πεδίου, όταν η θέση του σημείου P στον οπτικό άξονα SOP είναι σταθερή και μεταβάλλεται η διάμετρος του περιθλώντος ανοίγματος

Αρχικά θεωρούμε ότι το σημείο P βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα SOP της διάταξης, όπου O το κέντρο του κυκλικού περιθλώντος ανοίγματος (Σχ. 7.8.3.1). Και έστω ότι από το P, βλέπουμε το άνοιγμα να καλύπτεται από ακέραιο αριθμό (όχι πολύ μεγάλου πλήθους) ζωνών Fresnel. Τότε:

α) Αν ο αριθμός αυτός είναι άρτιος, με τη βοήθεια της (σχ. 7.8.2.2) θα έχουμε: $E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - \cdots - E_m = \left(E_1 - E_2\right) + \left(E_3 - E_4\right) + \cdots\cdots + \left(E_{m-1} - E_m\right)$. Και με το δεδομένο ότι: $E_{m-1} \simeq E_m$ (για γειτονικά πλάτη για τα οποία ο παράγοντας κλίσης είναι περίπου ίδιος), το συνολικό πλάτος θα είναι περίπου ίσο με το μηδέν ($E \simeq 0$). Και κατά προέκταση: $I_P \simeq 0$. Δηλ. θα δούμε ένα σκοτεινό σημείο όχι όμως εντελώς μηδενικής έντασης.

β) Αν ο αριθμός αυτός είναι περιττός, τότε η (σχ. 7.8.2.2) γράφεται:
$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - \cdots - E_{m-1} + E_m = E_1 - \left(E_2 - E_3\right) - \left(E_4 - E_5\right) - \cdots - \left(E_{m-1} - E_m\right)$.
Και τελικά επειδή $E_{m-1} \simeq E_m$ για όλα τα ζεύγη, θα έχουμε: $E = E_1$. Όμως με βάση τα συμπεράσματα της (Άσκ. 15: Λυμένη), η ένταση του ηλ. πεδίου στο P που οφείλεται στο μη εμποδιζόμενο μετ. κύματος (δηλ. χωρίς την ύπαρξη του διαφράγματος που περιλαμβάνει το κυκλικό περιθλόν άνοιγμα), έχει τιμή ίση με $E_1/2$. Άρα το πεδίο στο P που οφείλεται σε άνοιγμα περιττού αριθμού ζωνών είναι διπλάσιο του προαναφερόμενου. Που σημαίνει ότι για την περίπτωση αυτή η ένταση I_P του φωτός, θα είναι τετραπλάσια $\left(I_P = 4I_0\right)$ από ότι χωρίς το άνοιγμα $\left(I_P = I_0\right)$. Το γεγονός αυτό δεν πρέπει να μας παραξενεύει σε σχέση με την παραβίαση ή μη της αρχής της διατήρησης της ενέργειας. Δεδομένου ότι η μέση τιμή της έντασης γύρω από το P θα είναι: $\langle I \rangle = I_0$.

γ) Για τις περιπτώσεις όπου από το σημείο P δεν 'φαίνεται' ακέραιος αριθμός ζωνών, τότε η ένταση του ηλ. πεδίου E θα έχει μια ενδιάμεση τιμή μεταξύ της

μεγίστης $E \simeq E_1$ και της ελάχιστης $E \simeq 0$. Το ίδιο θα ισχύει κατά προέκταση και για την ένταση του φωτός.

Η προαναφερόμενη ανάλυση έγινε με βάση αλγεβρικές πράξεις, πάνω στα μέτρα των διανυσμάτων που αντιπροσωπεύουν τις συνεισφορές των διαφόρων ζωνών από άποψη πλάτους ηλ. πεδίου στο σημείο P του οπτικού άξονα. Στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε εργαζόμενοι με γραφικό τρόπο στην καμπύλη ταλάντωσης του (Σχ. 7.8.2.2.α). Έστω ότι ο αριθμός των ζωνών είναι άρτιος και ενός ορισμένου πλήθους. Τότε η άθροιση του συγκεκριμένου αριθμού των διανυσμάτων $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots$ (λόγω της αντίθετης φοράς τους κατά ζεύγη) θα μας δώσει μηδενικό περίπου αποτέλεσμα. Όταν όμως το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός, τότε το διανυσματικό αυτό άθροισμα δεν θα είναι πολύ μικρότερο από το διάνυσμα $\mathbf{E}_1$. Και θα πρέπει εδώ να υπενθυμίσουμε ότι η συνεισφορά του μεγίστου αριθμού ζωνών στο P (ανεμπόδιστη συνεισφορά των κυματιδίων από όλο το μετ. κύματος) είναι ίση με $E_1/2$ (Άσκ. 15 Λυμένη). Από πειραματική άποψη το αποτέλεσμα των προαναφερόμενων μπορούμε να το αποδείξουμε, αν το περιθλόν άνοιγμα είναι μεταβαλλόμενης διαμέτρου. Τότε η ένταση του φωτός σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα SOP (καθώς η διάμετρος του ανοίγματος αυξάνεται και αποκαλύπτεται περιττός ή άρτιος αριθμός ζωνών), θα μεταβάλετε μεταξύ μιας μέγιστης και μιας ελάχιστης. Όσο όμως η διάμετρος συνεχίζει ν' αυξάνεται και ο αριθμός των αποκαλυπτόμενων ζωνών γίνει πολύ μεγάλος, (σχεδόν συνθήκες διάδοσης μη εμποδιζόμενου μετ. κύματος), τα μέγιστα θα τείνουν σε μια οριακή τιμή και η περεταίρω αύξηση της διαμέτρου του περιθλώντος ανοίγματος δεν θα τα μεταβάλλει πλέον. Δηλ. από απόψεως πλάτους του ηλ. πεδίου το διάνυσμα (Σχ. 7.8.2.2.α) $\overline{O_s z_1'} = \mathbf{E}_1 \rightarrow \overline{O_s O_s'} = \mathbf{E}_1/2$.

Η τιμή της έντασης του φωτός του περιθλώμενου πεδίου, όταν η διάμετρος του περιθλώντος ανοίγματος παραμένει σταθερή και η θέση του σημείου P κατά μήκος του οπτικού άξονα SOP μεταβάλλεται. Ο αριθμός Fresnel και η επαναδιατύπωση των ορίων μεταξύ των περιοχών Fresnel και Fraunhofer

Υποθέτουμε αρχικά ότι η απόσταση $SO = r_s$ (Σχ. 7.8.3.1) πηγής περιθλώντος ανοίγματος είναι σταθερή, όπως και η διάμετρος $d = 2R$ του ανοίγματος. Γνωρίζουμε επίσης (βλ. Άσκ. 14 Λυμένη) ότι το εμβαδόν κάθε ζώνης είναι κατά προσέγγιση σταθερό και δίνεται από τη σχέση:

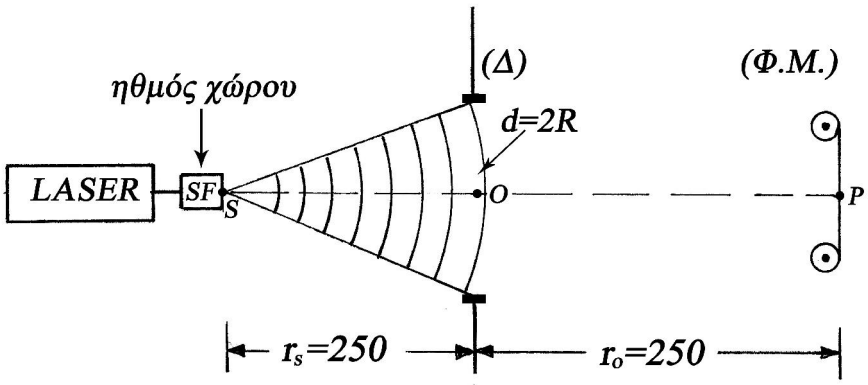
$$S = \frac{\pi r_s r_0 \lambda}{(r_s + r_0)} \tag{7.8.3.1}$$

Επομένως ο αριθμός των ζωνών που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό του περιθλώντος ανοίγματος για μια θέση του σημείου P που απέχει από αυτό απόσταση r_0 θα είναι:

$$N_F = \frac{\pi R^2}{S} = \frac{(r_s + r_0)R^2}{r_s r_0 \lambda} = \frac{\left[(r_0/r_s)+1\right]R^2}{r_0 \lambda} = \frac{\left[(r_s/r_0)+1\right]R^2}{r_s \lambda} \tag{7.8.3.2}$$

Ο αριθμός N_F ονομάζεται ***αριθμός Fresnel (Fresnel number)*** και όπως θα δούμε στα επόμενα, μπορεί ανάλογα με την τιμή του να καθορίσει τα όρια μεταξύ των περιοχών περίθλασης Fresnel και Fraunhofer (κοντινού και μακρινού πεδίου αντίστοιχα). Και βλέπουμε χαρακτηριστικά από τη (σχ. 7.8.3.2) ότι για $r_s, R = \text{σταθ.}$ η τιμή του αριθμού N_F εξαρτάται από την απόσταση r_0 του P από το περιθλόν άνοιγμα. Κατά τρόπο που όταν απομακρυνόμαστε από το άνοιγμα, ο αριθμός των ζωνών Fresnel που 'φαίνονται' στο εσωτερικό του ελαττώνονται και αντίστροφα. Κατά τη μετακίνηση αυτή στο εσωτερικό του περιθλώντος ανοίγματος 'φαίνεται' άρτιος, περιττός ή μη αριθμός ζωνών, με συνέπεια στο σημείο P η ένταση του φωτός να είναι ελάχιστη, μέγιστη ή ενδιάμεση.

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι ο αριθμός N_F συνιστά κριτήριο οριοθέτησης των περιοχών περίθλασης Fresnel και Fraunhofer, θα πραγματοποιήσουμε ένα πείραμα τα στοιχεία της διάταξης του οποίου φαίνονται στο (Σχ. 7.8.3.2). Σαν



(Σχ. 7.8.3.2)

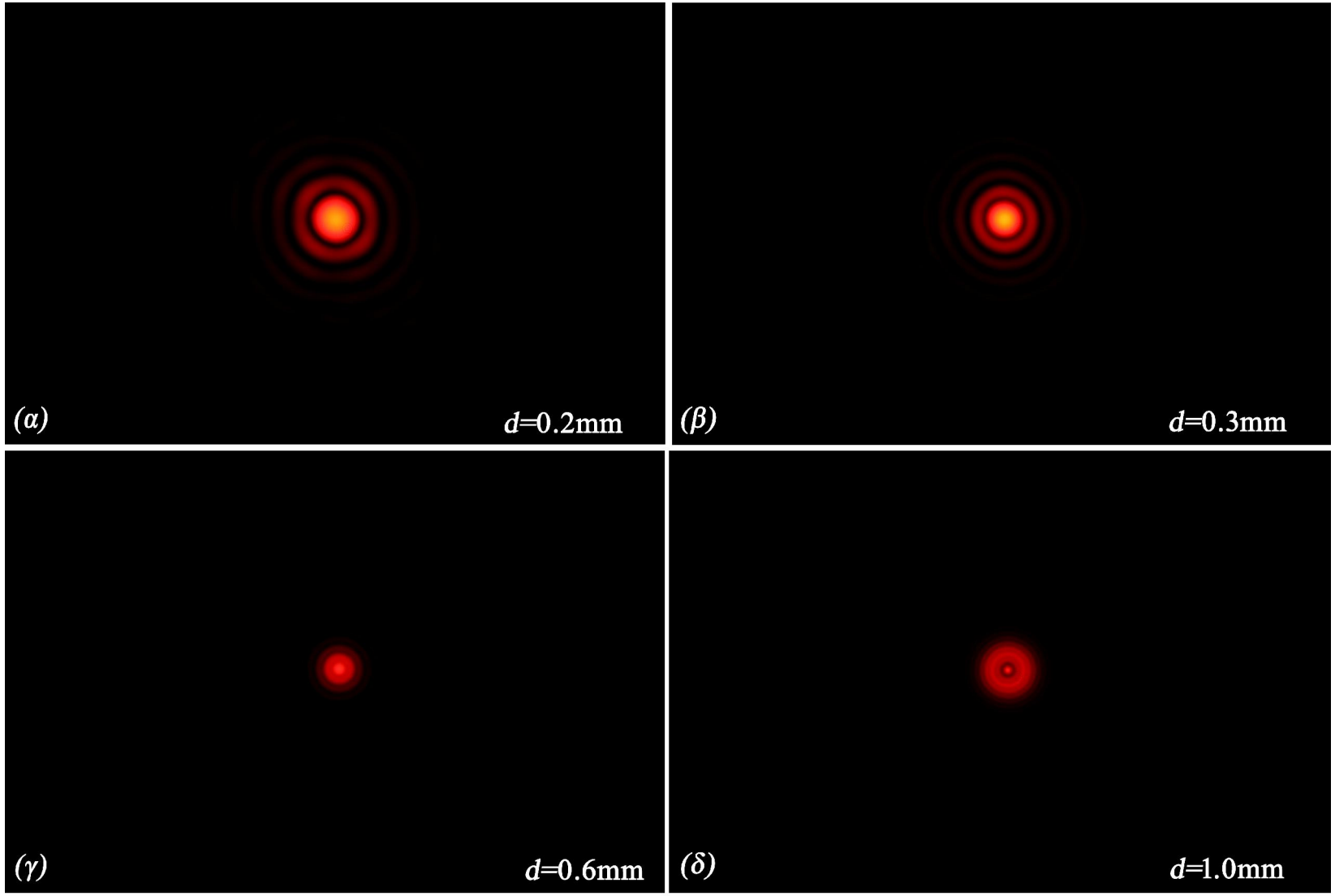
πηγή φωτός χρησιμοποιούμε ένα Laser He-Ne, το οποίο κατά τα γνωστά εκπέμπει σε μ.κ. $\lambda = 632.8\text{nm}$. Η δέσμη εξόδου του (που είναι επίπεδο μετ. κύματος) διαμέ-

τρου $\simeq 2\text{mm}$, προσπίπτει σ' ένα οπτικό εξάρτημα που ονομάζεται ηθμός χώρου (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.5.2.6) (Σχ. 3.5.2.6.3)). Το σύστημα αυτό μετατρέπει το επίπεδο μετ. κύματος σε σφαιρικό, με σημείο εκκίνησης το S που το θεωρούμε σαν σημειακή πηγή φωτός (στην πραγματικότητα εδώ η διάμετρός της είναι $12.5\mu\text{m}$). Το σφαιρικό μετ. κύματος διαδιδόμενο προσπίπτει σ' ένα διάφραγμα (Δ) το οποίο θα περιλαμβάνει κάθε φορά από ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου $d = 2R$. Η πηγή S και το εκάστοτε κέντρο O των κυκλικών ανοιγμάτων, ορίζουν τον οπτικό άξονα της διάταξης. Τέλος το περιθλώμενο πεδίο ανιχνεύεται σε επίπεδο που είναι κάθετο στη θέση P του οπτικού άξονα. Για τη φωτογράφηση του προτύπου περίθλασης (δηλ. της κατανομής της έντασης του φωτός), στη θέση P βρίσκεται το σύστημα καταγραφής μιας φωτογραφικής μηχανής (εδώ ένα C.C.D. στοιχείο). Που σημαίνει ότι από την φωτ. μηχανή έχουμε αφαιρέσει το φακό της. Θα θεωρήσουμε ότι οι αποστάσεις: $SO = r_s = 250$ και $OP = r_0 = 250$, όπου όλα τα μήκη θα μετρούνται σε mm. Στον (Πίν. 7.8.3.3) σε στήλες παραθέτουμε τις διαμέτρους των κυκλικών ανοιγμάτων από τις οποίες θα λάβουμε τα πρότυπα περίθλασης. Επίσης με βάση τη (σχ. 7.8.3.2), γνωστών όντων των r_s, r_0, R, λ υπολογίζουμε τους αντίστοιχους αριθμούς N_F.

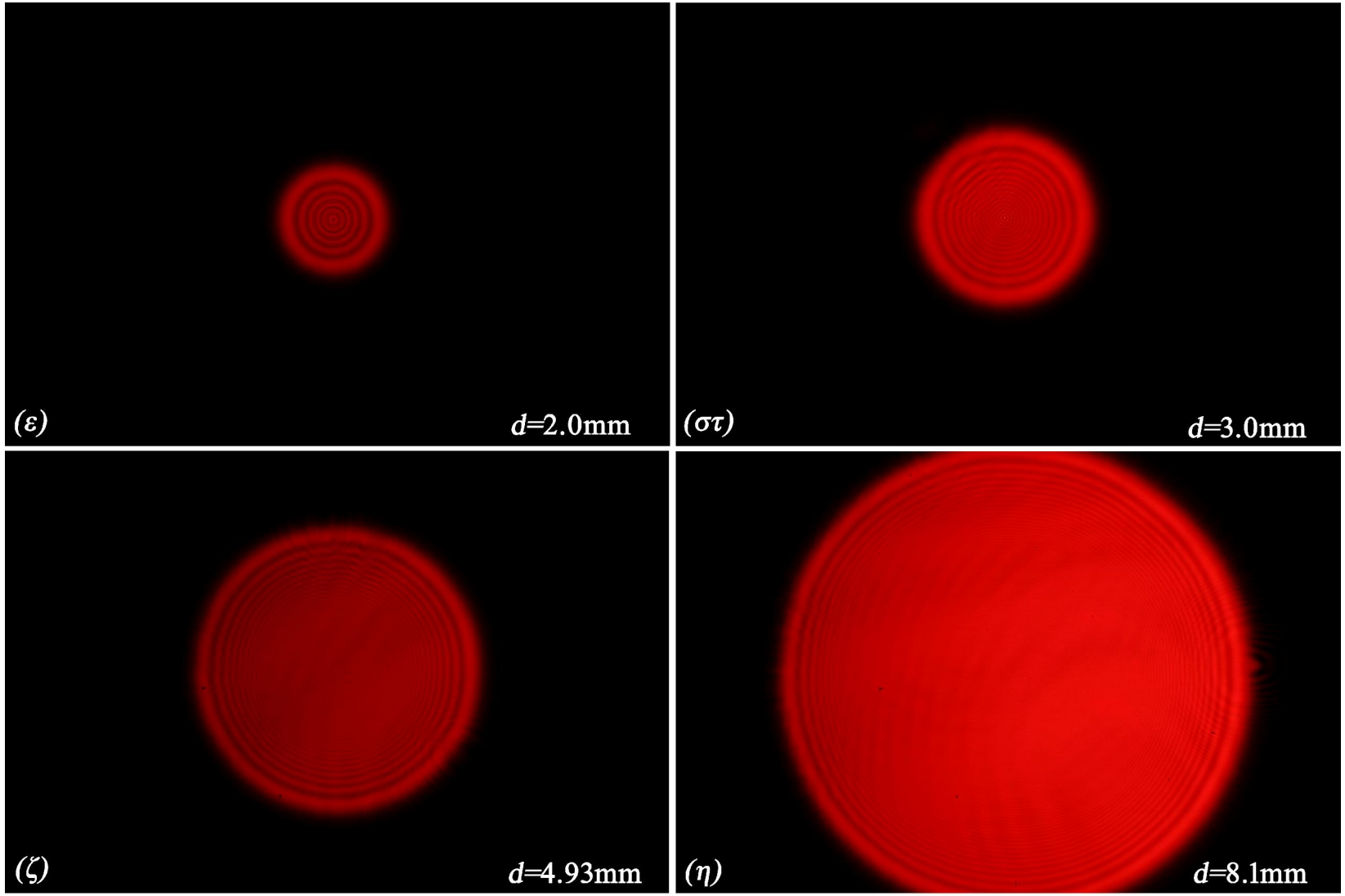
α/α	$d = 2R$	N_F	d^2/λ	περιοχή περίθλασης
1	0.2	0.126	63.2	Fraunhofer
2	0.3	0.284	142.2	
3	0.6	1.137	569	οριακή περιοχή
4	1.0	3.160	1.58×10^3	Fresnel
5	2.0	12.64	6.32×10^3	
6	3.0	28.44	14.2×10^3	
7	4.929	76.77	38.4×10^3	
8	8.076	206.1	103.0×10^3	

(Πίν. 7.8.3.3)

Για την οριοθέτηση όμως των περιοχών περίθλασης Fresnel και Fraunhofer (κοντινού και μακρινού πεδίου αντίστοιχα), έχουμε ήδη ασχοληθεί (βλ. Άσκ.1: Λυμένη). Με βάση την οποία προκύπτει ότι: Για $l = l_{\min}(= r_0) > (d^2/\lambda)$, βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer (μακρινού πεδίου). Ενώ για τις περιπτώσεις για τις οποίες: $l(= r_0) < d^2/\lambda$ θα είμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel (κοντινού πεδίου). Για το λόγο αυτό στον (Πίν. 7.8.3.3) υπάρχει και η στήλη των τιμών του λό-



(Εικ. 7.8.3.4)(1)



(Εικ. 7.8.3.4)(2)

γου d^2/λ. Από αυτόν διαπιστώνουμε ότι: $l = r_0 > d^2/\lambda$ ισχύει για διαμέτρους του περιθλώντος ανοίγματος: $d = 0.2$ και 0.3. Δηλ. γι' αυτές θα έχουμε περίθλαση μακρινού πεδίου. Ενώ για τις υπόλοιπες είναι: $l = r_0 < d^2/\lambda$. Δηλ. θα είμαστε σε περιοχή περίθλασης κοντινού πεδίου. Από την προηγούμενη ανάλυση και την ανάγνωση του (Πίν.7.8.3.3), μπορούμε να βγάλουμε το αξιοσημείωτο συμπέρασμα ότι περίθλαση Fraunhofer προκύπτει, μόνο όταν από το σημείο P (όπου και ανιχνεύουμε το πρότυπο περίθλασης) 'φαίνεται' κλάσμα της πρώτης ζώνης Fresnel. Οπότε όσον αφορά στην κεντρική περιοχή του προτύπου περίθλασης της έντασης του φωτός, δεν θα έχουμε ποτέ ελάχιστο (πρότυπα περίθλασης ομοιόμορφα) . Το γεγονός αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στις (Εικ. 7.8.3.4(1)α,β), ακόμη μάλιστα και για το πρότυπο περίθλασης της οριακής περιοχής (Εικ. 7.8.3.4(1)γ). Από εκεί και μετά, βρισκόμαστε πλέον στην περιοχή περίθλασης Fresnel. Οπότε η ομοιομορφία των προτύπων μεταβάλλεται δραστικά. Πράγματι μπορούμε ακόμη και στην περιοχή του κέντρου – (Εικ. 7.8.3.4(2)ε) – να παρατηρήσουμε ελάχιστο έντασης του φωτός. Επίσης αν η διάμετρος του κυκλικού ανοίγματος γίνει πολύ μεγάλη (με σταθερά λ και r_0) οι κροσσοί της περίθλασης όλο και περιορίζονται προς την περιφέρεια του προτύπου (Εικ. 7.8.3.4(2)ζ,η).

Η τιμή της έντασης του φωτός του περιθλώμενου πεδίου, όταν η διάμετρος του περιθλώντος ανοίγματος είναι σταθερή και μεταβάλλεται η θέση του σημείου P κατά μήκος του οπτικού άξονα SOP.

Με τη βοήθεια της διάταξης του (Σχ. 7.8.3.2) πραγματοποιήσαμε επίσης το εξής πείραμα: Διατηρήσαμε τη διάμετρο του κυκλικού ανοίγματος στα $d = 0.6\text{mm}$

α/α	r_0	N_F	d^2/λ	περιοχή περίθλασης
1	70	2.6	568.9	Fresnel
2	1×10^2	1.99	568.9	
3	1×10^2	1.28	568.9	
4	4×10^2	0.92	568.9	Οριακή περιοχή
5	6×10^2	0.8	568.9	Fraunhofer
6	8×10^2	0.74	568.9	
7	1×10^3	0.71	568.9	
8	1.2×10^3	0.68	568.9	

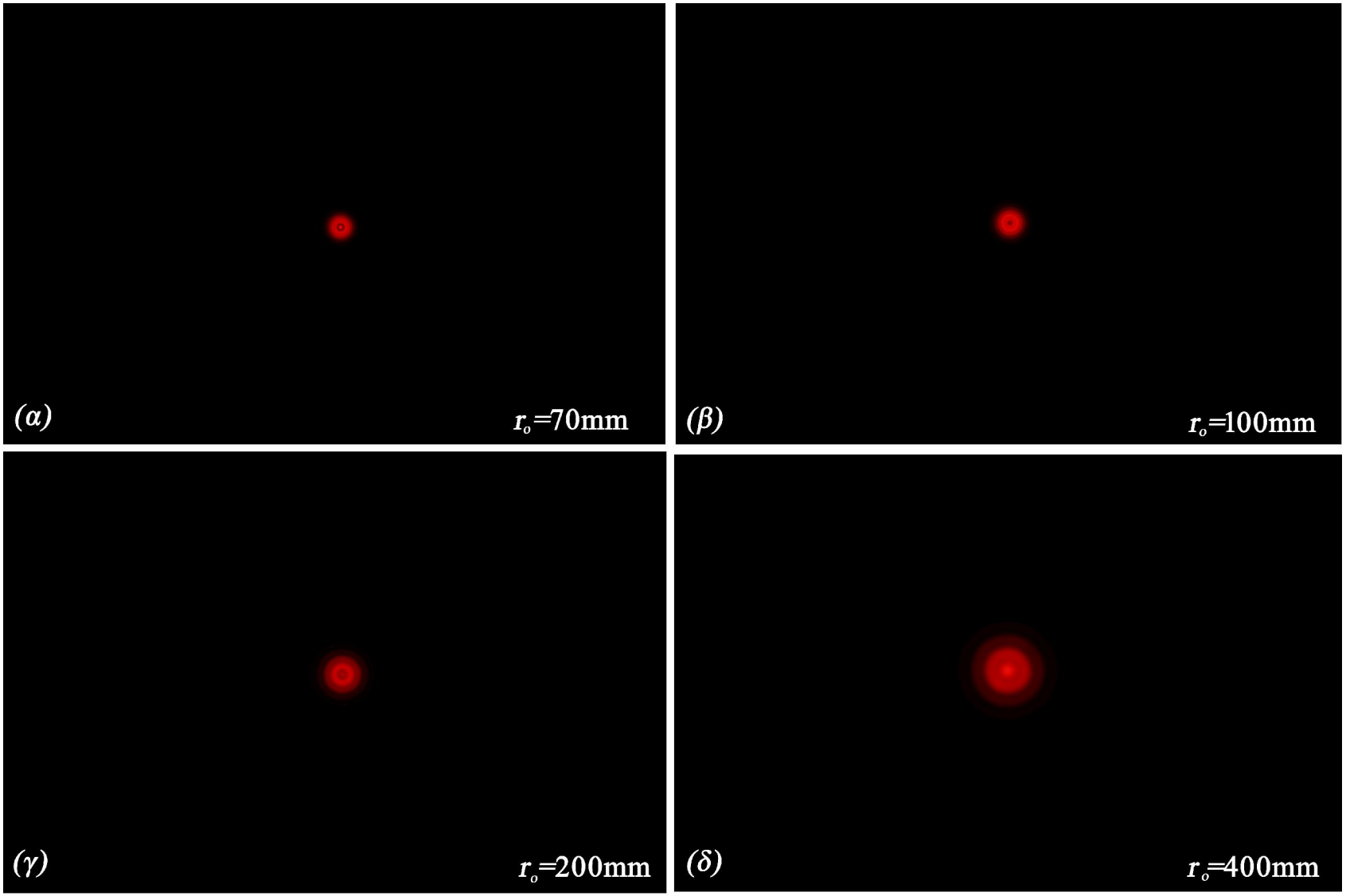
(Πίν. 7.8.3.5)

και παίρναμε τα πρότυπα περίθλασης της έντασης του φωτός στις αποστάσεις r_0 όπως δίνονται στον (Πίν. 7.8.3.5). Προηγουμένως και πάλι με βάση τη (σχ. 7.8.3.2), γνωστών όντων των r_s, r_0, R, λ υπολογίσαμε τους αντίστοιχους αριθμούς N_F καθώς και τις ποσότητες d^2/λ για κάθε μια από τις αποστάσεις r_0. Μπορούμε να δούμε ότι από τις αποστάσεις $r_0 = 70,100$ και 200mm ο αριθμός Fresnel είναι αντίστοιχα: $N_F = 2.6, 1.99$ και 1.28. Που σημαίνει ότι βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel ($N_F > 1$). Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζεται στις (Εικ. 7.8.3.6α,β,γ). Μάλιστα η ένταση του φωτός στην κεντρική περιοχή του προτύπου περίθλασης της (Εικ. 7.8.3.6β) είναι περίπου ίση με το μηδέν. Και ο λόγος είναι ότι από το σημείο P_0 για το οποίο $r_0 = 100$mm 'φαίνονται' σχεδόν μόνο οι δύο πρώτες ζώνες Fresnel. Η θέση για την οποία $r_0 = 400$mm είναι οριακή. Και για τις αποστάσεις για τις οποίες $r_0 = 600, 800, 1000$ και 1200mm βρισκόμαστε καθαρά σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer. Πράγματι από τα σημεία αυτά, στο παράθυρο του κυκλικού ανοίγματος 'φαίνονται' μόνο κλάσματα της πρώτης ζώνης. Άλλωστε, τα πρότυπα περίθλασης έχουν ακριβώς την ίδια δομή (πρότυπο περίθλασης Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα), μόνο που διαφέρουν στο μέγεθός τους.

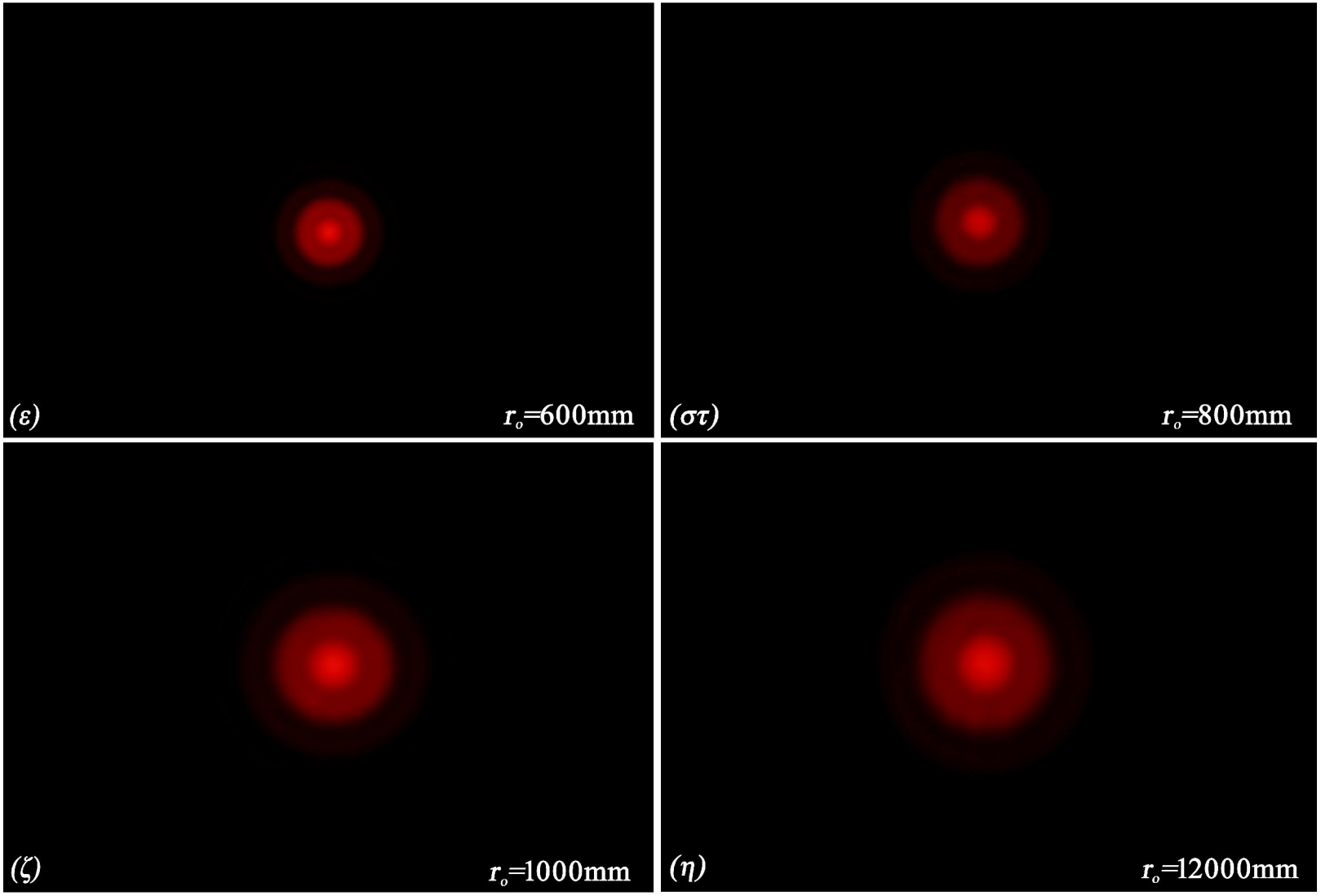
Τιμές της έντασης του φωτός του περιθλώμενου πεδίου, για σταθερή διάμετρο του περιθλώντος ανοίγματος και για διαφορετικές θέσεις του σημείου P, σε διεύθυνση κάθετη προς τον οπτικό άξονα SOP

Θα υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel και έστω ότι το σημείο P βρίσκεται αρχικά πάνω στον οπτικό άξονα SOP (Σχ. 7.8.3.7). Έστω επίσης ότι από το σημείο αυτό στο περιθλόν κυκλικό άνοιγμα 'φαίνονται' δύο ζώνες Fresnel. Θέλουμε στην προκειμένη περίπτωση να προσδιορίσουμε ποιοτικά, πώς μεταβάλλεται η ένταση του ηλ. πεδίου και κατά προέκταση η ένταση του φωτός, καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο P σε διεύθυνση κάθετη προς τον οπτικό άξονα SOP.

Κατ' αρχή εφόσον από το σημείο P 'φαίνεται' στο περιθλόν άνοιγμα η πρώτη και η δεύτερη ζώνη, η ένταση του ηλ. πεδίου και κατά προέκταση του φωτός σ' αυτή τη θέση θα είναι σχεδόν ίση με το μηδέν. Το κέντρο δηλ. του προτύπου περίθλασης θα καταλαμβάνεται από μία σχεδόν σκοτεινή κηλίδα. Προκειμένου τώρα να συμπεράνουμε για την ένταση του φωτός που υφίσταται στις θέσεις: $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$, σε διαφορετικές θέσεις και σε διεύθυνση κάθετη προς τον οπτικό άξονα SOP, θα πρέπει να ξέρουμε το μοντέλο των ζωνών όπως αυτό 'φαίνεται' από το κάθε ένα από αυτά τα σημεία.

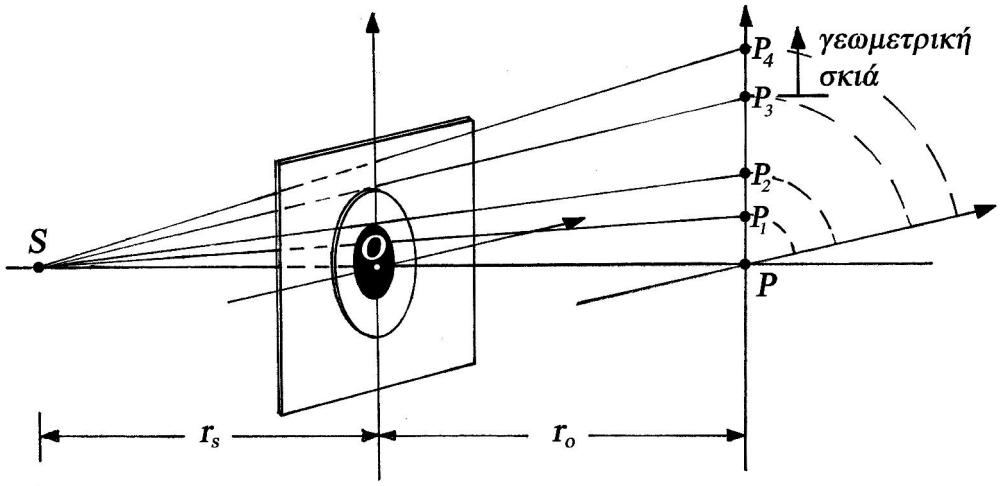


(Σχ. 7.8.3.6)(1)



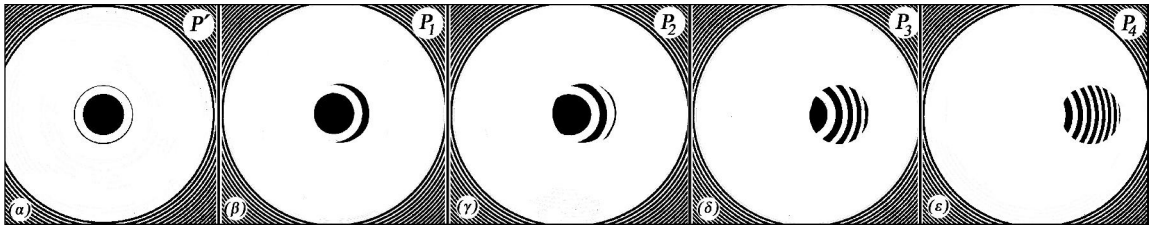
(Εικ. 7.8.3.6)(2)

Από τα τελευταία, το P_3 όπως βλέπουμε από το (Σχ. 7.8.3.7) βρίσκεται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς και το P_4 στο εσωτερικό της. Και όσον αφορά το μοντέλο



(Σχ. 7.8.3.7)

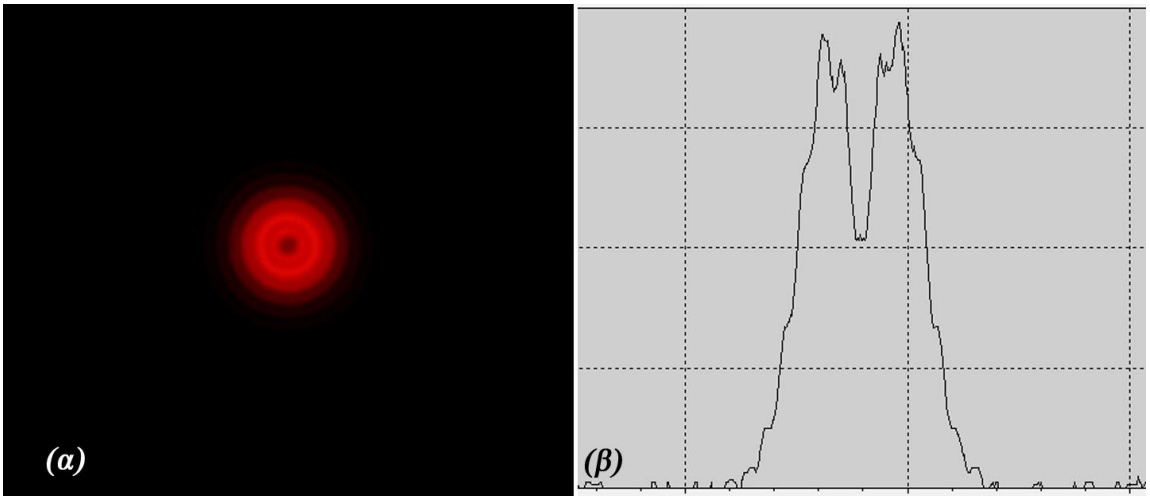
της καθεμιάς των εικόνων που 'φαίνονται' στο εσωτερικό του κυκλικού περιθλώντος ανοίγματος, αρχής γενομένης από το P, μπορούμε να τις δούμε στις (Εικ.. 7.8.3.8α-ε).



(Εικ. 7.8.3.8)

Σε δεύτερη φάση, αν 'κοιτάξουμε' το μοντέλο των ζωνών από το σημείο P_1, μπορούμε να δούμε ότι αποκόπτεται ένα τμήμα της δεύτερης ζώνης αλλά ταυτόχρονα εμφανίζεται ένα μικρό τμήμα της τρίτης. Επομένως η ένταση σ' αυτό το σημείο δεν θα είναι σχεδόν μηδενική όπως στο P. Κατόπιν, όταν βρεθούμε στη θέση P_2, 'φαίνεται' ότι ένα μεγάλο τμήμα της δεύτερης ζώνης αποκόπτεται αλλά εμφανίζεται στο εσωτερικό του κυκλικού ανοίγματος ένα αντίστοιχο μεγαλύτερο τμήμα της τρίτης. Και επειδή πρώτη και τρίτη ζώνη συμβάλλουν στο P_2 σε φάση, θα έχουμε μια αύξηση της έντασης του φωτός μέχρις ενός σημείου. Καθώς όμως συνεχίζεται η μετακίνηση και 'αποκαλύπτονται' τμήματα επόμενων ζωνών θα έχουμε

διαδοχικά ελάχιστα και μέγιστα αλλά συνεχώς μειούμενα. Πράγματι αν συνεχίσουμε τη μετακίνηση προς τη θέση P_3 που βρίσκεται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς του κυκλικού ανοίγματος, η πρώτη ζώνη δεν έχει 'σκιαστεί' πλήρως και τα τμήματα των επόμενων ζωνών είναι μικρά τμήματά τους. Το αλγεβρικό τους άθροισμα είναι μικρό αλλά όχι αμελητέο και η διαδοχική αυξομείωση της έντασης συνεχίζεται. Τέλος αρκετά βαθιά στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς (σημείο P_4) η πρώτη ζώνη 'σκιάζεται' ολικά και η άθροιση των μικρών τμημάτων των άλλων ζωνών μας δίνουν πολύ μικρές αυξομειώσεις της έντασης του φωτός, η οποία τελικά τείνει στο μηδέν. Η (Εικ. 7.8.3.9α) αντιστοιχεί στο πρότυπο περίθλασης για τη περίπτωση που



(Εικ. 7.8.3.9)

από το σημείο P του οπτικού άξονα 'φαίνονται' σχεδόν δύο ζώνες (Πίν. 7.8.3.5) ($d = 0.6$mm, $r_0 = 100$mm, $N_F = 1.99$). Και η γραφική παράσταση της έντασης του φωτός σε διεύθυνση που περνάει από το κέντρο το προτύπου, δίνεται στην (Εικ. 7.8.3.9β).

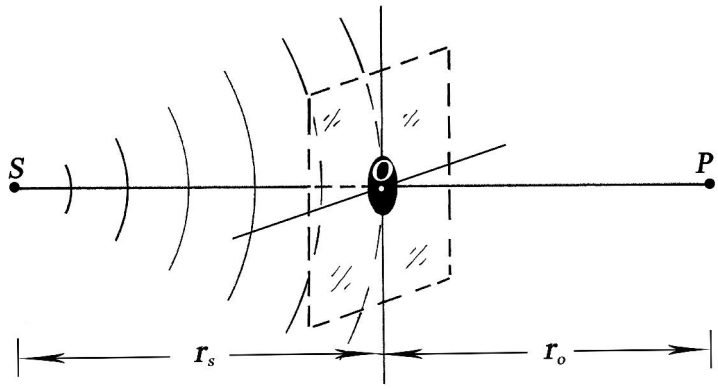
Στην προκειμένη περίπτωση οι κατανομές της έντασης των προτύπων περίθλασης Fresnel είναι εύλογο ότι θα είναι κυκλικής συμμετρίας, όπως άλλωστε μπορούμε να δούμε στις (Εικ. 7.8.3.5,6). Και με βάση τα προαναφερόμενα, η προσπάθεια ερμηνείας τους ήταν καθαρά ποιοτικής φύσης. Και ο λόγος είναι ότι ο αναλυτικός υπολογισμός τους είναι σημαντικά δύσκολος. Πράγματι σύμφωνα με τη θεωρία (βλ. ΘΕΜΑ 1 (σχ. 1.38)), η κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου $\Psi_0(x_0, y_0)$ (για την περιοχή της περίθλασης Fresnel) σ' ένα επίπεδο κάθετο σε σημείο P του επιπέδου παρατήρησης (σ.σ. $x_0 y_0$), που οφείλεται σ' ένα περιθλόν άνοιγμα στο οποίο η κατανομή του ηλ. πεδίου είναι η $\Psi_1(x_1, y_1)$ (σ.σ. $x_1 y_1$) δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi_0(x_0,y_0) \sim \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x_1,y_1) e^{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda l}\left(x_0x_1+y_0y_1\right)} dx_1 dy_1 \qquad (7.8.3.3)$$

Δηλ. από μαθηματική άποψη καλούμαστε να υπολογίσουμε αναλυτικά τον διδιάστατο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης: $\Psi_1(x_1,y_1)e^{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}$ ο οποίος είναι εξαιρετικά δύσκολος. Για το λόγο αυτό στις πλείστες των περιπτώσεων (εκτός της ποιοτικής ερμηνείας) ο υπολογισμός γίνεται με αριθμητική προσέγγιση του ολοκληρώματος της (σχ. 7.8.3.3), χρησιμοποιώντας μεθόδους του λεγόμενου ***ταχέως μετασχηματισμού Fourier (fast Fourier transform)***.

7.8.4 *Περίθλαση Fresnel από κυκλικό εμπόδιο που φωτίζεται από από σφαιρικό μετ. κύματος*

Στο (Σχ. 7.8.4.1) σαν περιθλόν στοιχείο βρίσκεται ένας κυκλικός αδιαφανής δίσκος ορισμένης ακτίνας. Ο τελευταίος φωτίζεται από ένα σφαιρικό αποκλίνον μονοχρωματικό μετ. κύματος το οποίο προέρχεται από μία σημειακή πηγή S. Το μ.κ. λ της φωτίζουσας πηγής, η διάμετρος $d = 2R$ του κυκλικού δίσκου και οι από-



(Σχ. 7.8.4.1)

στάσεις $SO = r_s$,$OP = r_0$, όπου P το σημείο του οπτικού άξονα, κάθετα από το οποίο περνάει το επίπεδο παρατήρησης όπου σχηματίζονται τα πρότυπα περίθλασης. Τα πεδία αυτά υπόκεινται σε συνθήκες περίθλασης Fresnel: $r_s, r_0 < d^2/\lambda$. Ειδικότερα στα επόμενα θα εξετάσουμε με ποιοτικό και πάλι τρόπο τα περιθλώμενα πεδία σε διάφορες θέσεις του σημείου P πάνω στον οπτικό άξονα, καθώς και σε διευθύνσεις κάθετες προς αυτόν.

Κατ' αρχή θεωρούμε ότι το σημείο P βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα και ότι η παρεμβολή του δίσκου 'σκιάζει' l τον αριθμό ζώνες Fresnel. Τότε η ένταση

του ηλ. πεδίου στο P θα οφείλεται στις υπόλοιπες ζώνες και θα δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση:

$$E = E_{l+1} - E_{l+2} + \cdots + E_m \tag{7.8.4.1}$$

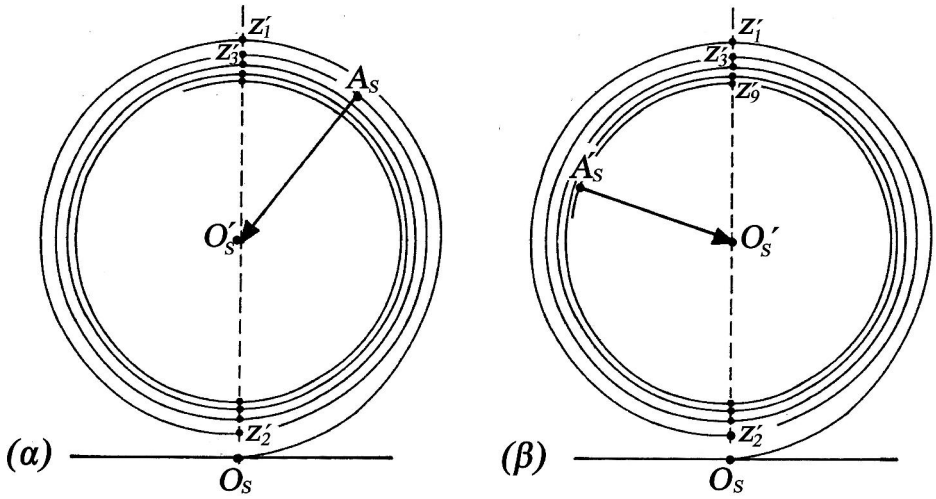
Στη σχέση αυτή βέβαια, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία με τι πρόσημο εμφανίζεται η τιμή του πεδίου E_{l+1}. Αρκεί που κατά ζεύγη οι υπόλοιποι προσθετέοι να έχουν εναλλάξ αντίθετα πρόσημα. Και όσον αφορά του συνολικού πεδίου, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που εφαρμόσαμε για τον υπολογισμό στο σημείο P του μη εμποδιζόμενου πεδίου (βλ. Άσκ. 15: Λυμένη). Κάτω από αυτές τις συνθήκες το αλγεβρικό άθροισμα των προσθετέων της (σχ. 7.8.4.1) μας δίνει σαν αποτέλεσμα:

$$E \simeq E_{l+1}/2 \tag{7.8.4.2}$$

Από την οποία βλέπουμε ότι το E δεν είναι πολύ μικρότερο από αυτό που μας δίνει το μη εμποδιζόμενο σφαιρικό μετ. κύματος στο ίδιο σημείο. Από φυσική άποψη λοιπόν η περίθλαση Fresnel από κυκλικό εμπόδιο, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ένταση του ηλ. πεδίου και κατά προέκταση η ένταση του φωτός έχει πάντα μέγιστο για όλο το μήκος του οπτικού άξονα, εκτός βέβαια ακριβώς πίσω από τον αδιαφανή δίσκο. Βέβαια η ένταση αυτή συνεχώς μειώνεται (μέχρι του μηδενισμού της) δεδομένου ότι ο παράγοντας κλίσης $\kappa(\theta) = (1/2)[1+\cos\theta] \to 0$ καθώς το P πλησιάζει το δίσκο. Και ο λόγος είναι ότι η γωνία θ γίνεται όλο και μεγαλύτερη $(\theta \to \pi)$.

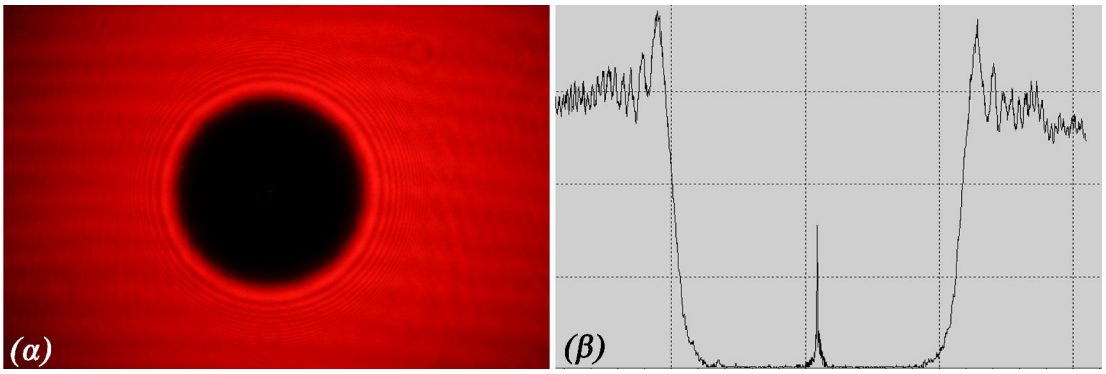
Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και όταν το σημείο P παραμένει σταθερό και αυξάνεται η διάμετρος του δίσκου. Που σημαίνει ότι από το σημείο P βλέπουμε να 'σκιάζονται' όλο και περισσότερες ζώνες Fresnel. Το αποτέλεσμα μπορούμε να το δούμε στα (Σχ. 7.8.4.2α,β) με τη βοήθεια των καμπυλών ταλάντωσης. Στο (Σχ. 7.8.4.2α) το διάνυσμα $\overline{A_s O'_s}$ (που μας δίνει την ένταση του ηλ. πεδίου που προέρχεται από το χείλος A του δίσκου μέχρις το O'_s, το όριο της ύπαρξης των ζωνών), είναι μεγαλύτερο του $\overline{A'_s O'_s}$ (Σχ. 7.8.4.2β). Και αυτό επειδή λιγότερες ζώνες Fresnel συνεισφέρουν στο P επειδή αυξήθηκε η διάμετρός του. Άρα στο P θα έχουμε πάντα μια μη μηδενική ένταση φωτός η οποία όμως συνεχώς μειώνεται. Οι κηλίδες αυτές του φωτός εντοπίζονται συνεχώς πάνω στον οπτικό άξονα, παρά το ότι από μια πρώτη ματιά δεν θα έπρεπε να υφίστανται, λόγω το ότι η διάδοση του φωτός εμποδίζεται από τον αδιαφανή δίσκο. Και όμως υφίστανται λόγω της περίθλασης του φωτός από τα όρια του δίσκου. Το όνομά τους είναι ***κηλίδες του Poison (Poison spots)***. Η (Εικ. 7.8.4.3α) μας δίνει το πρότυπο περίθλασης του φωτός η οποία έχει ληφθεί με τη βοήθεια της πειραματικής διάταξης του (Σχ. 7.8.4.1) με τα εξής

στοιχεία: $r_s = 250\text{mm}$ $r_0 = 250\text{mm}$ $d = 2R = 3.95\text{mm}$ $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Στην (Εικ. 7.8.4.3β) φαίνεται η γραφική παράσταση της κατανομής της έντασης του φωτός



(Σχ. 7.8.4.2)

κατά μήκος μιας ευθείας που περνάει από το κέντρο του προτύπου περίθλασης της (Εικ. 7.8.4.3α). Παρατηρούμε ότι είναι χαρακτηριστική στο κέντρο της η ύπαρξη της κατανομής της έντασης του φωτός που οφείλεται στην κηλίδα του Poison.



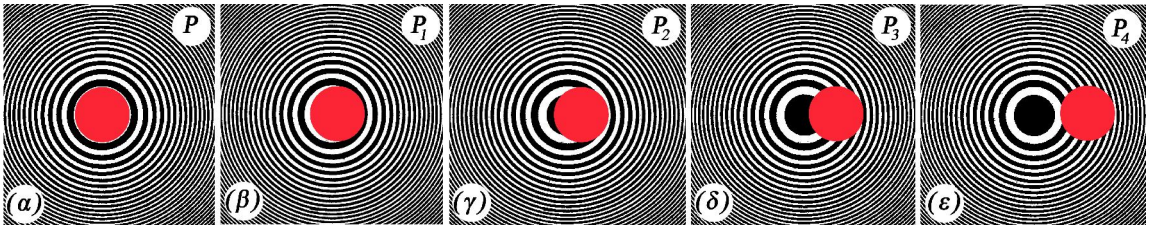
(Εικ. 7.8.4.3)

Σημείωση

Παρά το ότι από πρώτη ματιά στην (Εικ. 7.8.4.3α) η κηλίδα του Poison δεν είναι εμφανής, ο αναγνώστης θα μπορέσει να τη δει, αν μεγεθύνει το κεντρικό τμήμα της εικόνας (pdf >800% και χωρίς ανακλώμενα φώτα στην οθόνη του Η/Υ).

Θα περιμέναμε οι τιμές της έντασης του ηλ. πεδίου σε διευθύνσεις κάθετες προς τον οπτικό άξονα να παρουσιάζουν αυξομειώσεις και τα πρότυπα περίθλασης κυκλική συμμετρία. Το ίδιο βέβαια και για την ένταση του φωτός. Η δικαιολόγηση

για την πρώτη από τις δύο περιπτώσεις, είναι παρόμοια με αυτήν που περιγράψαμε στην (§ 7.8.3) για εντάσεις που αφορούν θέσεις του P εκτός του οπτικού άξονα, για περίθλαση Fresnel από κυκλικό άνοιγμα. Στα επόμενα θ' αντικαταστήσουμε το κυκλικό άνοιγμα από το κυκλικό εμπόδιο των ιδίων διαστάσεων. Θα υποθέσουμε τώρα ότι το κυκλικό εμπόδιο 'σκιάζει' την πρώτη και τη δεύτερη ζώνη Fresnel όπως 'φαίνονται από το σημείο P του οπτικού άξονα. Τότε η ένταση του ηλ. πεδίου στο ίδιο σημείο θα δίνεται από τη (σχ. 7.8.4.2): $E = E_3/2$. Όταν όμως το σημείο P αρχίζει ν' απομακρύνεται από τον άξονα προς τα σημεία $P_1, P_2, P_3, P_4 \cdots$ (Σχ. 7.8.3.6), τότε το μοντέλο της δομής των ζωνών που 'φαίνεται' από τα σημεία αυτά αλλάζουν δραστικά (Εικ. 7.8.4.4) και μάλιστα θα είναι τα συμπληρωματικά των (Εικ. 7.8.3.8).



(Εικ. 7.8.4.4)

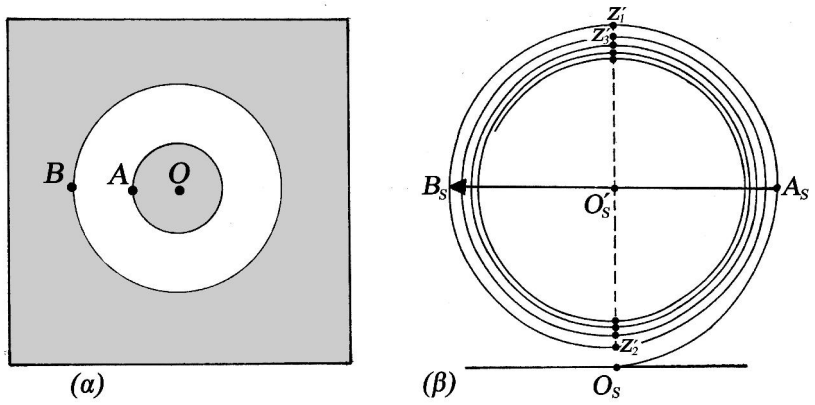
Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα έχουμε πλέον αλγεβρικά αθροίσματα των συνεισφορών, τμημάτων των ζωνών που διαμορφώνουν την ένταση του ηλ. πεδίου στα αντίστοιχα σημεία. Με συνέπεια την αυξομείωση της τιμής του ηλ. πεδίου από το σημείο P προς το P_4. Τότε το ίδιο θα ισχύει και όσον αφορά την αυξομείωση της έντασης του φωτός στο πρότυπο της περίθλασης. Τέλος, οι τιμές της έντασης για καθένα από τα σημεία P εκτός του οπτικού άξονα, θα είναι ακριβώς οι ίδιες για λόγους συμμετρίας πάνω σε μια περιφέρεια κύκλου, σε επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα. Αυτός είναι και ο λόγος της ανάδειξης κυκλικής συμμετρίας προτύπων περίθλασης από κυκλικά ανοίγματα ή εμπόδια.

Παράδειγμα

Ένα διάφραγμα περιλαμβάνει δακτυλιοειδές περιθλόν άνοιγμα (Σχ. 7.8.4.5α), του οποίου η εσωτερική ακτίνα είναι $R_1 = OA = 0.56\text{mm}$ και η εξωτερική $R_2 = OB = 0.97\text{mm}$. Το τελευταίο φωτίζεται από μια σημειακή πηγή S που βρίσκεται σε απόσταση $r_s = 2\text{m}$. Το μ.κ. της εκπέμπουσας πηγής είναι $\lambda = 632.8\text{nm}$. Να υπολογιστεί η ένταση E_P του περιθλώμενου πεδίου σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα μετά το διάφραγμα, που απέχει από αυτό απόσταση $r_0 = 2\text{m}$.

- Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός N_F για την περίπτωση που ένα κυκλικό άνοιγμα φωτίζεται με σφαιρικό μετ. κύματος δίνεται από τη (σχ. 7.8.3.2): $N_F = \frac{(r_s + r_0)R^2}{r_s r_0 \lambda}$.

Όπου R η ακτίνα του κυκλικού ανοίγματος, r_s η απόσταση της πηγής από αυτό και



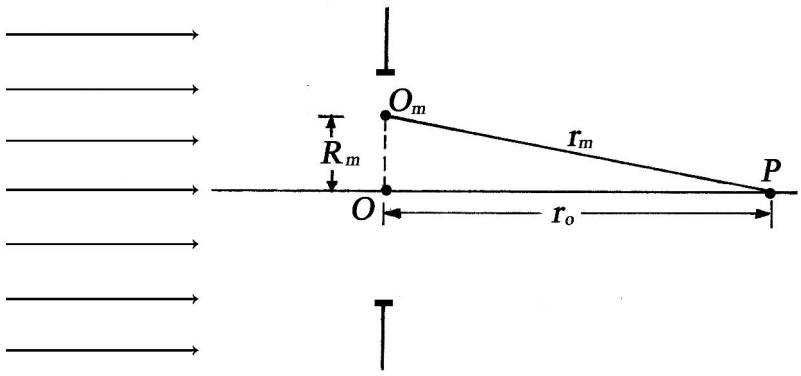
(Σχ. 7.8.4.5)

r_0 η απόσταση από το άνοιγμα από την οποία 'φαίνεται' ο αριθμός N_F των ζωνών Fresnel. Εφαρμόζοντας τον τύπο αυτό για $R_1 = 0.56\text{mm}$ βρίσκουμε ότι $N_F \simeq 1/2$. Δηλ. ο εσωτερικός αδιαφανής δίσκος του περιθλώντος ανοίγματος 'σκιάζει' το μισό της πρώτης ζώνης Fresnel. Επίσης για $R_2 = 0.97\text{mm}$ βρίσκουμε από τον ίδιο τύπο $N_F \simeq 3/2$. Που σημαίνει ότι η ακτίνα OB αντιστοιχεί στο μισό της δεύτερης ζώνης Fresnel. Επομένως ο φάσορας που θα μας δίνει την τιμή του ηλ. πεδίου θα είναι το διάνυσμα $\overline{A_s B_s}$ κάθετο σχεδόν στον άξονα $O_s O_s'$ (Σχ. 7.8.4.5β). Το μέτρο του, θα είναι περίπου ίσο με αυτό του φάσορα $\overline{O_s z_1'}$ (τιμή του πεδίου που προέρχεται από την πρώτη ζώνη). Δηλ. ίσο με $2E_u$. Οπότε η ένταση του φωτός στο P θα είναι ίση περίπου με $4I_u$.

7.8.5 *Περίθλαση Fresnel από κυκλικό άνοιγμα που φωτίζεται από επίπεδο μετ. κύματος*

Για την περίπτωση αυτή θα πρέπει να υπολογίσουμε την ακτίνα R_m της m ζώνης Fresnel ή τον αριθμό των ζωνών που 'φαίνεται' να περιλαμβάνονται σε απόσταση R_m από το κέντρο του περιθλώντος ανοίγματος, από το σημείο P που απέχει από αυτό κατά r_0, με φωτίζουσα πηγή μ.κ. λ. Και αυτό γίνεται με τη βοήθεια του

(Σχ. 7.8.5.1). Πράγματι από το ορθογώνιο τρίγωνο $O_m OP$ θα έχουμε: $R_m^2 = r_m^2 - r_0^2$. Και επειδή $r_m = r_0 + m(\lambda/2)$ τότε: $R_m^2 = \left(r_0 + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2$. Και μετά τις πράξεις:



(Σχ. 7.8.5.1)

$$R_m^2 = mr_0\lambda + m^2\lambda^2/4 \qquad (7.8.5.1)$$

Όμως για τις πλείστες των περιπτώσεων για τις οποίες το m δεν είναι υπερβολικά μεγάλο θα έχουμε:

$$R_m^2 = mr_0\lambda \qquad (7.8.5.2)$$

Δηλ. όπως βλέπουμε η R_m είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του m. Στον ίδιο τύπο μπορούμε να καταλήξουμε και με τη βοήθεια της (σχ. 7.8.3.2) που εκφράζει κατά προσέγγιση τον αριθμό Fresnel N_F όταν φωτίζουμε με σφαιρικό μετ. κύματος. Για την περίπτωσή μας $N_F \equiv m$ και $R \equiv R_m$. Οπότε από τη (σχ. 7.8.3.2):

$N_F = \frac{(r_s + r_0)R^2}{r_s r_0 \lambda} = \frac{\left[(r_0/r_s)+1\right]R^2}{r_0\lambda}$ και για $r_s \to \infty \Rightarrow N_F = m = R^2/r_0\lambda$.

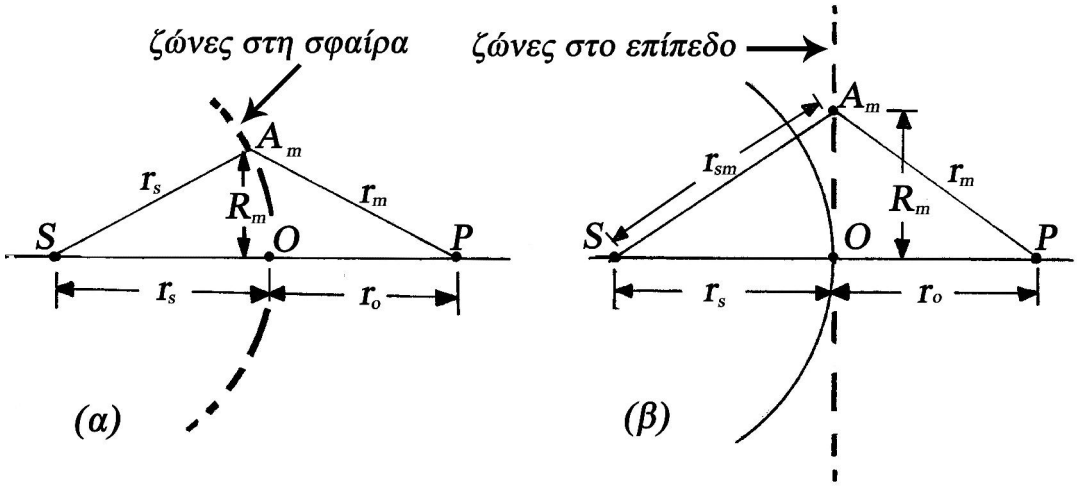
Παράδειγμα

Θέλουμε ένα κυκλικό περιθλόν άνοιγμα διαμέτρου $d = 4\text{mm}$ να καλύπτεται πλήρως από τις τρείς πρώτες ζώνες Fresnel, όταν αυτό φωτίζεται από ένα επίπεδο μετ. κύματος που προέρχεται από ένα Laser He-Ne με μ.κ. $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\text{mm}$. α) Ποια θα είναι η απόσταση r_0 που απέχει το σημείο P (πάνω στον οπτικό άξονα OP) από το κέντρο O του περιθλώντος ανοίγματος, προκειμένου να συμβαίνουν τα προαναφερόμενα. β) Ποια θα είναι η ένταση του φωτός στο σημείο P; γ) Για την περίπτωση που εξετάζουμε βρισκόμαστε όντως σε περιοχή περίθλασης Fresnel;

- α) Από τη (σχ. 7.8.5.2) θα έχουμε: $r_0 = R_m^2/m\lambda$. Και για $R_m = 2\text{mm}$, $m = 3$ και $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\text{mm}$ βρίσκουμε (για τη θέση του σημείου P) $r_0 \simeq 2.1\text{m}$. β) Στο σημείο P έχουμε να προσθέσουμε αλγεβρικά τα πεδία από τις συνεισφορές των τριών ζωνών. Οπότε: $E = E_1 - E_2 + E_3$. Αλλά επειδή $E_1 \simeq E_2$ θα έχουμε τελικά $E \simeq E_3$ που δεν διαφέρει και πολύ από την τιμή του E_1. Επομένως στη θέση P για την οποία $r_0 \simeq 2.1\text{m}$ θα έχουμε μέγιστη ένταση του περιθλώμενου πεδίου. γ) Προκειμένου να βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $r_0 < d^2/\lambda$ όπου $r_0 \simeq 2.1\text{m}$, $d = 4\text{mm}$ και $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\text{mm}$. Η τελευταία ανισότητα πράγματι ισχύει, επειδή βρίσκουμε ότι: $d^2/\lambda \simeq 25\text{m}$.

7.8.6 *Διαφράγματα ζωνών Fresnel*

Στο (Σχ. 7.8.6.1.α), από τη σημειακή πηγή S εκπέμπεται ένα μονοχρωματικό σφαιρικό μετ. κύματος, του οποίου τη διάδοση θεωρούμε σε απόσταση $SO = r_s$. Στην προέκταση της SO βρίσκεται ένα σημείο P που απέχει από το O απόσταση



(Σχ. 7.8.6.1)

r_0. Έστω επίσης ότι A_m είναι ένα διακριτό σημείο του μετ. κύματος (το σημείο που τελειώνει η m ζώνη) το οποίο απέχει από το P απόσταση r_m. Τότε με βάση την προηγούμενη μελέτη μας, τα διάφορα σημεία A_m για τα οποία: $r_m = r_0 + m\lambda/2$, ορίζουν τα εξωτερικά όρια των ζωνών Fresnel μισής περιόδου. Αν τώρα με ένα διάφραγμα που περιλαμβάνει ένα κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R (περιθλόν άνοιγμα) 'επιτρέψουμε' m τον αριθμό ζώνες Fresnel να συνεισφέρουν στο σημείο P, τότε η ένταση του ηλ. πεδίου στη θέση αυτή θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots \qquad (7.8.6.1)$$

Έστω τώρα ότι το πέρας του κυκλικού ανοίγματος περιλαμβάνει την $m = 19$ ζώνη και έστω με κάποιο τρόπο παρεμποδίζουμε τη συνεισφορά των άρτιων ζωνών από το σύνολο των 19. Τότε η ένταση E' του ηλ. πεδίου στο σημείο P θα είναι:

$$E' = E_1 + E_3 + E_5 + E_7 + \cdots + E_{19} \qquad (7.8.6.2)$$

και κατά προσέγγιση:

$$E' \simeq 10E_1 \qquad (7.8.6.3)$$

Έχουμε όμως αποδείξει (βλ. Άσκ. 15 Λυμένη) ότι η τιμή του ηλ. πεδίου στο σημείο P που δημιουργείται από το σύνολο του μετ. κύματος (ανεμπόδιστη διάδοση) είναι: $E_u = E_1/2$. Οπότε: $E' \simeq 20E_u$. Αναδεικνύεται δηλ. το σημαντικό γεγονός ότι με τη διαδικασία της 'φραγής' των άρτιων ζωνών η ένταση του ηλ. πεδίου στο σημείο P εικοσαπλασιάζεται. Που σημαίνει τελικά ότι η ένταση του φωτός είναι 400 φορές μεγαλύτερη από την ένταση που προκύπτει στο ίδιο σημείο από το μη εμποδιζόμενο μετ. κύματος. Αυτού του είδους τα οπτικά στοιχεία ονομάζονται ***διαφράγματα ζωνών Fresnel (Fresnel zone plates)*** και είναι δυνατόν να κατασκευαστούν και να λειτουργήσουν στην πράξη για πολλές μάλιστα περιοχές του Η/Μ φάσματος και όχι μόνο της ορατής.

Η διαδικασία δημιουργίας επιπέδων ζωνών Fresnel

Θα πρέπει τις ζώνες Fresnel μισής περιόδου να τις μετατρέψουμε με κάποιο τρόπο από την κυρτή τους μορφή (επί του σφαιρικού μετ. κύματος) σε επίπεδης μορφής, πάνω σ' ένα επίπεδο εφαπτομενικό του σφαιρικού. Και αυτό προκειμένου να είναι εύκολη η κατασκευή τους (αποτύπωση), σε διαφανή μέσα όπως είναι τα φωτ/κά φίλμ και οι φωτ/κες πλάκες. Όσον αφορά τον αναλυτικό προσδιορισμό των στοιχείων των ζωνών σε επίπεδη επιφάνεια γίνεται με τη βοήθεια του (Σχ. 7.8.6.1β). Εκεί, το σφαιρικό μετ. κύματος που προέρχεται από τη σημειακή πηγή S προσπίπτει σ' επίπεδο που είναι κάθετο στο O. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το σημείο A_m συμβολίζει το πέρας της m ζώνης Fresnel στο επίπεδο, τότε με βάση τον ορισμό τους θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

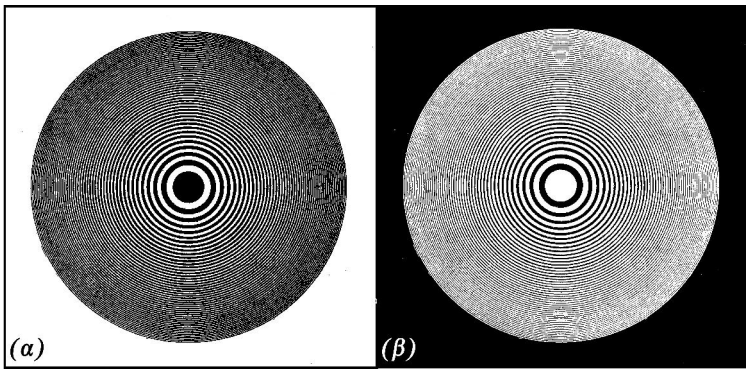
$$(r_{sm} + r_m) - (r_s + r_0) = m(\lambda/2) \qquad (7.8.6.4)$$

Και από τα τρίγωνα SOA_m και A_mOP θα έχουμε:

$r_{sm} = \sqrt{r_s^2 + R_m^2} = r_s\sqrt{1+\frac{R_m^2}{r_s^2}}$ και $r_m = \sqrt{r_0^2 + R_m^2} = r_0\sqrt{1+\frac{R_m^2}{r_0^2}}$. Και επειδή το σύνολο των ζωνών που μας ενδιαφέρει είναι περί το κέντρο O του οπτικού άξονα SOP θα είναι: $(R_m/r_s) \ll 1$ και $(R_m/r_0) \ll 1$. Οπότε οι τελευταίες σχέσεις με τη βοήθεια της διωνυμικής ανάπτυξης θα γίνουν: $r_{sm} = r_s + \frac{R_m^2}{2r_s}$ και $r_m = r_0 + \frac{R_m^2}{2r_0}$. Οπότε αν αντικατασταθούν στη (σχ. 7.8.6.4), η τελευταία θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_0} = \frac{m\lambda}{R_m^2} \qquad (7.8.6.5)$$

Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης μπορούμε να προσδιορίσουμε (και να κατασκευάσουμε τελικά σε επίπεδη μορφή) διαφράγματα ζωνών Fresnel με τις προαναφερόμενες ιδιότητες. Στις (Εικ. 7.8.6.2α,β) βλέπουμε δύο τέτοια συστήματα από τα



(Εικ. 7.8.6.2)

οποία το πρώτο επιτρέπεται η διέλευση των περιττών τον αριθμό ζωνών, ενώ από το δεύτερο των άρτιων, με τη μορφή διαφανών και αδιαφανών περιοχών που είναι καταγεγραμμένες σε φωτογραφικό φιλμ ή πλάκα.

Οι απεικονιστικές ιδιότητες των διαφραγμάτων ζωνών Fresnel

Η μορφολογία της (σχ. 7.8.6.5) μας παραπέμπει στην διαδικασία της απεικόνισης μέσω λεπτού φακού. Όπου: (Σχ. 7.8.6.1β) S, P να είναι τα συζυγή σημεία αντικειμένου ειδώλου και στη θέση O να βρίσκεται το διάφραγμα της ζώνης Fresnel αντί του λεπτού φακού. Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να υπολογίσουμε την εστιακή απόσταση f_1, που για λόγους που θα δούμε στα επόμενα, θα την

ονομάσουμε κατ' αρχή πρώτης τάξης. Πράγματι αυτή βρίσκεται μέσω της (σχ. 7.8.6.5) για την περίπτωση που $r_s \to \infty$, $m = 1$. Οπότε για $r_0 = f_1$ θα έχουμε:

$$f_1 = \left(R_m^2 / m\lambda\right) = R_1^2 / \lambda \qquad (7.8.6.6)$$

Έστω λοιπόν στη θέση S και κάθετα στον οπτικό άξονα SOP τοποθετούμε ένα αντικείμενο το οποίο φωτίζουμε κατάλληλα. Τότε στο επίπεδο το κάθετο στη θέση P, μέσω του διαφράγματος των ζωνών Fresnel θα πάρουμε το είδωλο του. Αλλά βλέπουμε ότι η εστιακή απόσταση f_1 εξαρτάται από το μ.κ. λ της φωτίζουσας πηγής. Για το λόγο αυτό, όταν το προς απεικόνιση αντικείμενο φωτιστεί με λευκό φως, το είδωλό του θα εμφανίσει το σφάλμα της χρωματικής εκτροπής.

Όμως εκτός από την πρώτης τάξης εστία F_1 , το σύστημα του διαφράγματος των ζωνών Fresnel διαθέτει και άλλης τάξης εστίες όπως τις: $F_3, F_5, F_7, \cdots$ με εστιακές αποστάσεις αντίστοιχα: $f_3, f_5, f_7, \cdots$. Δηλ. σημεία που λόγω περίθλασης, έχουμε ισχυρή συγκέντρωση φωτός. Πράγματι αποδείξαμε για m ανοιχτές ζώνες, όπως αυτές 'φαίνονται' από το σημείο P για το οποίο $r_0 = f_1$ ισχύει η (σχ. 7.8.6.6). Αν τώρα το P μετακινηθεί στο σημείο P' του οπτικού άξονα SOP πλησιάζοντας το διάφραγμα, θα παρατηρήσουμε μια μικρή αυξομείωση της έντασης του φωτός (κατά μήκος του οπτικού άξονα). Σε μια όμως ορισμένη απόσταση r_0' από αυτό η ένταση του φωτός θ' αυξηθεί σημαντικά. Θα πρόκειται για τη θέση εκείνη από την οποία πλέον η αρχική πρώτη ζώνη ($m = 1$) 'καταλαμβάνεται' από τρείς υποζώνες , γι' αυτό και προκύπτει το μέγιστο της έντασης του φωτός. Τότε θα ισχύει η σχέση: $R_1^2 = 3r_0'\lambda$, με το r_0' να παριστάνει την απόσταση από το O στο P'. Οπότε θα έχουμε:

$$r_0' = f_3 = \frac{R_1^2}{3\lambda} = \frac{1}{3}\left(\frac{R_1^2}{\lambda}\right) = \frac{1}{3} f_1 \qquad (7.8.6.7)$$

Δηλ. το 1/3 της πρώτης τάξης εστιακής απόστασης f_1, είναι ίση με την εστιακή απόσταση τρίτης τάξης f_3. Και με μια παρόμοια αποδεικτική διαδικασία βρίσκουμε: $f_5 = (1/5) f_1$, $f_7 = (1/7) f_1$ κοκ.

Παράδειγμα

Η διάμετρος της πρώτης ζώνης ενός διαφράγματος ζωνών Fresnel είναι $D_1 \simeq 0.478\text{mm}$, όταν αυτό χρησιμοποιείται για φως που παράγεται από ένα Laser He-Ne που εκπέμπει σε μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. α) Να υπολογιστεί η εστιακή α-

πόσταση f_1 του συστήματος, δεδομένου ότι η προαναφερόμενη ζώνη μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν θετικό μέσο απεικόνισης. β) Αντικείμενο ύψους $h = 1\text{cm}$ βρίσκεται σε απόσταση $r_s = 180\text{mm}$ πριν το διάφραγμα Fresnel και φωτίζεται με το φως του Laser. Να προσδιοριστούν οι θέσεις και οι μεγεθύνσεις των δύο πρώτων πραγματικών ειδώλων που σχηματίζονται μέσω του συστήματος.

- α) Η εστιακή απόσταση f_1 με τη βοήθεια της (σχ. 7.8.6.6) είναι: $f_1 = R_1^2/\lambda$. Και επειδή $R_1 = (D_1/2) \simeq 0.24\text{mm}$, $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ βρίσκουμε: $f_1 \simeq 90\text{mm}$. Οπότε από τη σχέση: $(1/r_{s1}) + (1/r_{01}) = (1/f_1)$ βρίσκουμε: $r_{s1} = 180\text{mm}$. Και η πλευρική μεγέθυνση του συστήματος θα είναι: $m_1 = (r_{01}/r_{s1}) = 1$.

β) Στη δεύτερη περίπτωση η εστιακή απόσταση f_3 θα δίνεται από τη (σχ. 7.8.6.7) και θα είναι: $f_3 = (1/3) f_1 = 30\text{mm}$. Τότε από την σχέση απεικόνισης : $(1/r_{s3}) + (1/r_{03}) = (1/f_3)$ και επειδή $r_{s3} = r_{s1} = 180\text{mm}$ βρίσκουμε: $r_{03} = 36\text{mm}$. Και για την περίπτωση αυτή, η πλευρική μεγέθυνση του συστήματος θα είναι: $m_3 = (r_{03}/r_{s3}) = (36/180) = 0.2$.

Τα δύο προαναφερόμενα είδωλα θα είναι πραγματικά. Επομένως μπορούμε να τα πάρουμε διαδοχικά πάνω σε ένα πέτασμα. Όμως εκτός των πραγματικών, θα υφίστανται και τα συζυγή τους φανταστικά, τα οποία θα σχηματίζονται από αποκλίνον περιθλώμενο φως, το οποίο το μάτι μας μπορεί να συγκεντρώσει στον αμφιβληστροειδή. Επομένως τα είδωλα αυτά μπορούν να ειδωθούν από έναν παρατηρητή που βλέπει δια μέσου του διαφράγματος των ζωνών Fresnel. Επί πλέον λόγω της ύπαρξης και άλλων εστιακών αποστάσεων: $f_5 = (1/5) f_1$, $f_7 = (1/7) f_1$ κλπ θα έχουμε ταυτόχρονα το σχηματισμό και άλλων πραγματικών και των αντίστοιχων συζυγών τους φανταστικών ειδώλων. Όμως τα τελευταία θ' απέχουν όλο και πιο λίγο μεταξύ τους και το μέγεθός τους θα είναι πάρα πολύ μικρό. Π.χ. για $f_5 = (1/5) f_1$ με $f_1 \simeq 90\text{mm} \Rightarrow f_5 \simeq 18\text{mm}$ βρίσκουμε: $r_{05} = 20\text{mm}$ και $m_5 \simeq 0.1$.

7.8.7 *Διαφράγματα ζωνών Gabor*

Στο (Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (Άσκ. 5: Λυμένη)), μελετήσαμε τη συμβολή του φωτός μεταξύ ενός επιπέδου και ενός σφαιρικού μετ. κύματος, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του άξονα z (Σχ. 7.8.7.1). Τα δύο σύμφωνα και της ίδιας συχνότητας μετ. κύματος συμβάλλουν ερχόμενα σε επαλληλία στο επίπεδο x, y. Και όσον αφορά το σφαιρικό αποκλίνον, προέρχεται από τη σημειακή πηγή S που απέχει από την αρχή O του τρισορθογωνίου σ.σ. x, y απόσταση $-L$. Εκεί είδαμε ότι η

κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου του επιπέδου μετ. κύματος, για την απλή περίπτωση που το πλάτος είναι ίσο με τη μονάδα δίνεται από τη σχέση:

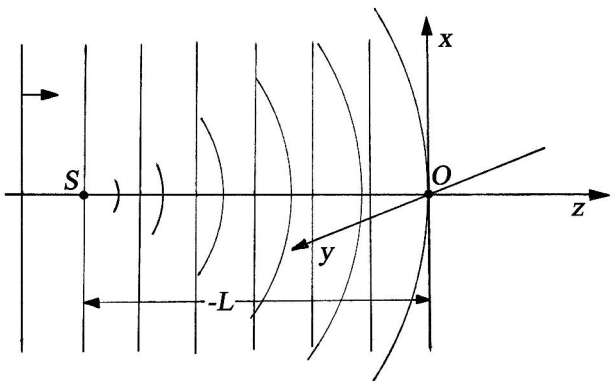
$$E_1(x,y)=1 \tag{7.8.7.1}$$

Και όσον αφορά του σφαιρικού αποκλίνοντος, από την:

$$E_2(x,y)=e^{-\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} \tag{7.8.7.2}$$

του οποίου το πλάτος είναι μοναδιαίο.

Επομένως για την ένταση του φωτός στο επίπεδο x,y θα έχουμε:



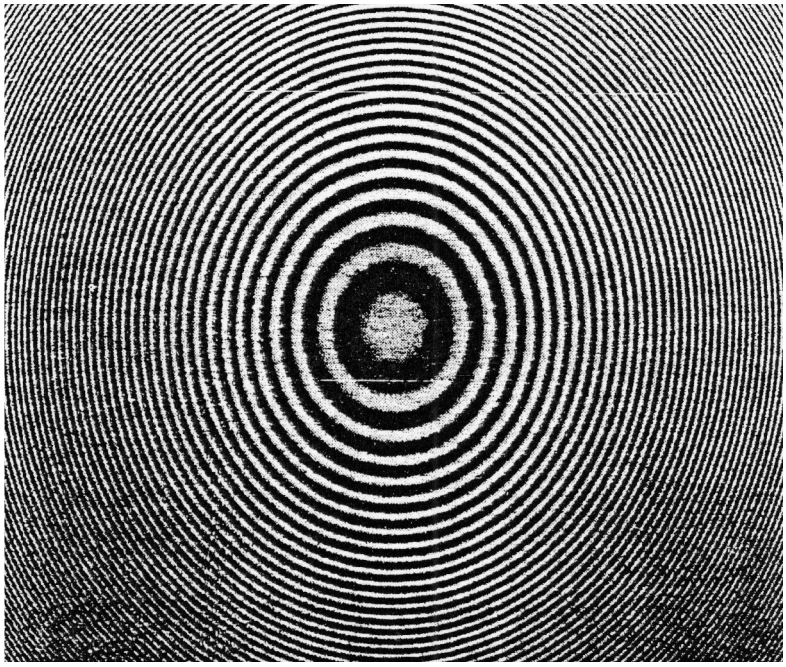
(Σχ. 7.8.7.1)

$I(x,y)=\left|E_1+E_2\right|^2\sim\left|E_1\right|^2+\left|E_2\right|^2+E_1E_2^*+E_1^*E_2$. Και τελικά μετά τις αντικαταστάσεις:

$$I(x,y)=\left|E_1+E_2\right|^2\sim 2+e^{-\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}+e^{-\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} \tag{7.8.7.3}$$

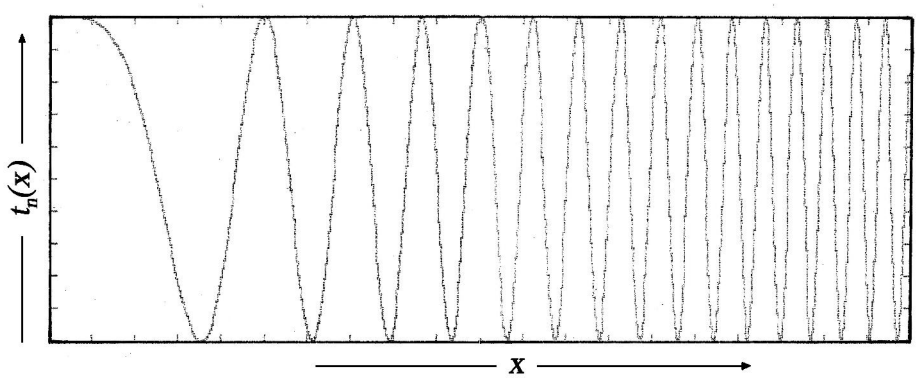
Αλλά επειδή $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta : I(x,y)\sim 2+2\cos\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}=4\cos^2\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{2\lambda L}$

Οπότε η μορφολογία της κατανομής της έντασης του φωτός πάνω στο επίπεδο x,y ανάγει σε πρότυπο κροσσών συμβολής κυκλικής συμμετρίας, όπως αυτό που φαίνεται στην (Εικ. 7.8.7.2). Επίσης στο (Σχ. 7.8.7.3) μπορούμε να δούμε τη μορφολογία των κροσσών συμβολής (που είναι συνημιτονικής φθίνουσας χωρικής συχνότητας), σε μια διεύθυνση που περνάει από το κέντρο του προτύπου.



(Εικ. 7.8.7.2)

Όταν όμως το προαναφερόμενο πρότυπο συμβολής εκτεθεί πάνω σε φωτογραφικό φιλμ και μάλιστα στη γραμμική του περιοχή και υποστεί τη διαδικασία της εμφάνισης (βλ. ΘΕΜΑ 2: Στοιχεία Ολογραφίας), τότε στο φιλμ αποτυπώνονται



(Σχ. 7.8.7.3)

οι κροσσοί συμβολής με τη μορφή διακύμανσης του πλάτους τους (δηλ. της αμαύρωσής τους). Η δημιουργούμενη με αυτόν τον τρόπο διαφάνεια, ονομάζεται ***διάφραγμα ζωνών Gabor (Gabor zone plate)*** και χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση διαφάνειας $t_n(x,y)$ που περιγράφεται από τη σχέση:

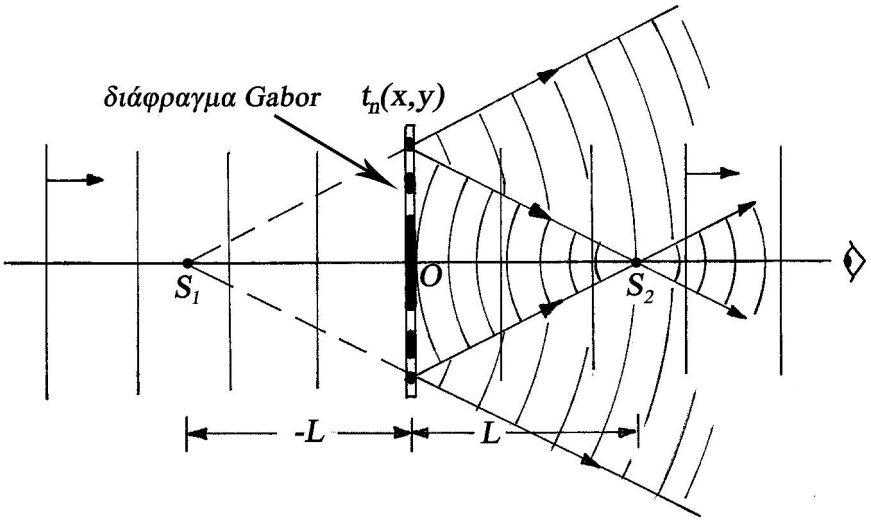
$$t(x,y) = a' + b'\left|E_1 + E_2\right|^2 \qquad (7.8.7.4)$$

όπου $|E_1 + E_2|^2$ δίνεται από τη (σχ. 7.8.7.3). Δηλ. το φιλμ θα συμπεριφέρεται σύμφωνα με το τετράγωνο του πλάτους των δύο μετ. κύματος που συμβάλλουν. Και το σημαντικότερο θα περιλαμβάνει – όπως θα δούμε στα επόμενα – τα πληροφοριακά στοιχεία που αφορούν αυτά τα μετ. κύματος. Όμως με βάση τον ορισμό της συνάρτησης διαφάνειας (βλ. ΘΕΜΑ 1 (σχ. 1. 43)):

$$t(x,y) = E_t(x,y)/E_i(x,y) \qquad (7.8.7.5)$$

όπου $E_i(x,y)$ το προσπίπτον στη διαφάνεια μετ. κύματος και $E_t(x,y)$ το αναδυόμενο από αυτήν. Που σημαίνει ότι εφόσον γνωρίζουμε την $t(x,y)$ και ένα προσπίπτον σ' αυτήν μετ. κύματος $E_i(x,y)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε το αναδυόμενο από αυτήν μέτωπο. Και βέβαια η αναδυόμενη από τη διαφάνεια διαταραχή δεν είναι παρά η κατανομή του περιθλώμενου από αυτήν ηλ. πεδίου.

Τοποθετούμε τώρα τη διαφάνεια αυτή (δηλ. το διάφραγμα ζωνών Gabor) σε μία θέση (Σχ. 7.8.7.4) και τη φωτίζουμε κάθετα μ' ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ.



(Σχ. 7.8.7.4)

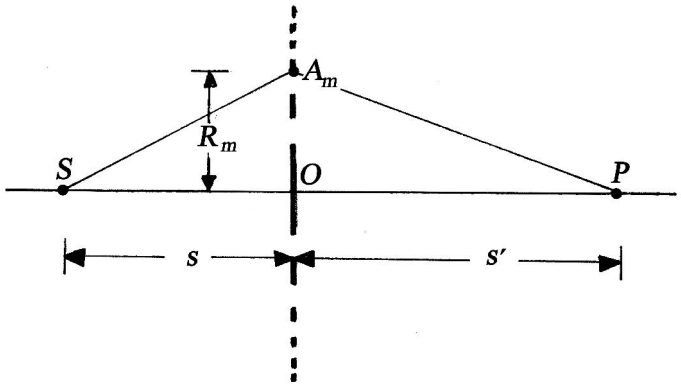
κύματος. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τελευταίο είναι και μοναδιαίου πλάτους. Οπότε $E_i(x,y) = 1$ και με συνδυασμό των (σχ. 7.8.7.3,4) βρίσκουμε:

$t = A + Be^{-\frac{i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}} + Be^{-\frac{-i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}}$. Αν τις δύο τελευταίες σχέσεις τις αντικαταστήσουμε στη (σχ. 7.8.7.5) βρίσκουμε:

$$E_t(x,y)=t(x,y)E_i(x,y)=A+Be^{-\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}+Be^{-\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} \qquad (7.8.7.6)$$

Και η ανάγνωση της τελευταίας μας λέει το εξής: Η κάθετη πρόσπτωση στη συγκεκριμένη διαφάνεια επιπέδου μετ. κύματος μοναδιαίου πλάτους, θα έχει σαν αποτέλεσμα την ανάδυση τριών περιθλώμενων μετ. κύματος: α) Ενός επιπέδου με πλάτος $E_a(x,y)=A$, που διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με το προσπίπτον (δηλ. κατά μήκος του οπτικού άξονα της διάταξης του (Σχ. 7.8.7.4). β) Ενός σφαιρικού αποκλίνοντος μετ. κύματος: $E_b=Be^{-\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}$, το οποίο φαίνεται να προέρχεται από το σημείο S_1 που βρίσκεται σε απόσταση $-L$ από το κέντρο O του διαφράγματος των ζωνών Gabor. γ) Και ενός σφαιρικού συγκλίνοντος μετ. κύματος: $E_c=Be^{-\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}$, το οποίο φαίνεται να συγκλίνει προς το σημείο S_2 που βρίσκεται σε απόσταση L από το κέντρο O του διαφράγματος των ζωνών Gabor. Θ' αποδείξουμε στα επόμενα ότι τα διαφράγματα ζωνών Gabor μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν συστήματα απεικόνισης όπως και αυτά των ζωνών Fresnel.

Κατ' αρχή θα υπολογίσουμε τις ακτίνες R_m των ζωνών στις θέσεις των μεγίστων της έντασης, δεδομένου ότι αυτές είναι συνημιτονικής μορφής. Πράγματι επειδή: $I(x,y)=4\cos^2\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{2\lambda L}$, οι θέσεις των μεγίστων συναντώνται στις θέσεις A_m (Σχ. 7.8.7.5), για τις οποίες: $\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{2\lambda L}=m\pi \quad m=0\pm1,\pm2,\cdots$. Και επειδή είναι:



(Σχ. 7.8.7.5)

$OA_m=R_m=\sqrt{x^2+y^2}$ θα έχουμε:

$$R_m^2 = 2m\lambda L \quad m = 0 \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{7.8.7.7}$$

Για τη συγκεκριμένη αυτή θέση A_m, θα υπάρχουν δύο σημεία S, P του οπτικού άξονα του (Σχ. 7.8.7.5) για τα οποία θα ισχύει η σχέση:

$$\left(SA_m + A_m P\right) - \left(SO + OP\right) = m\lambda \tag{7.8.7.8}$$

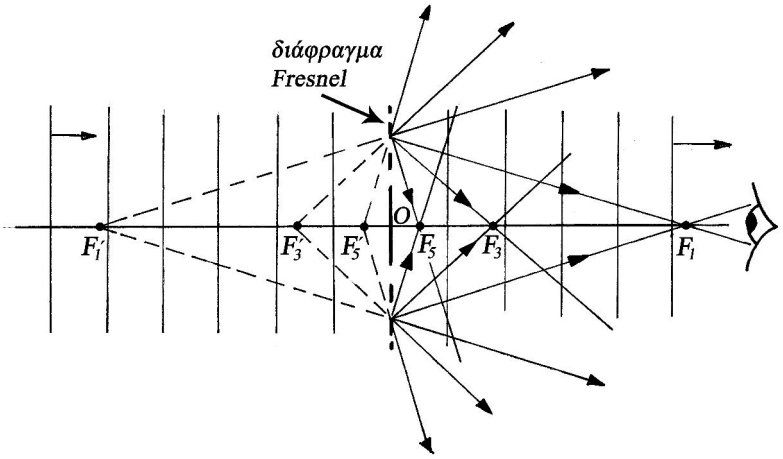
Έχουμε όμως: $SA_m = \sqrt{s^2 + R_m^2} = s\sqrt{1 + \frac{R_m^2}{s^2}}$ και $A_m P = \sqrt{s'^2 + R_m^2} = s'\sqrt{1 + \frac{R_m^2}{s'^2}}$. Και επειδή οι διαστάσεις του συστήματος των ζωνών Gabor είναι μικρές σε σχέση με με τις αποστάσεις s, s' τότε $R_m / s \ll , R_m / s' \ll 1$ και με βάση τη διωνυμική ανάπτυξη: $SA_m \simeq s + \frac{R_m^2}{2s}$ και $A_m P \simeq s' + \frac{R_m^2}{2s'}$. Οι τελευταίες αν αντικατασταθούν στη (σχ. 7.8.7.8) μας δίνουν: $\frac{R_m^2}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}\right) = m\lambda$ ή $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2m\lambda}{R_m^2} = 1 \Big/ \frac{R_m^2}{2m\lambda}$. Και με τη βοήθεια της (σχ. 7.8.7.7) βρίσκουμε τελικά:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{L} \tag{7.8.7.9}$$

Σχέση που είναι πανομοιότυπη με αυτή της απεικόνισης μέσω ενός λεπτού φακού, με εστιακή απόσταση την L. Και το ότι η L είναι η εστιακή απόσταση του διαφράγματος ζωνών Gabor μπορούμε να το διαπιστώσουμε από το (Σχ. 7.8.7.4). Από εκεί βλέπουμε ότι η πρόσπτωση σ' αυτό επιπέδου μετ. κύματος, έχει σαν αποτέλεσμα τη σύγκλισή του σε απόσταση L πίσω από το διάφραγμα.

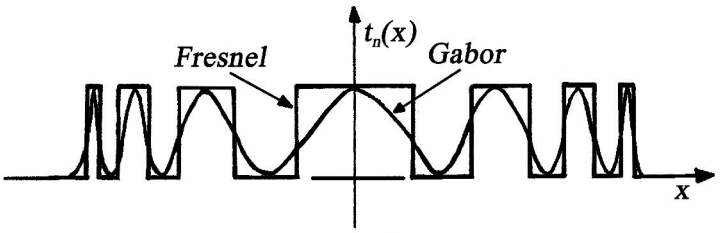
Στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε αποδείξει ότι ένα διάφραγμα ζωνών Fresnel διαθέτει περισσότερες της μιας εστιακές αποστάσεις: $f_1, f_1/3, f_1/5, \cdots$. Που σημαίνει ότι αν αυτό φωτιστεί μ' ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος, μπορούμε να εντοπίσουμε τις αντίστοιχες εστίες, μετακινώντας ένα πέτασμα από την πρώτη εστία F_1 προς αυτό μέχρις ότου συναντήσουμε τις άλλες: $F_3, F_5, \cdots$. Τα σημεία αυτά στα οποία διαπιστώνουμε μέγιστη ένταση (και η οποία βαίνει μειούμενη), οφείλονται στην περίθλαση του φωτός από τα ανοίγματα των ζωνών (δηλ. στην επαλληλία των πεδίων τους στα σημεία αυτά). Εκτός βέβαια από τις πραγματικές εστίες, με το μάτι μας – όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.8.7.6) – μπορούμε να εντοπίσουμε και τις συζυγείς φανταστικές εστίες $F_3', F_5', F_7', \cdots$ που απέχουν την ίδια απόσταση από το διάφραγμα. Όπως αποδείξαμε όμως προηγουμένως, το διάφραγμα ζωνών Gabor διαθέτει μόνο ένα ζεύγος συζυγών εστιών.

Η ερμηνεία αυτής της διαφοράς έγκειται ουσιαστικά στη μορφολογία των δύο περιθλώντων στοιχείων, τα οποία χαρακτηρίζονται από διαφορετικές) συναρ-



(Σχ. 7.8.7.6)

τήσεις διαφάνειας πλάτους $t(x,y)$. Η γραφική τους παράσταση (μεταβολή της αμαύρωσης συναρτήσει της απόστασης), δίνεται στο (Σχ. 7.8.7.7) και γίνεται κατά μήκος μιας ευθείας που περνάει από το κέντρο των αντίστοιχων διαφραγμάτων.



(Σχ. 7.8.7.7)

Όπου γίνεται αμέσως εμφανές ότι η συνάρτηση διαφάνειας πλάτους του διαφράγματος ζωνών Fresnel είναι τετραγωνικής μορφής (διαφανείς ή αδιαφανείς ζώνες). Ενώ του διαφράγματος Gabor η αμαύρωση των 'ζωνών' είναι συνημιτονικής μορφής. Και χωρίς ιδιαίτερες μαθηματικές αξιώσεις εδώ, μπορούμε τη συνάρτηση διαφάνειας πλάτους των ζωνών Fresnel, να την προσεγγίσουμε κατά Fourier από το άθροισμα π.χ. περιττών συνημιτονικών συναρτήσεων χωρικών συχνοτήτων της μορφής:

$$t(x,y) = A + B\cos\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L} + C\cos\frac{3\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L} + D\cos\frac{5\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L} + \cdots =$$

$$= A + B\cos\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L} + C\cos\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(L/3\right)} + D\cos\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(L/5\right)} + \cdots \Rightarrow$$

$$t\left(x,y\right) = A + B\left[\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}\right] + C\left[\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L/3}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L/3}}\right] + \cdots \qquad (7.8.7.10)$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ο φωτισμός της διαφάνειας της (σχ. 7.8.7.10) από ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος μοναδιαίου πλάτους (Σχ. 7.8.7.6), μας δίνει μετά από αυτήν: α) Ένα επίπεδο μετ. κύματος πλάτους A που διαδίδεται κατά μήκος του οπτικού άξονα (μη περιθλώμενο φως). β) Σφαιρικά συγκλίνοντα μετ. κύ ματος:

$$\left(B/2\right)e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}},\ \left(C/2\right)e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(L/3\right)}},\ \left(D/2\right)e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(L/5\right)}},\cdots$$

που συγκλίνουν σε αποστάσεις $L, L/3, L/5, \cdots$ από το κέντρο του διαφράγματος των ζωνών Fresnel και γ) Σφαιρικά αποκλίνοντα μετ. κύματος:

$$\left(B/2\right)e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}},\ \left(C/2\right)e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(L/3\right)}},\ \left(D/2\right)e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(L/5\right)}},\cdots$$

που φαίνονται ότι προέρχονται από φανταστικές πηγές που βρίσκονται σε αποστάσεις $-L, -L/3, -L/5, \cdots$ από το κέντρο του διαφράγματος των ζωνών Fresnel. Τα προαναφερόμενα δικαιολογούν την πολλαπλότητα των συζυγών εστιών που μας δίνουν τα διαφράγματα των ζωνών Fresnel, έναντι αυτών του Gabor.

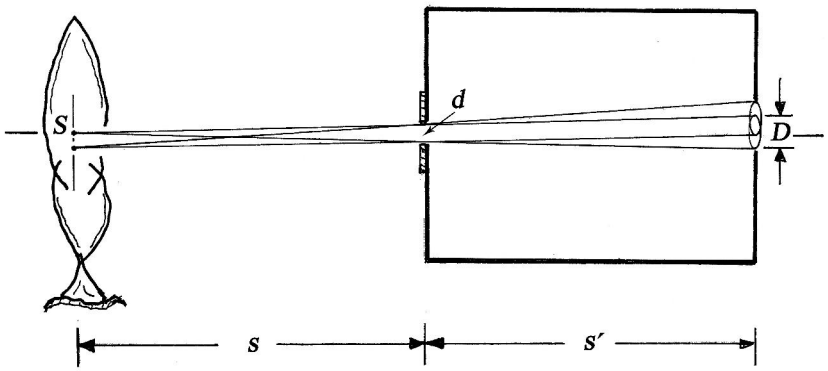
Εφαρμογή των διαφραγμάτων ζωνών. Κάμερα ανοίγματος από την άποψη της Γεωμετρικής Οπτικής και της περίθλασης Fresnel

Είναι γνωστό ότι η ***κάμερα ανοίγματος (camera obscura)*** ή ***(pinhole camera)*** συνιστά μια 'πρωτόγονη' φωτογραφική μηχανή με τη βοήθεια της οποίας είναι δυνατόν να πάρουμε σε ένα μικρών διαστάσεων 'σκοτεινό θάλαμο', το είδωλο ενός σχετικά μακρινού αντικειμένου. Ο θάλαμος αυτός συνίσταται από ένα κουτί (π.χ. $10\times10\times10\text{cm}$ (Σχ. 7.8.7.8), που στο κέντρο της μιας του πλευράς διαθέτει ένα μικρό κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου d (π.χ. 1mm), από το οποίο 'βλέπει' το προς απεικόνιση αντικείμενο. Από αυτό, το φως περνάει στο εσωτερικό του κουτιού και συναντάει απέναντί του ένα ημιδιαφανές πέτασμα (π.χ. ρυζόχαρτο), πάνω στο οποίο σχηματίζεται το ανεστραμμένο είδωλο του αντικειμένου. Στη θέση του πετάσματος

είναι δυνατόν να τοποθετηθεί φιλμ, προκειμένου το αντικείμενο να καταγραφεί φωτογραφικά.

Απεικόνιση από την άποψη της Γεωμετρικής Οπτικής

Αν υποθέσουμε ότι το αντικείμενο απέχει από την κάμερα απόσταση $s = 20\text{m}$ και ότι το άνοιγμά της από την απέναντι πλευρά της (όπου και σχηματίζεται το είδωλο) είναι $s' = 10\text{cm}$. Θεωρούμε επίσης (για λόγους που θα εξηγήσουμε στα επόμενα) ότι η διάμετρος του κυκλικού της ανοίγματος είναι $d = 0.446\text{mm}$ (δηλ. περίπου μισό χιλιοστό). Υποθέτουμε τώρα (Σχ. 7.8.7.8) ότι ένας κώνος ακτινών



(Σχ. 7.8.7.8)

φωτός εκκινούν από ένα σημείο S του αντικειμένου και οδεύοντας αγγίζουν τα όρια του ανοίγματος της κάμερας διαμέτρου d. Και συνεχίζοντας μέχρι την απέναντι πλευρά της κάμερας, δημιουργούν μια κηλίδα διαμέτρου D. Αυτή θα είναι και το είδωλο της σημειακής πηγής S και το μέγεθός της θα εξαρτάται από τη διάμετρο d του ανοίγματος της κάμερας.

Μεταξύ των d, D, s, s' θα έχουμε τη σχέση: $\frac{D}{d} = \frac{s+s'}{s}$ από την οποία: $D = d\left(\frac{s+s'}{s}\right)$. Και με την αντικατάσταση των αριθμητικών δεδομένων βρίσκουμε ότι: $D = 0.448\text{mm}$. Αν τώρα δύο παραπλήσιοι κύκλοι διαμέτρου D του ειδώλου είναι σε επαφή, τότε αυτοί θα προέρχονται από δύο σημεία (σημειακές πηγές) του αντικειμένου που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $D' = (Ds)/s'$. Δηλ. $D' \simeq 9\text{cm}$. Όταν όμως η απόσταση τους γίνει μικρότερη, τότε τα είδωλά τους (οι δύο κύκλοι διαμέτρου D) θ' αρχίσουν να συγχέονται. Αυτό είναι – θα μπορούσαμε να πούμε από την άποψη της γεωμετρικής οπτικής – το διακριτικό όριο που επιτυγχάνουμε, μέσω των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της συγκεκριμένης κάμερας ανοίγματος.

Δηλ. μπορούμε να διακρίνουμε πάνω στο φιλμ σημεία του αντικειμένου που απέχουν απόσταση μεγαλύτερη ή ίση με 9cm. Και εάν στην τελευταία των περιπτώσεων θεωρήσουμε ότι τα κέντρα των δύο κύκλω στο επίπεδο του ειδώλου απέχουν μεταξύ τους κατά $D/2$, τότε το διακριτικό όριο γίνεται 4.5cm. Και δεδομένου ότι το μέγεθος της διαμέτρου D εξαρτάται αναλογικά από το άνοιγμα d της κάμερας, όσο ελαττώνεται το d τόσο το D γίνεται μικρότερο. Το γεγονός αυτό όμως συνεπάγεται υπερβολικά μεγάλο χρόνο έκθεσης για το φωτ. φιλμ, με συνέπεια την καταγραφή θορύβων όταν τα φωτογραφούμενα αντικείμενα είναι κινούμενα.

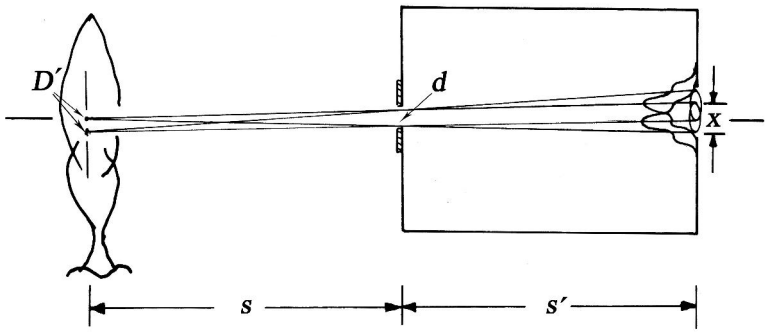
Απεικόνιση από την άποψη της περίθλασης Fresnel

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τη διαδικασία της απεικόνισης μέσο της κάμερας ανοίγματος, με τη βοήθεια του φαινομένου της περίθλασης του φωτός και πιο συγκεκριμένα της περίθλασης Fresnel. Δηλ. με βάση κυματικούς όρους. Και στην προκειμένη περίπτωση θα θεωρήσουμε αρχικά ότι τα δύο σημεία του αντικειμένου αποτελούν σημειακές πηγές εκπομπής σφαιρικών μετ. κύματος. Σαν περιθλόν άνοιγμα, το διαμέτρου d άνοιγμα της κάμερας. Και τέλος το επίπεδο που παίρνουμε τα πρότυπα περίθλασης Fresnel από τις δύο σημειακές πηγές, το επίπεδο απεικόνισης της κάμερας. Εκεί δηλ. που τοποθετείται το φωτ. φιλμ για να πάρουμε το είδωλο του αντικειμένου. Και όσον αφορά τα αριθμητικά δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε για τους υπολογισμούς μας, θα είναι ακριβώς τα ίδια που χρησιμοποιήσαμε για την ανάλυση του προβλήματος, με τη βοήθεια γεωμετρικών όρων. Δηλ: $d = 0.446\text{mm}$, $s = 20\times10^{3}\text{mm}$, $s' = 10^{2}\text{mm}$ και $\overline{\lambda} = 0.5\times10^{-3}\text{mm}$, που είναι το μέσο μ.κ. του ορατού φωτός.

Κατ' αρχή θα πρέπει ν' αποδείξουμε ότι με τα προαναφερόμενα δεδομένα, τα πρότυπα περίθλασης που σχηματίζονται στο επίπεδο απεικόνισης της κάμερας, είναι σε περιοχή περίθλασης Fresnel. Πράγματι επειδή: $s' = 10^{2}\text{mm}$ και $\left(d^{2}/\overline{\lambda}\right) = (0.446)^{2}/\left(0.5\times10^{-3}\right) \simeq 400\text{mm}$ θα έχουμε: $s' < d^{2}/\overline{\lambda}$. Που σημαίνει ότι αυτό ισχύει. Κατά δεύτερο λόγο θα πρέπει να εκλάβουμε το περιθλόν άνοιγμα σαν απεικονίζον σύστημα. Και για να συμβεί αυτό θα πρέπει να το ταυτίσουμε με ένα διάφραγμα ζωνών Fresnel. Το τελευταίο είναι δυνατόν να γίνει αν η διάμετρος d του ανοίγματος της κάμερας, ταυτιστεί με τη διάμετρο της πρώτης ζώνης Fresnel. Και εφόσον θεωρήσαμε ότι το σύστημά μας είναι απεικονίζον, με βάση τη (σχ. 7.8.6.5) για $m = 1$ θα έχουμε (Σχ. 7.8.7.9):

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{\overline{\lambda}}{R_1^2} \qquad (7.8.7.11)$$

(όπου $d = 2R_1$). Και για $s = 20\times10^3\,\text{mm}$, $s' = 10^2\,\text{mm}$, $\overline{\lambda} = 0.5\times10^{-3}\,\text{mm}$ βρίσκουμε: $R_1 = 0.223\text{mm}$, οπότε: $d = 2R_1 = 0.446\text{mm}$. Αλλά για να επιβεβαιώσουμε ότι η διάμετρος d αντιστοιχεί με αυτήν της πρώτης ζώνης, αρκεί να υπολογίσουμε τον αριθ-



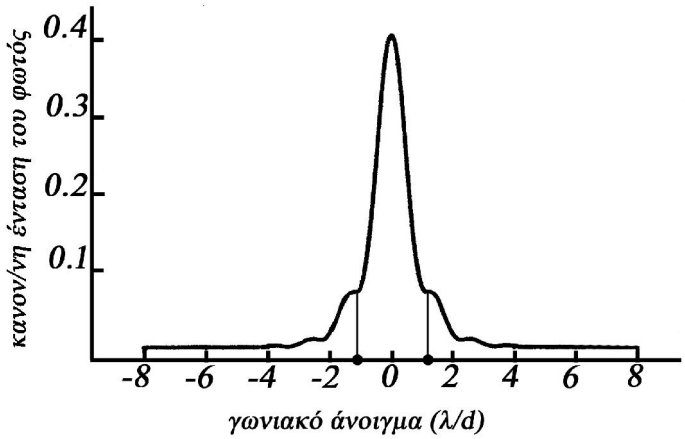
(Σχ. 7.8.7.9)

μό Fresnel N_F από τη (σχ. 7.8.3.2):

$$N_F = \frac{(s+s')R_1^2}{ss'\overline{\lambda}} = \frac{\left(20\times10^3+10^2\right)\times(0.223)^2}{\left(20\times10^3\right)\times\left(1\times10^2\right)\times0.5\times10^{-3}} = 0.999$$

. Δηλ. βρίσκουμε ότι $N_F \simeq 1$.

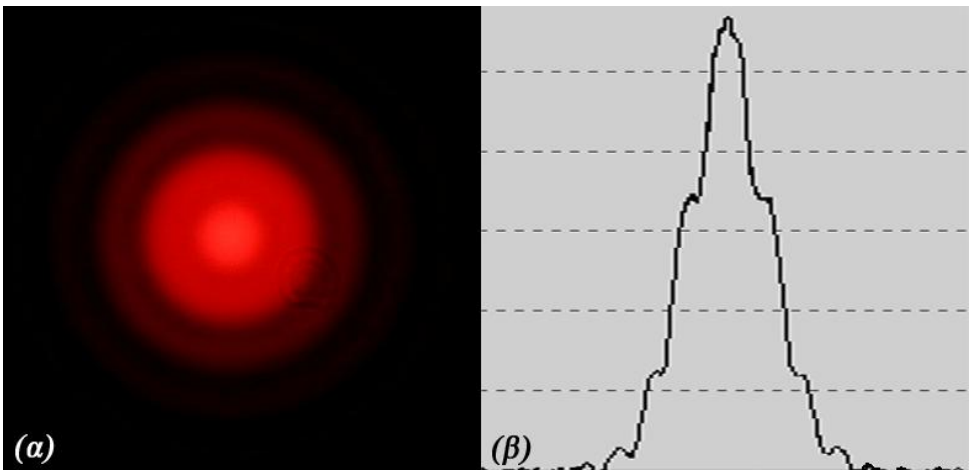
Στο (Σχ. 7.8.7.10) βλέπουμε την κατανομή της έντασης του φωτός, κατά μήκος μιας διεύθυνσης που περνάει από το κέντρο του προτύπου περίθλασης Fresnel, και που



(Σχ. 7.8.7.10)

προέρχεται από ένα κυκλικό άνοιγμα. Από τη θέση που παίρνουμε το πρότυπο, στο κυκλικό άνοιγμα 'φαίνεται' μόνο η πρώτη ζώνη Fresnel. Το κυκλικής συμμετρίας πρότυπο προσδιορίστηκε αριθμητικά, μέσω της μεθόδου του ταχέως μετασχηματι-

σμού Fourier. Η μορφολογία του προσομοιάζει με αυτήν του προτύπου περίθλασης Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα αλλά δεν είναι η ίδια, επειδή τα ελάχιστα της έντασης που παρουσιάζονται δεν είναι μηδενικά. Είναι αυτονόητο από τα προαναφερόμενα, ότι το πρότυπο αυτό της έντασης θα εμφανίζουν τα είδωλα στο επίπεδο απεικόνισης της κάμερας ανοίγματος (Σχ. 7.8.7.9). Στην (Εικ. 7.8.7.11α) μπορούμε να δούμε το πρότυπο της έντασης του φωτός το οποίο προέκυψε σαν πειραματικό αποτέλεσμα της περίθλασης Fresnel από κυκλικό άνοιγμα που περιλάμβανε μια ζώ-



(Εικ. 7.8.7.11)

νη, με φως από Laser He-Ne. Και στην (Εικ. 7.8.7.11β) βλέπουμε την καταγραφή της έντασης σε μια διεύθυνση που περνάει από το κέντρο προτύπου.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να εισάγουμε ένα κριτήριο, προκειμένου να καθορίσουμε τη διακριτική ικανότητα του συστήματος. Και σαν τέτοιο δεχόμαστε το γωνιακό άνοιγμα μεταξύ των πρώτων (ένθεν και ένθεν του κεντρικού μέγιστου) μη μηδενικών ελάχιστων. Το γωνιακό αυτό άνοιγμα είναι ίσο (Σχ. 7.8.7.9) με x/s'. Επίσης από το (Σχ. 7.8.7.10) βλέπουμε ότι η κανονικοποιημένη ένταση του φωτός I δίνεται συναρτήσει του γωνιακού ανοίγματος $\overline{\lambda}/d$. Όπου d η διάμετρος του ανοίγματος της κάμερας. Και επειδή για τα δύο πρώτα συμμετρικά μη μηδενικά ελάχιστα το γωνιακό άνοιγμα θα είναι $2\lambda/d$, μπορούμε να γράψουμε: $2\overline{\lambda}/d = x/s'$. Από την οποία μετά τις αντικαταστάσεις: $s' = 10^2\,\text{mm}$, $\overline{\lambda} = 0.5\times10^{-3}\,\text{mm}$ και $d = 0.446\text{mm}$ βρίσκουμε: $x = 0.224\text{mm}$. Την κηλίδα αυτής της διαμέτρου στο επίπεδο του φιλμ (επίπεδο απεικόνισης της κάμερας,) μπορούμε να την θεωρήσουμε ότι είναι το είδωλο μιας σημειακής πηγής που εκπέμπει από το αντικείμενο. Και κατά προέκταση τα είδωλα δύο σημειακών πηγών του αντικειμένου μπορούν μεταξύ τους να διαχωριστούν στο επίπεδο του ειδώλου, όταν η απόστασή τους γίνει ίση με $x = 0.224\text{mm}$.

Τότε η αντίστοιχη απόσταση των σημειακών πηγών στο χώρο του αντικειμένου θα είναι: $D' = \frac{sx}{s'} = \frac{20 \times 10^3 \times 0.224}{10^2} = 44.8\text{mm}$.

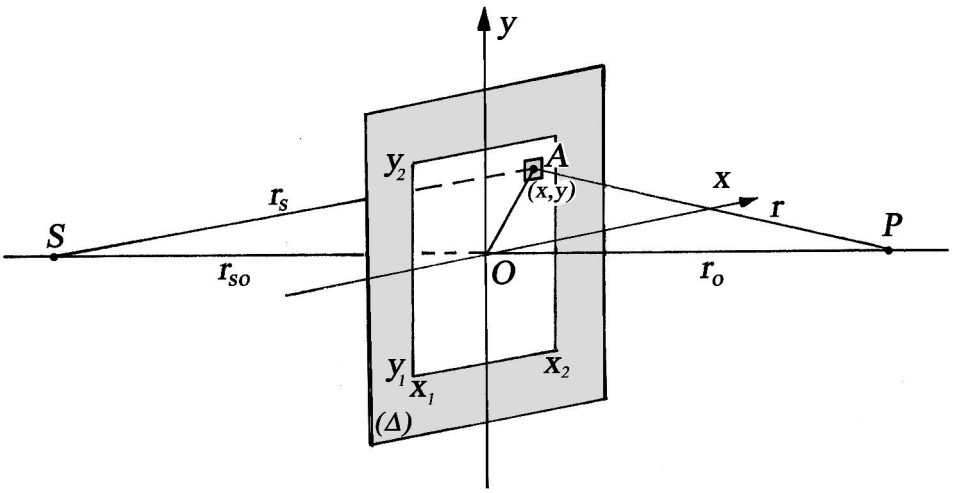
Τελικά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι: Οι δύο προαναφερόμενες προσεγγίσεις (γεωμετρική και κυματική) με τα συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα όσον αφορά τη διακριτική ικανότητα της κάμερας ανοίγματος, οδηγούν στα ίδια σχεδόν αποτελέσματα. Στην (Εικ. 7.8.7.12) βλέπουμε μια φωτογραφία η οποία έχει ληφθεί με τη βοήθεια μιας παρόμοιας κάμερας. Το πλάνο είναι φωτογραφημένο από απόσ-

(Εικ. 7.8.7.12)

ταση $s = 20 \times 10^3\,\text{mm}$, το μήκος της κάμερας είναι $s' = 1 \times 10^2\,\text{mm}$ αλλά η διάμετρος του ανοίγματός της είναι $d = 0.35\text{mm}$. Κατά την απεικόνιση μ' αυτό τον τρόπο διαπιστώνουμε ότι δεν εμφανίζεται σφάλμα διαστροφής (στρέβλωσης) και το βάθος πεδίου της εικόνας είναι πολύ ικανοποιητικό. Η θολότητα των θάμνων στο πίσω μέρος της εικόνας, οφείλεται στην κίνησή τους κατά τη διάρκεια του ούτως ή άλλως μεγάλου χρόνου έκθεσης του φωτογραφικού φιλμ.

7.8.8 *Περίθλαση Fresnel από ορθογώνιο άνοιγμα, που φωτίζεται από σφαιρικό ή επίπεδο μετ. κύματος. Τα ολοκληρώματα του Fresnel και η σπείρα του Cornu*

Στα επόμενα θα μελετήσουμε την περίθλαση Fresnel από ανοίγματα ή εμπόδια, τα οποία σε αντιδιαστολή με τα κυκλικά η μορφολογία τους είναι γραμμική (ορθογώνια ανοίγματα, σχισμές μεγάλου μήκους, γραμμικά και τετραγωνικά εμπόδια κ.λ.π.). Θα εκκινήσουμε από ένα ορθογώνιο άνοιγμα το οποίο θα φωτίσουμε με ένα σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος. Στο (Σχ. 7.8.8.1) φαίνεται ένα τέτοιο



(Σχ. 7.8.8.1)

πάνω στο διάφραγμα (Δ) με O το κέντρο του που είναι η αρχή του σ.σ. x, y. S είναι η θέση της σημειακής πηγής και μετά το άνοιγμα, ένα σημείο P του οπτικού άξονα SOP (άξονας z) που είναι κάθετος στο διάφραγμα (Δ). Η θέση του σημείου P, που η απόστασή του από το σημείο O είναι r_0, η μέγιστη διάσταση του περιθλώντος ανοίγματος ($\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d$) καθώς και το μ.κ. λ, θα πρέπει να πληρούν τη σχέση: $r_o < d^2/\lambda$ προκειμένου να βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel. Ο τελικός μας σκοπός θα είναι ο ποσοτικός προσδιορισμός της έντασης του ηλ. πεδίου E_P στο σημείο P καθώς και σε οποιοδήποτε σημείο σε επίπεδα που είναι κάθετα στον οπτικό άξονα. Και προκειμένου να υπολογίσουμε το πεδίο στο P θα πρέπει με βάση την αρχή των Huygens-Fresnel ν' αθροίσουμε τις συνεισφορές των στοιχειωδών εκπομπών (κυματιδίων) που κατανέμονται στο άνοιγμα και έρχονται σε επαλληλία στο σημείο P.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε στο εσωτερικό του ορθογωνίου ανοίγματος μια στοιχειώδη επιφάνεια dS με συντεταγμένες (x, y) στη θέση A, που απέχει από το O απόσταση OA. Έστω επίσης ότι: $(E_0/r_s)e^{i(kr_s-\omega t_1)}$ είναι η ένταση του ηλ. πεδίου του αρχικού μετ. κύματος που φθάνει από την πηγή S στη θέση A (εμβαδού dS) σε χρόνο t_1. Τότε το ηλ. πεδίο dE_P (σε μιγαδική μορφή) που οφείλεται στην επαλληλία των εκπεμπόμενων κυματιδίων από τη θέση αυτή στο P μετά από χρόνο t_2 θα είναι: α) Ανάλογη του προαναφερόμενου πεδίου, β) Του παράγοντα κατευθυντικότητας $\kappa(\theta)$ που καθορίζει τα πλάτη των κυματιδίων κατά διεύθυνση, γ) Ενός παράγοντα αναλογίας Q , δ) Της φάσης στη θέση P $\left\{e^{i(kr-\omega t_2)}\right\}$ και ε) Του πλάτους τους $(1/r)$ (λόγω της σφαιρικότητάς των μετώπων κύματος). Δηλ. θα έχουμε: $dE_P = \left[\frac{E_0}{r_s}e^{i(kr_s-\omega t_1)}\right]\frac{\kappa(\theta)Q}{r}e^{i(kr-\omega t_2)}dS$. Αλλά στην (§ 7.8.1) είχαμε αποδείξει ότι: $Q = 1/\lambda$. Οπότε: $dE_P = \frac{\kappa(\theta)E_0}{r_s r\lambda}e^{i\left[k(r_s+r)-\omega(t_1+t_2)\right]}dS$. Και αν $t = t_1 + t_2$ είναι ο χρόνος διάδοσης του πεδίου για τη διαδρομή SAP τότε θα έχουμε:

$$dE_P = \frac{\kappa(\theta)E_0}{r_s r\lambda}e^{i\left[k(r_s+r)-\omega t\right]}dS \qquad (7.8.8.1)$$

Όμως οι διαστάσεις των ορθογωνίων ανοιγμάτων (όπως και για τις περιπτώσεις των αντιστοίχων κυκλικών) είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις αποστάσεις r_{s0}, r_0. Επομένως $\kappa(\theta) \simeq 1$. Επίσης για τον παράγοντα του πλάτους (όχι όμως και για τον παράγοντα της φάσης) της (σχ. 7.8.8.1), μπορούμε να κάνουμε τις αντικαταστάσεις: $r_s \simeq r_{s0}$ και $r \simeq r_0$. Οπότε η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή:

$$dE_P = \frac{E_0}{r_{s0}r_0\lambda}e^{i\left[k(r_s+r)-\omega t\right]}dS \qquad (7.8.8.2)$$

Αλλά: $r_s = \sqrt{r_{so}^2 + x^2 + y^2} = r_{s0}\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{r_{s0}^2}} \simeq r_{s0} + \frac{x^2+y^2}{2r_{s0}}$

και $r = \sqrt{r_0^2 + x^2 + y^2} = r_0\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{r_0^2}} \simeq r_0 + \frac{x^2+y^2}{2r_0}$ με βάση τη διωνυμική ανάλυση.

Τότε θα έχουμε, μετά την άθροιση των δύο τελευταίων σχέσεων:

$$r_s + r = \left(r_{so} + r_0\right) + \left(x^2 + y^2\right)\frac{r_{so} + r_0}{2r_{so}r_0} \tag{7.8.8.3}$$

Η οποία αν αντικατασταθεί στη (σχ. 7.8.8.2), μετά την ολοκλήρωση μεταξύ των ορίων: $\left[x_1, x_2\right]$ και $\left[y_1, y_2\right]$ όπως και την αντικατάσταση $dS = dxdy$ θα έχουμε:

$$E_P = \frac{E_0 e^{ik\left[\left(r_{s0}+r_0\right)-\omega t\right]}}{r_{s0}r_0\lambda}\int_{x_1}^{x_2} e^{ikx^2G}dx\int_{y_1}^{y_2} e^{iky^2G}dy \tag{7.8.8.4}$$

όπου $G = \dfrac{r_{s0} + r_0}{2r_{s0}r_0}$. Κατόπιν σ' αυτά τα ολοκληρώματα εισάγουμε τις αλλαγές των μεταβλητών:

$$u \to x\sqrt{\frac{2\left(r_{s0} + r_0\right)}{\lambda r_{s0}r_0}} \quad \text{και} \quad \upsilon \to y\sqrt{\frac{2\left(r_{s0} + r_0\right)}{\lambda r_{s0}r_0}} \tag{7.8.8.5}$$

οι οποίες είναι αδιάστατες. Τότε η (σχ. 7.8.8.4) γίνεται:

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{E_0 e^{ik\left[\left(r_{s0}+r_0\right)-\omega t\right]}}{\left(r_{s0} + r_0\right)}\int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2}du\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} e^{i\pi\upsilon^2/2}d\upsilon \tag{7.8.8.6}$$

όπου: $E_u = \dfrac{E_0}{\left(r_{s0} + r_0\right)}e^{ik\left[\left(r_{s0}+r_0\right)-\omega t\right]}$ είναι η τιμή του μη εμποδιζόμενου μετ. κύματος του διαδιδόμενου κατά μήκος του οπτικού άξονα SOP στον ίδιο χρόνο t.

Τότε για το καθένα από τα ολοκληρώματα της (σχ. 7.8.8.6) θα έχουμε:

$$\int_{q_1}^{q_2} F\left(q\right)dq = \int_{q_1}^{0} F\left(q\right)dq + \int_{0}^{q_2} F\left(q\right)dq = \int_{0}^{q_2} F\left(q\right)dq - \int_{0}^{q_1} F\left(q\right)dq \tag{7.8.8.7}$$

Αλλά:

$$\int_0^q e^{\frac{i\pi q^2}{2}}dq = \int_0^q\left[\cos\frac{\pi q^2}{2} + i\sin\frac{\pi q^2}{2}\right]dq = C\left(q\right) + iS\left(q\right) \tag{7.8.8.8}$$

όπου:

$$C\left(q\right) = \int_0^q \cos\frac{\pi q^2}{2}dq \ , \quad S\left(q\right) = \int_0^q \sin\frac{\pi q^2}{2}dq \tag{7.8.8.9}$$

είναι τα λεγόμενα ***ολοκληρώματα Fresnel (Fresnel integrals)*** των οποίων όμως ο προσδιορισμός γίνεται αριθμητικά. Τιμές των ολοκληρωμάτων αυτών, που θ' απο-

τελέσουν τη βάση επίλυσης προβλημάτων περίθλασης Fresnel από περιθλώντα στοιχεία τετραγωνικής ή ευθύγραμμης συμμετρίας για $q \in [0, 6.95]$ δίνονται στον (Πίν. 7.8.8.2). Στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4) αναφέρουμε τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων Fresnel καθώς και τον τρόπο υπολογισμού των αριθμητικών τους τιμών.

q	$C(q)$	$S(q)$	q	$C(q)$	$S(q)$
0.00	0.0000	0.0000	4.50	0.5261	0.4342
0.10	0.1000	0.0005	4.60	0.5673	0.5162
0.20	0.1999	0.0042	4.70	0.4914	0.5672
0.30	0.2994	0.0141	4.80	0.4338	0.4968
0.40	0.3975	0.0334	4.90	0.5002	0.4350
0.50	0.4923	0.0647	5.00	0.5637	0.4992
0.60	0.5811	0.1105	5.05	0.5450	0.5442
0.70	0.6597	0.1721	5.10	0.4998	0.5624
0.80	0.7230	0.2493	5.15	0.4553	0.5427
0.90	0.7648	0.3398	5.20	0.4389	0.4969
1.00	0.7799	0.4383	5.25	0.4610	0.4536
1.10	0.7638	0.5365	5.30	0.5078	0.4405
1.20	0.7154	0.6234	5.35	0.5490	0.4662
1.30	0.6386	0.6863	5.40	0.5573	0.5140
1.40	0.5431	0.7135	5.45	0.5269	0.5519
1.50	0.4453	0.6975	5.50	0.4784	0.5537
1.60	0.3655	0.6389	5.55	0.4456	0.5181
1.70	0.3238	0.5492	5.60	0.4517	0.4700
1.80	0.3336	0.4508	5.65	0.4926	0.4441
1.90	0.3944	0.3734	5.70	0.5385	0.4595
2.00	0.4882	0.3434	5.75	0.5551	0.5049
2.10	0.5815	0.3743	5.80	0.5298	0.5461
2.20	0.6363	0.4557	5.85	0.4819	0.5513
2.30	0.6266	0.5531	5.90	0.4486	0.5163
2.40	0.5550	0.6197	5.95	0.4566	0.4688
2.50	0.4574	0.6192	6.00	0.4995	0.4470
2.60	0.3890	0.5500	6.05	0.5424	0.4689
2.70	0.3925	0.4529	6.10	0.5495	0.5165
2.80	0.4675	0.3915	6.15	0.5146	0.5496
2.90	0.5624	0.4101	6.20	0.4676	0.5398
3.00	0.6058	0.4963	6.25	0.4493	0.4954
3.10	0.5616	0.5818	6.30	0.4760	0.4555
3.20	0.4664	0.5933	6.35	0.5240	0.4560
3.30	0.4058	0.5192	6.40	0.5496	0.4965
3.40	0.4385	0.4296	6.45	0.5292	0.5398
3.50	0.5326	0.4152	6.50	0.4816	0.5454
3.60	0.5880	0.4923	6.55	0.4520	0.5078
3.70	0.5420	0.5750	6.60	0.4690	0.4631
3.80	0.4481	0.5656	6.65	0.5161	0.4549
3.90	0.4223	0.4752	6.70	0.5467	0.4915
4.00	0.4984	0.4204	6.75	0.5302	0.5362
4.10	0.5738	0.4758	6.80	0.4831	0.5436
4.20	0.5418	0.5633	6.85	0.4539	0.5060
4.30	0.4494	0.5540	6.90	0.4732	0.4624
4.40	0.4383	0.4622	6.95	0.5207	0.4591

(Πίν. 7.8.8.2)

Επομένως από τις (σχ. 7.8.8.7,8) θα έχουμε:

$$\int_0^{q_2} F(q)dq - \int_0^{q_1} F(q)dq = \left[C(q_2)+iS(q_2)\right]-\left[C(q_1)+iS(q_1)\right]=\left[C(q)+iS(q)\right]_{q_1}^{q_2} \quad (7.8.8.10)$$

όπου η τελευταία σχέση ισχύει πανομοιότυπα για τις ανεξάρτητες μεταβλητές u και υ. Επομένως με τη βοήθειά τους η (σχ. 7.8.8.6) γράφεται:

$$E_P = \frac{E_u}{2}\left[C(u)+iS(u)\right]_{u_1}^{u_2}\left[C(\upsilon)+iS(\upsilon)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \quad (7.8.8.11)$$

και μας δίνει την ένταση του ηλ. πεδίου E_P σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα, που οφείλεται στην περίθλαση στην περίθλαση Fresnel από ένα ορθογώνιο άνοιγμα, όταν αυτό φωτίζεται από ένα σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος.

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε την ένταση του ηλ. πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο ενός επιπέδου το οποίο είναι κάθετο στο P, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Αντί της μετακίνησης του P, το τελευταίο μένει σταθερό και μετακινούμε πάνω στο επίπεδο του ορθογωνίου ανοίγματος το σ.σ. xOy στη θέση που έπρεπε να μετακινηθεί το P. Με αυτό τον τρόπο μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των: x_1, x_2 ; y_1, y_2 προς το θετικότερο ή το αρνητικότερο. Επομένως και τα ζεύγη των u_1, u_2 ; υ_1, υ_2 τα οποία αντικαθιστούμε στη (σχ. 7.8.8.11) προκειμένου να υπολογίσουμε το E_P στη νέα θέση. Κατά τη μετακίνηση του xOy μεταβάλλεται το r_0 αλλά στοιχειωδώς, γεγονός που δεν επηρεάζει τη νέα τιμή του E_P. Για τον τρόπο αυτό υπολογισμού του πεδίου θα ήταν πολύ καλύτερο αντί από το σφαιρικό, το περιθλόν άνοιγμα να φωτίζεται από επίπεδο μετ. κύματος. Τότε οι σχέσεις μετασχηματισμού

για $r_{s0} \to \infty$, επειδή: $q = z\sqrt{\dfrac{2(r_{s0}+r_0)}{\lambda r_{s0} r_0}} = z\sqrt{\dfrac{2(1+r_0/r_{s0})}{\lambda r_0}} = z\sqrt{\dfrac{2}{\lambda r_0}}$ γράφονται:

$$u \to x\sqrt{\frac{2}{\lambda r_0}} \quad , \quad \upsilon \to y\sqrt{\frac{2}{\lambda r_0}} \quad (7.8.8.12)$$

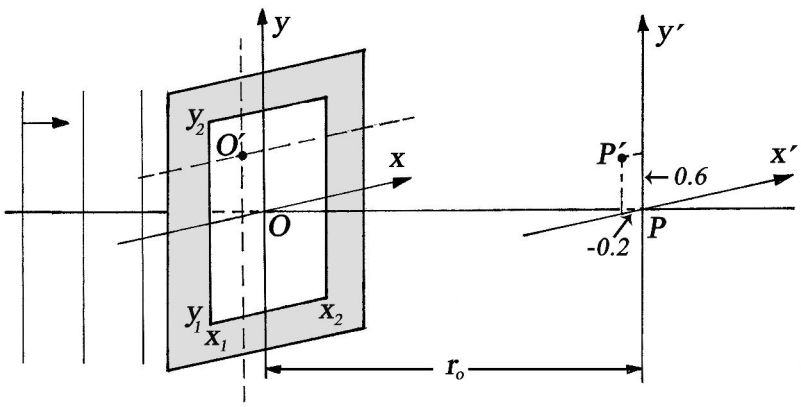
Τελικά για να υπολογίσουμε την ένταση I_P του φωτός στα διάφορα σημεία P, χρησιμοποιούμε τη σχέση: $I_P = E_P \cdot E_P^*$, όπου το πεδίο E_P δίνεται από τη (σχ. 7.8.8.11). Αποδεικνύεται τότε (βλ. Άσκ. 19: Λυμένη) ότι:

$$I_P = \frac{I_u}{4}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}\left\{\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]^2+\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]^2\right\} \quad (7.8.8.13)$$

όπου I_u η ένταση του φωτός του ανεμπόδιστου μετ. κύματος στο σημείο P.

Παράδειγμα 1

Διάφραγμα που περιλαμβάνει ένα ορθογώνιο άνοιγμα οι διαστάσεις του οποίου είναι $\Delta x = 2\text{mm}, \Delta y = 4\text{mm}$, φωτίζεται (Σχ. 7.8.8.3) από επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 500\text{nm}$. Ένα σημείο P (στο σ.σ. x', y') βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα (καθέτου στο κέντρο O του ανοίγματος) και απέχει από το άνοιγμα απόσταση $OP = r_0 = 4\text{m}$. α) Ν' αποδειχθεί ότι το σημείο P βρίσκεται σε περιοχή περίθλασης Fresnel. β) Ποιος είναι ο λόγος I_P/I_u στη θέση P για το περιθλώμενο πεδίο. γ) Ποιος είναι ο λόγος I_P/I_u του πεδίου στη θέση: $(x', y') = (-0.2, 0.6)$ του επιπέδου που είναι κάθετο στον κεντρικό άξονα και περνάει από το σημείο P. δ) Ποια ακριβώς θα είναι η ένταση του φωτός στο σημείο P για την περίπτωση που οι πλευρές του ορθογωνίου ανοίγματος απομακρύνονται στο άπειρο (ανεμπόδιστη διάδοση).



(Σχ. 7.8.8.3)

- α) Για να βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $r_0 < d^2/\lambda$ όπου $r_0 = 4\text{m}$ και $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ η μέγιστη διάσταση του ορθογωνίου ανοίγματος. Βρίσκουμε: $d^2 = 20\text{m}^2$ και για $\lambda = 0.5\times10^{-3}\text{mm}$ θα έχουμε τελικά: $\left(d^2/\lambda\right) = 40\text{m} > r_0$. Επομένως βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel.

β) Οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ των συντεταγμένων $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ και των αντίστοιχων $(u_1, u_2), (\upsilon_1, \upsilon_2)$, όταν το περιθλόν άνοιγμα φωτίζεται από επίπεδο μετ. κύματος, δίνονται από τις (σχ. 7.8.8.12): $u \to x\sqrt{2/\lambda r_0}$, $\upsilon \to y\sqrt{2/\lambda r_0}$. Και

για $r_0 = 4\text{m}$, $\lambda = 0.5\times10^{-3}\text{mm}$ βρίσκουμε: $\sqrt{2/\lambda r_0} = 1$. Επομένως: $u \to x$ και $\upsilon \to y$ (με τα u,υ να είναι αδιάστατα μεγέθη). Οπότε: $u_1 = -1,\ u_2 = 1,\ \upsilon_1 = -2,\ \upsilon_2 = 2$. Και από τον (Πίν. 7.8.8.2) μας δίνονται οι τιμές των $C(\ ), S(\ )$. Θα έχουμε:

$$C(u_1) = C(-1) = -C(1) = -0.7799 \qquad C(\upsilon_1) = C(-2) = -C(2) = -0.4882$$
$$C(u_2) = C(1) = 0.7799 \qquad C(\upsilon_2) = C(2) = 0.4882$$
$$S(u_1) = S(-1) = -S(1) = -0.4383 \qquad S(\upsilon_1) = S(-2) = -S(2) = -0.3434$$
$$S(u_2) = S(1) = 0.4383 \qquad S(\upsilon_2) = S(2) = 0.3434$$

Και αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στη (σχ. 7.8.8.13) βρίσκουμε: $I_P = 1.14 I_u$.

γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε το περιθλώμενο πεδίο στο σημείο $P'(-0.2, 0.6)$ στο επίπεδο το κάθετο στο P στην απόσταση $r_0 = 4\text{m}$. Ισοδύναμα – όπως ήδη αναφέραμε – η τιμή του θα είναι αυτή στο P αλλά με το σ.σ. x, y μετατοπισμένο στη θέση $(-0.2, 0.6)$ ως προς το αρχικό. Τότε τα $u_1, u_2, \upsilon_1, \upsilon_2$ μεταβάλλονται ως εξής: $u_1 = -0.8,\ u_2 = 1.2,\ \upsilon_1 = -2.6,\ \upsilon_2 = 1.4$. Και κατόπιν από τον (Πίν. 7.8.8.2) τα $C(\ ), S(\ )$ βρίσκουμε ότι έχουν τις τιμές:

$$C(u_1) = C(-0.8) = -C(0.8) = -0.7230 \qquad C(\upsilon_1) = C(-2.6) = -C(2.6) = -0.3890$$
$$C(u_2) = C(1.2) = 0.7154 \qquad C(\upsilon_2) = C(1.4) = 0.5431$$
$$S(u_1) = S(-0.8) = -S(0.8) = -0.2493 \qquad S(\upsilon_1) = S(-2.6) = -S(2.6) = -0.5500$$
$$S(u_2) = S(1.2) = 0.6234 \qquad S(\upsilon_2) = S(1.4) = 07135$$

Οπότε αντικαθιστώντας τις παραπάνω στη (σχ. 7.8.8.13) η ένταση του φωτός θα έχει την τιμή: $I'_P = 1.7472 I_u$.

δ) Με τη βοήθεια των (σχ. 4.3,4) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 4) θα έχουμε: $C(-q) = -C(q)$ και $S(-q) = -S(q)$. Δηλ. οι $C(q)$ και $S(q)$ είναι περιττές συναρτήσεις. Γνωρίζουμε επίσης από τον ολοκληρωτικό λογισμό ότι:

$\int_0^\infty \cos ax^2 dx = \int_0^\infty \sin ax^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$. Άρα για $a = \pi/2$ βρίσκουμε:

$\int_0^\infty \cos ax^2 dx = \int_0^\infty \sin ax^2 dx = 1/2$. Οπότε τα ολοκληρώματα Fresnel για $q \to \pm\infty$ θα είναι:

$C(u_2, \upsilon_2 \to \infty) = 1/2$ $C(u_1, \upsilon_1 \to -\infty) = -1/2$ $S(u_2, \upsilon_2 \to \infty) = 1/2$ $S(u_1, \upsilon_1 \to -\infty) = -1/2$.

Επομένως από τη (σχ. 7.8.8.13) θα έχουμε:

$I_P = \frac{I_u}{4}\left\{\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}\left\{\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$. Και τελικά: $I_P = I_u$.

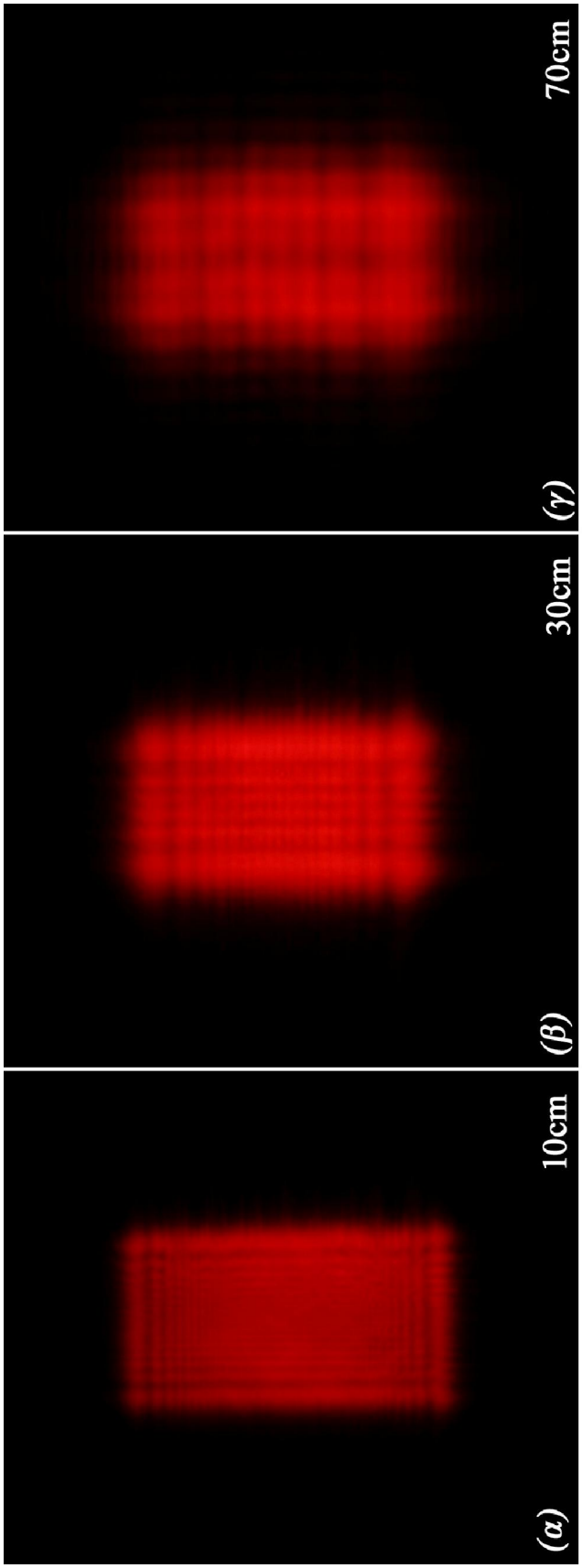
Δηλ. αποδεικνύεται το αυτονόητο, ότι η ένταση του φωτός στο σημείο P, θα είναι αυτή του ανεμπόδιστα διαδιδόμενου επιπέδου μετ. κύματος .

Σημείωση

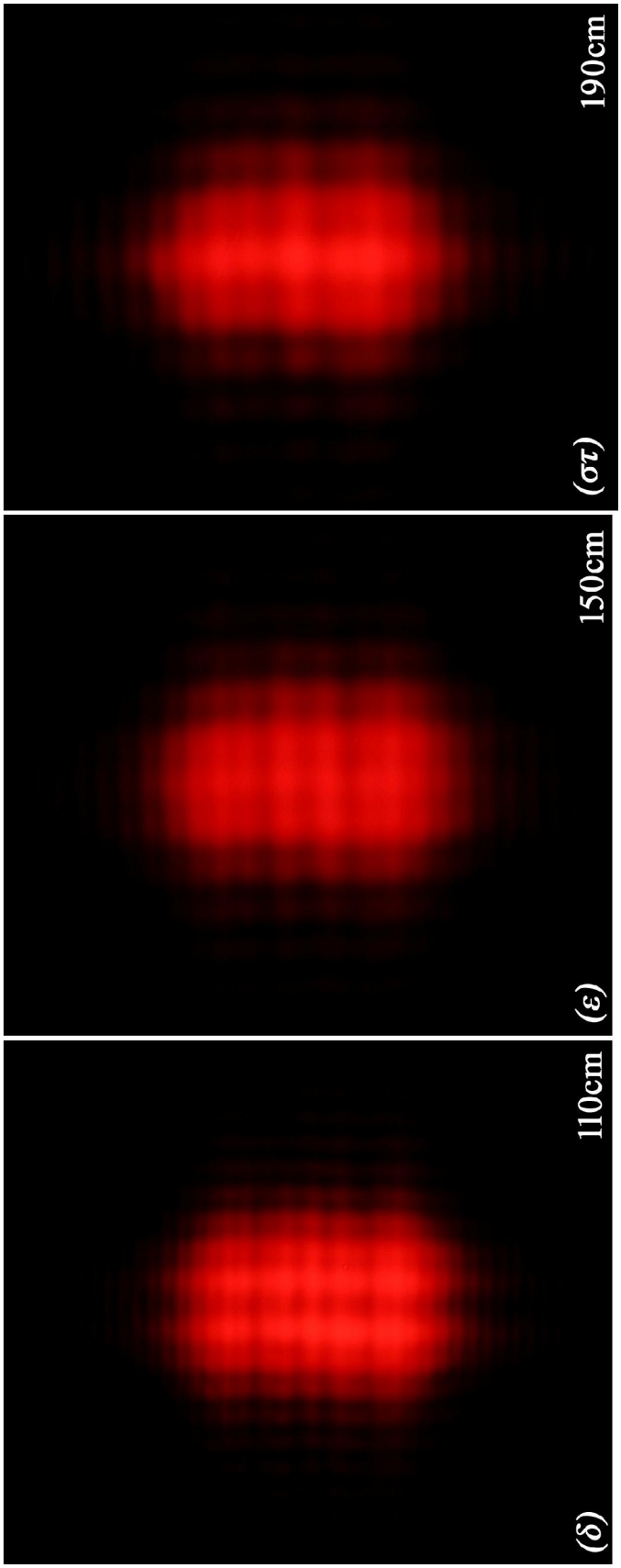
Θα μπορούσαμε βέβαια ν' αμφισβητήσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα, με βάση το γεγονός ότι για μεγάλες διαστάσεις του ορθογωνίου ανοίγματος δεν ισχύουν πλέον οι συνθήκες περίθλασης Fresnel. Κατ' αρχή η άποψη αυτή μπορεί να γίνει αποδεκτή. Αλλά: α) Για τα κυματίδια που εκπέμπονται από όλο και μεγαλύτερες αποστάσεις σε σχέση με το κέντρο O του ορθογωνίου ανοίγματος, ο παράγοντας κλίσης $\kappa(\theta)$ γίνεται όλο και πιο μικρός και β) Οι αποστάσεις τους από το P γίνονται μεγαλύτερες. Επομένως τα πλάτη των κυματιδίων που συμβάλλουν στο P από περιοχές μακριά από το κέντρο, είναι πάρα πολύ μικρά. Οπότε και οι συνεισφορές τους στη διαμόρφωση του πλάτους του ηλ. πεδίου στο σημείο αυτό αμελητέα. Δηλ. από ένα σημείο και μετά οι διαστάσεις του ορθογωνίου ανοίγματος δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στην τιμή του πλάτους των πεδίων και κατά προέκταση
στην ένταση του φωτός του προτύπου περίθλασης Fresnel. Πράγματι ακόμη και για μικρές γωνίες (της τάξης των $1^0 - 2^0$) με τις οποίες φαίνεται το περιθλόν άνοιγμα από απόσταση τυπικά 1-2m η τιμή των $q : u, \upsilon$ είναι πολύ μεγάλη με συνέπεια τα $C(q), S(q)$ να τείνουν στη οριακή τιμή του $\pm 1/2$.

Στις (Εικ. 7.8.8.4) βλέπουμε τα πρότυπα περίθλασης που προέρχονται από ένα ορθογώνιο άνοιγμα διαστάσεων $(\Delta x \times \Delta y) = (0.25 \times 0.5)\,\text{mm}$, όταν το τελευταίο φωτίζεται απ' ευθείας από μια δέσμη Laser He-Ne 5mW μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Οι αποστάσεις από το περιθλόν άνοιγμα όπου και λαμβάνονται τα πρότυπα είναι κατά σειρά οι εξής: $r_0 = 10, 30, 70, 110, 150, 190, 230, 270, 350, 430, 500, 550\text{cm}$. Και επειδή η μέγιστη διάσταση του ανοίγματος είναι η $d = \sqrt{0.25^2 + 0.5^2} \simeq 0.559\text{mm}$, τότε ο λόγος d^2/λ θα έχει την τιμή των 493.8mm (περίπου μισό μέτρο). Η απόσταση αυτή από το περιθλόν άνοιγμα είναι και το όριο μεταξύ περίθλασης Fresnel και περίθλασης Fraunhofer. Η μετάβαση αυτή φαίνεται χαρακτηριστικά μεταξύ των διαδοχικών φωτογραφικών στιγμιότυπων των (Εικ. 7.8.8.4). Η μεγέθυνση για όλες τις φωτογραφίες είναι σχεδόν η ίδια. Γεγονός που απηχεί και τις χωρικές διαστάσεις των εκάστοτε προτύπων.

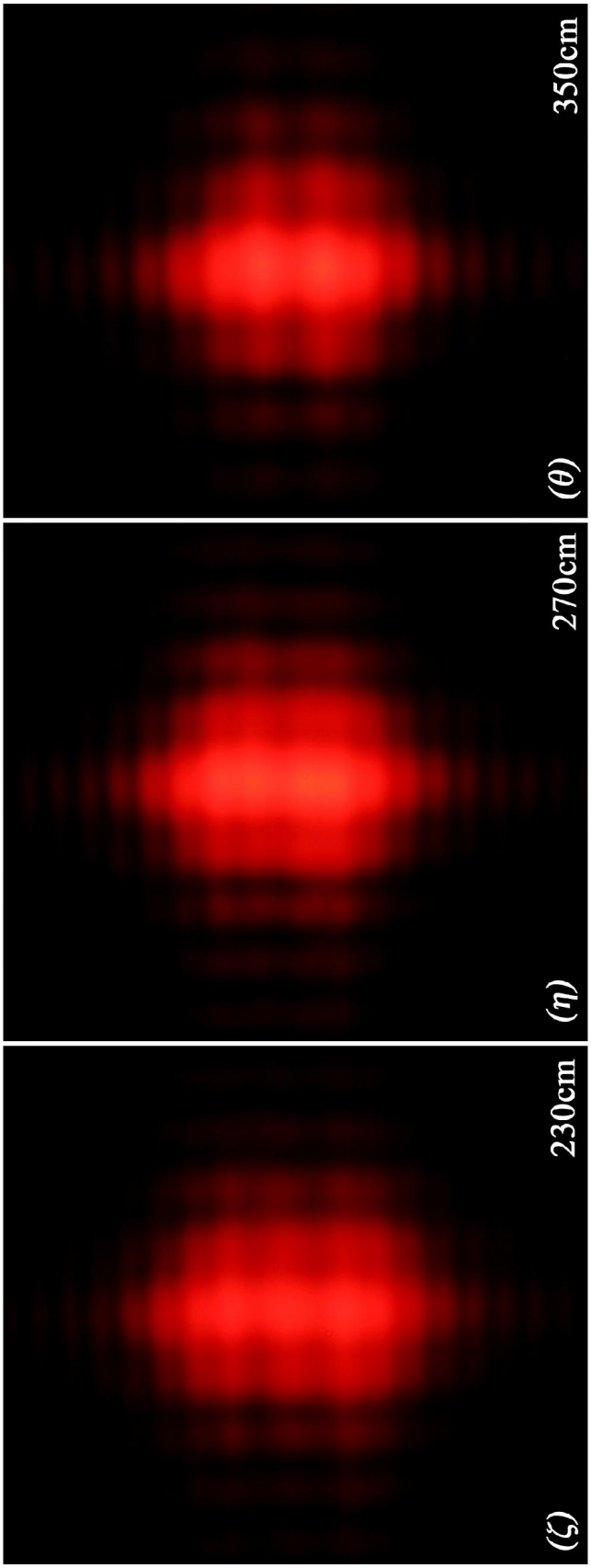
Αυτό το οποίο παρατηρούμε, είναι ότι το πρότυπο που αντιστοιχεί στην μικρότερη απόσταση των $r_0 = 10\text{cm}$ (Εικ. 7.8.8.4α), έχει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του περιθλόντος ανοίγματος και μόνο στο εσωτερικό του εμφανίζονται αυξομειώσεις της έντασης του φωτός. Το πρότυπο της (Εικ. 7.8.8.4ια) που έχει ληφθεί στην απόσταση των $r_0 = 500\text{cm}$ αντιστοιχεί όντως στην οριακή περιοχή της περίθλασης μεταξύ κοντινού και μακρινού πεδίου, συγκρινόμενο με τα ένθεν και ένθεν πρότυπα. Τέλος το πρότυπο της (Εικ. 7.8.8.4ιβ) έχει καθαρά τα χαρακτηριστικά



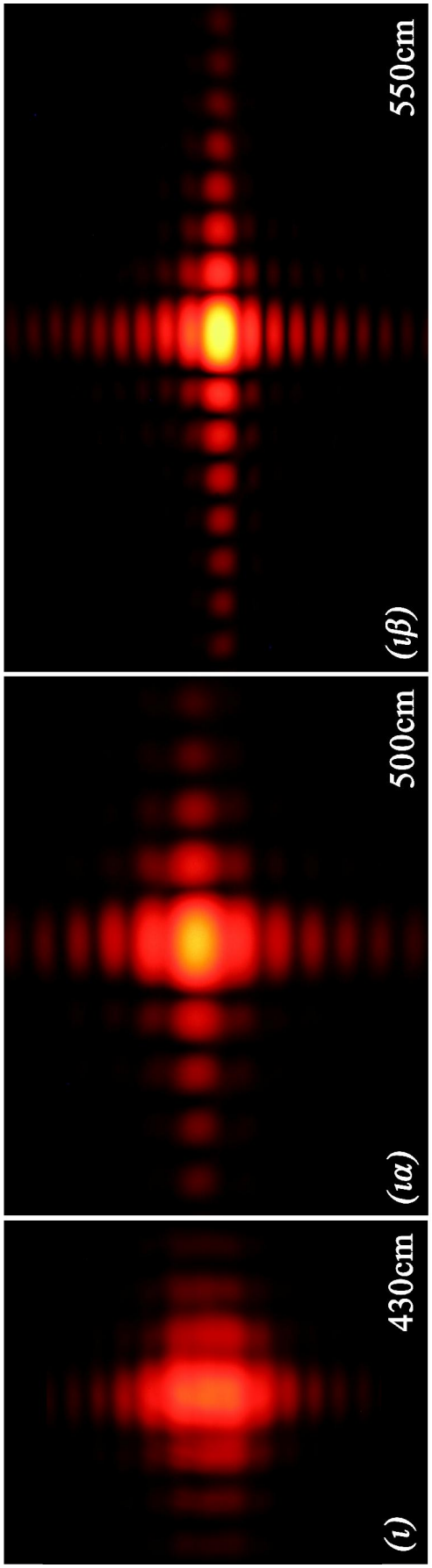
(7.8.8.4)(1)



(7.8.8.4)(2)



(7.8.8.4)(3)



(7.8.8.4)(4)

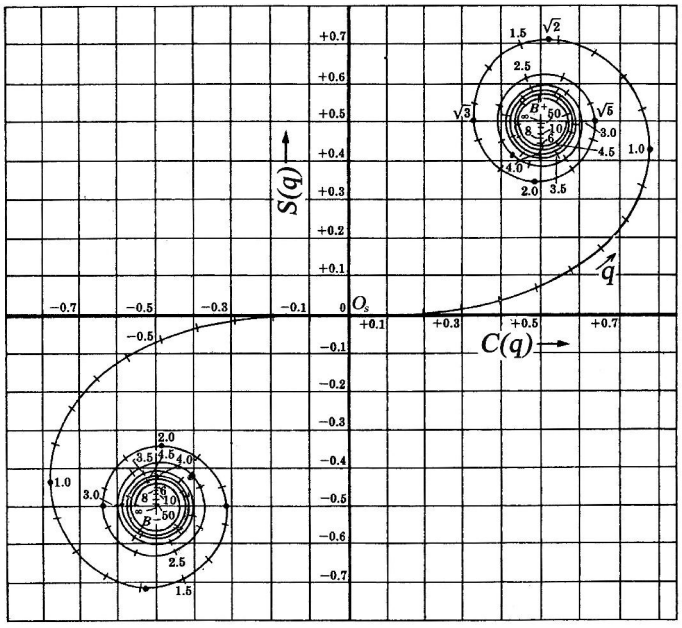
προτύπου περίθλασης Fraunhofer από ορθογώνιο άνοιγμα. Πράγματι στην απόσταση των $r_0 = 550\text{cm} > d^2/\lambda\ (= 500\text{cm})$. Δηλ. βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer.

Η σπείρα του Cornu και οι ιδιότητές της

Η σπείρα του Cornu* συνιστά μια γραφική παράσταση με βάση τα ολοκληρώματα Fresnel σε μιγαδικό επίπεδο. Στον πραγματικό άξονα τοποθετούμε (Σχ. 7.8.8.5) τα $C(q)$ και στον φανταστικό τα $S(q)$. Όπου τα $q, C(q), S(q)$ δίνονται στον (Πίν. 7.8.8.2). Οι συνιστώσες $C(q), S(q)$ είναι αυτές του διανύσματος (μιγαδικού αριθμού):

$$\mathbf{B}(q) = C(q) + iS(q) \tag{7.8.8.14}$$

όπου q τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη u ή υ. Θα δούμε στα αμέσως επόμενα ότι με τη βοήθεια της σπείρας Cornu, είναι δυνατόν με γραφικό τρόπο να επιλύσουμε



(Σχ. 7.8.8.5)

ποσοτικά ή ποιοτικά πλείστα όσα προβλήματα περίθλασης Fresnel, τα οποία διέπονται από ευθύγραμμη ή τετραγωνική συμμετρία. Η γραφική παράσταση της σπείρας χαρακτηρίζεται από ορισμένες ιδιότητες:

* A. Cornu: 'Journal de Physique' 3 5, 44 (1874).

α) Περνάει από την αρχή του σ.σ. O_s. Αυτό μπορεί ν' αποδειχτεί με τη βοήθεια του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4 (σχ. 4.3,4)) από όπου: για $q=0 \Rightarrow C(q)=0,\ S(q)=0$

β) Είναι συμμετρική σε σχέση με την αρχή του σ.σ. O_s, επειδή όπως έχουμε αποδείξει με τη βοήθεια και πάλι των ((σχ. 4.3,4) του ΠΑΡ/ΤΟΣ 4) :

$$C(-q)=-C(q) \text{ και } S(-q)=-S(q) \qquad (7.8.8.15)$$

Δηλ. οι $C(q)$ και $S(q)$ είναι περιττές συναρτήσεις.

γ) Το στοιχειώδες τμήμα ds αυτής της καμπύλης θα έχει μήκος:
$(ds)^2=\left[dC(q)\right]^2+\left[dS(q)\right]^2=\left\{\left[\frac{dC(q)}{dq}\right]^2+\left[\frac{dS(q)}{dq}\right]^2\right\}(dq)^2$. Όπου με τη βοήθεια των (σχ. 7.8.89) – που είναι οι ορισμοί των ολοκληρωμάτων Fresnel – βρίσκουμε:
$(ds)^2=\left[\cos^2\frac{\pi q}{2}+\sin^2\frac{\pi q}{2}\right](dq)^2=(dq)^2$ από την οποία βλέπουμε ότι:

$$s=q \qquad (7.8.8.16)$$

Που σημαίνει ότι το μήκος του τόξου της καμπύλης που μετρείται από την αρχή του σ.σ. O_s είναι η τιμή της παραμέτρου q (δηλ. της u ή της υ).

δ) Όσον αφορά την εφαπτόμενη της καμπύλης σ' ένα οποιοδήποτε σημείο της , θα δίνεται από τη σχέση:
$\tan\phi=\frac{dS(q)}{dC(q)}=\frac{dS(q)/dq}{dC(q)/dq}=\sin\frac{\pi q^2}{2}\Big/\cos\frac{\pi q^2}{2}=\tan\frac{\pi q^2}{2}$. Δηλ.

$$\phi=\frac{\pi q^2}{2} \qquad (7.8.8.17)$$

Από την τελευταία μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των μηκών του τόξου q για ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία της καμπύλης. Για $\phi=0$ (αρχή του σ.σ.) $q=0$. Για $\phi=\pi/2 \Rightarrow q=1$ (και συμμετρικά ως προς το O_s, το $q=-1$. Για $\phi=\pi \Rightarrow q=\sqrt{2}$. Για $\phi=3\pi/2 \Rightarrow q=\sqrt{3}$, για $\phi=2\pi \Rightarrow q=2$ κοκ.

ε) Όπως είχαμε αποδείξει στο προηγούμενο παράδειγμα:
$C(u_2,\upsilon_2\to\infty)=1/2$ $C(u_1,\upsilon_1\to-\infty)=-1/2$ $S(u_2,\upsilon_2\to\infty)=1/2$ $S(u_1,\upsilon_1\to-\infty)=-1/2$.
Δηλ. τελικά οι δύο συμμετρικοί κλάδοι της καμπύλης Cornu θα τείνουν ασυμπτωτικά στα σημεία: $B^+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $B^-\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Επίλυση προβλημάτων περίθλασης Fresnel με τη βοήθεια της σπείρας Cornu

Αποδείξαμε ότι η ένταση του ηλ. πεδίου E_P κατά την περίθλαση Fresnel από ένα ορθογώνιο άνοιγμα δίνεται από τη (σχ. 7.8.8.11):
$E_P = \frac{E_u}{2}\left[C(u)+iS(u)\right]_{u_1}^{u_2}\left[C(\upsilon)+iS(\upsilon)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}$, όπου έξω από τον όρο $E_u/2$ συνίσταται από δύο πολλαπλασιαζόμενους όρους της μορφής: $\left[C(q)+iS(q)\right]_{q_1}^{q_2}$ με $q \equiv u,\upsilon$. Ο πρώτος από αυτούς τους όρους (για $q \to u_1, u_2$) γράφεται αναλυτικά:
$\left[C(u)+iS(u)\right]_{u_1}^{u_2} = \left[C(u_2)+iS(u_2)\right]-\left[C(u_1)+iS(u_1)\right] = \mathbf{B}_2(u)-\mathbf{B}_1(u)$ με βάση τη γραφή της (σχ. 7.8.814). Δηλ. ο ένας από τους όρους του γινομένου που εκφράζει το πεδίο E_P στο σημείο P, θα δίνεται σαν η διαφορά των δύο διανυσμάτων (μιγαδικών αριθμών επί της σπείρας Cornu) $\mathbf{B}_2(u), \mathbf{B}_1(u)$. Οπότε:

$$\mathbf{B}_{12}(u) = \mathbf{B}_2(u)-\mathbf{B}_1(u) = \mathbf{B}_2(u)+\left[-\mathbf{B}_1(u)\right] \qquad (7.8.8.18)$$

Και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο για τον δεύτερο παράγοντα του γινομένου:

$$\mathbf{B}_{12}(\upsilon) = \mathbf{B}_2(\upsilon)-\mathbf{B}_1(\upsilon) = \mathbf{B}_2(\upsilon)+\left[-\mathbf{B}_1(\upsilon)\right] \qquad (7.8.8.19)$$

Όπου $\mathbf{B}_{12}(q)$ οι φάσορες που προκύπτουν από τη διανυσματική άθροιση των φασόρων $\mathbf{B}_2(q), \mathbf{B}_1(q)$ στο μιγαδικό επίπεδο συναρτήσει του μήκους q επί της σπείρας Cornu. Το μήκος των $\mathbf{B}_{12}(q)$ μετρούμενο στο μιγαδικό επίπεδο με έναν κανόνα (με βάση την αναγωγή του σε σχέση με τη βαθμονόμηση της κλίμακας του σ.σ.) θα είναι το μέτρο του φάσορα: $\left|\mathbf{B}_{12}(q)\right|$. Με συνδυασμό τώρα των (σχ. 7.8.8.11,18,19)

$$I_P = \frac{I_u}{4}\left|\mathbf{B}_{12}(u)\right|^2\left|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)\right|^2 \qquad (7.8.8.20)$$

Επομένως με μετρήσεις στο διάγραμμα της σπείρας Cornu μπορούμε τελικά να υπολογίσουμε την ένταση του φωτός στο σημείο P και κατά προέκταση σ' οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου του καθέτου στο P.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε το εξής σημαντικό που αφορά τα μήκη των τόξων επί της καμπύλης Cornu και το μήκος των φασόρων δηλ. τα' αντίστοιχα μέτρα τους. το εκάστοτε μήκος του τόξου πάνω στη σπείρα εξαρτάται από τα $\Delta u = u_2 - u_1$ και $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$. Και επειδή τα u,υ εξαρτώνται κατ' ακολουθία από τα x, y αντίστοιχα που είναι σταθερά για το εκάστοτε πρόβλημα, τότε και το μήκος του τόξου θα είναι σταθερό. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με τους φάσορες, που το μέτρο τους θα εξαρτάται από την εκάστοτε θέση των σημείων που θέλουμε να υπολογίσουμε την

ένταση του φωτός του περιθλώμενου πεδίου σε διάφορες θέσεις στο επίπεδο το κάθετο στο σημείο P. Τότε θ' αλλάζουν και τα μέτρα των $\mathbf{B}_{12}(q)$, όταν η σταθερού μήκους καμπύλη $\Delta q = q_2 - q_1$ διολισθαίνει κατά μήκος της σπείρας.

Παράδειγμα 2

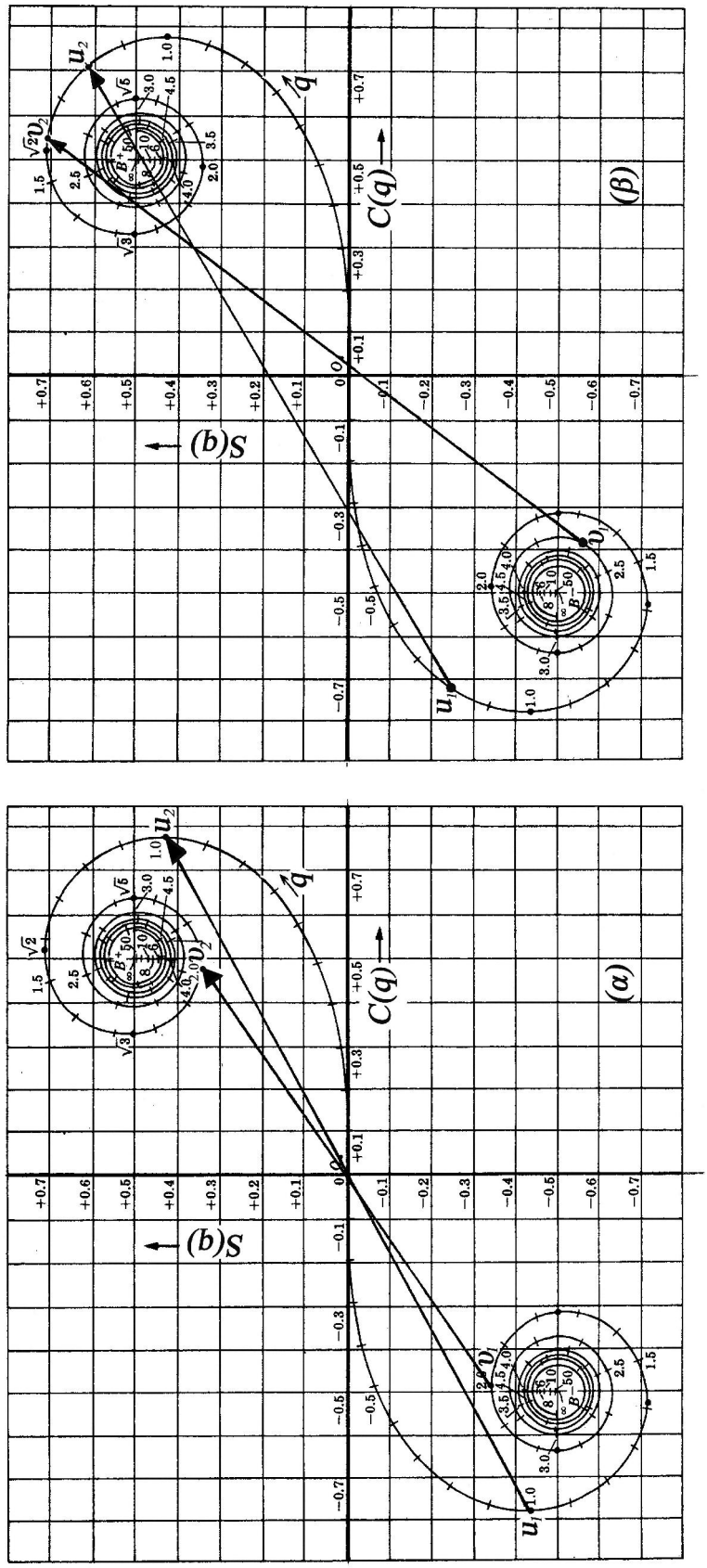
Να επιλυθούν τα επί μέρους προβλήματα του Παραδείγματος 1 με τη βοήθεια της σπείρας Cornu.

- α) Δέχεται την ίδια επίλυση όπως και στο Παράδειγμα 1.

β) Στην προκειμένη περίπτωση, του υπολογισμού της έντασης του φωτός στο σημείο P του οπτικού άξονα, που απέχει από το κέντρο O του ορθογωνίου ανοίγματος απόσταση $r_0 = 4\text{m}$ θα προσδιορίσουμε: 1) Το μήκος του φάσορα $\mathbf{B}_{12}(u)$ (το μέτρο του), που αντιστοιχεί στο μήκος $\Delta u = u_2 - u_1$ (Σχ. 7.8.8.6α) (με $u_2 = 1$ και $u_1 = -1$) της καμπύλης της σπείρας Cornu και 2) Το μήκος του φάσορα $\mathbf{B}_{12}(\upsilon)$ που αντιστοιχεί (Σχ. 7.8.8.6α) στο μήκος $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ (με $\upsilon_2 = 2$ και $\upsilon_1 = -2$). Μετρώντας με ένα κανόνα μεταξύ των ζευγών αυτών των σημείων και κάνοντας αναγωγή στην κλίμακα που είναι εγγεγραμμένη η σπείρα βρίσκουμε τελικά: $|\mathbf{B}_{12}(u)| = 1.788$ και $|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)| = 1.1945$. Τότε με τη βοήθεια της (σχ.7.8.8.20) βρίσκουμε: $I_P = 1.14 I_u$.

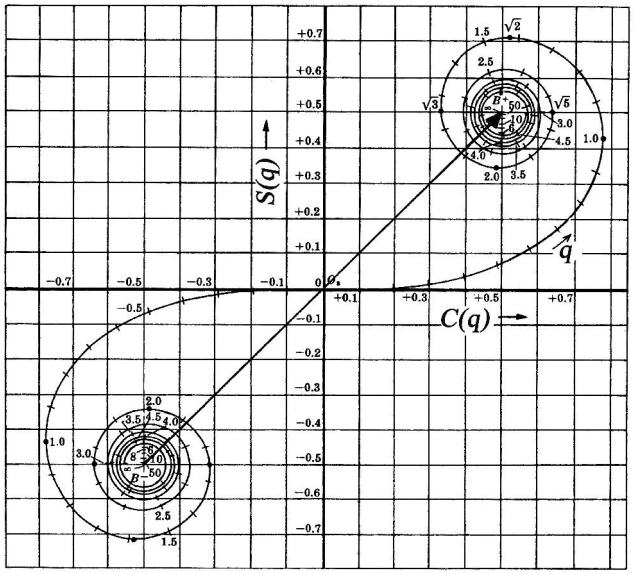
γ) Στην προκειμένη περίπτωση θέλουμε να προσδιορίσουμε την ένταση του φωτός $I_{P'}$ στο σημείο P' εκτός του οπτικού άξονα, με συντεταγμένες $P'(-0.2, 0.6)$, σε επίπεδο που απέχει από το κέντρο O του ορθογωνίου ανοίγματος $r_0 = 4\text{m}$. Για το λόγο αυτό: 1) Υπολογίζουμε το μήκος του φάσορα $\mathbf{B}_{12}(u)$ (το μέτρο του), που αντιστοιχεί στο μήκος $\Delta u = u_2 - u_1$ (με $u_2 = 1.2$ και $u_1 = -0.8$) της καμπύλης της σπείρας Cornu και 2) Το μήκος του φάσορα $\mathbf{B}_{12}(\upsilon)$ (το μέτρο του), που αντιστοιχεί (Σχ. 7.8.8.6β) στο μήκος $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ (με $\upsilon_2 = 1.4$ και $\upsilon_1 = -2.6$). Μετρώντας και πάλι με τον κανόνα μεταξύ των ζευγών αυτών των σημείων και κάνοντας αναγωγή στην κλίμακα που είναι εγγεγραμμένη η σπείρα, βρίσκουμε τελικά: $|\mathbf{B}_{12}(u)| = 1.6891$ και $|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)| = 1.5826$. Και από τη σχέση: $I_{P'} = (I_u/4)|\mathbf{B}_{12}(u)|^2 |\mathbf{B}_{12}(\upsilon)|^2$ βρίσκουμε τελικά: $I_{P'} = 1.769 I_u$.

δ) Στην περίπτωση αυτή, οι φάσορες για τα u, υ θα είναι οι ίδιοι (δηλ. με $x_1 \to \infty, x_2 \to \infty$ και $y_1 \to \infty, y_2 \to \infty$). Εκκινούν από το σημείο $B^-\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ της σπείρας Cornu και καταλήγουν στο σημείο $B^+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Σχ. 7.8.8.7). Τα μήκη τους (μέτρα) – που είναι τα ίδια – μετρούμενα με κανόνα και με τις αναγωγές στην



(Σχ. 7.8.8.6)

κλίμακα της σπείρας μας δίνουν: $\left|\mathbf{B}_{12}(u)\right| = 1.4228$ και $\left|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)\right| = 1.4228$. Οπότε από τη σχέση: $I_{P'} = (I_u/4)\left|\mathbf{B}_{12}(u)\right|^2\left|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)\right|^2$ βρίσκουμε: $I_P = 1.02 I_u \simeq I_u$. Τελικά διαπιστώνουμε ότι μεταξύ των αποτελεσμάτων του Παραδείγματος 1 (αναλυτικός υπο-



(Σχ. 7.8.87)

λογισμός των ζητούμενων) και του Παραδείγματος 2 (επίλυση με τη βοήθεια της σπείρας Cornu) υπάρχει πλήρης σχεδόν συμφωνία.

7.8.9 *Περίθλαση Fresnel από σχισμή ορισμένου πλάτους και απείρου μήκους*

Η επίλυση αυτού του προβλήματος, ανάγεται σ' αυτήν της περίθλασης από ορθογώνιο άνοιγμα. Εκεί όπου πλέον $y_1 \to -\infty, y_2 \to +\infty$ και $x_1 = d/2, x_2 = -d/2$ με $d = x_2 - x_1$ το πλάτος της σχισμής θεωρητικά απείρου μήκους (Σχ. 7.8.9.1). Και όσον αφορά το μετ. κύματος που φωτίζει τη σχισμή, αυτό θα μπορούσε να είναι σφαιρικό ή επίπεδο. Κατ' αρχή θα πρέπει να υπολογίσουμε την ένταση του ηλ. πεδίου E_P σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα OP, που περνάει από το κέντρο της σχισμής και απέχει από αυτή απόσταση $OP = r_0$. Η E_P κατά τα γνωστά δίνεται από τη (σχ. 7.8.8.11):

$$E_P = \frac{E_u}{2}\left[C(u) + iS(u)\right]_{u_1}^{u_2}\left[C(\upsilon) + iS(\upsilon)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \frac{E_u}{2}\mathbf{E}_{12}(u)\mathbf{E}_{12}(\upsilon) \qquad (7.8.9.1)$$

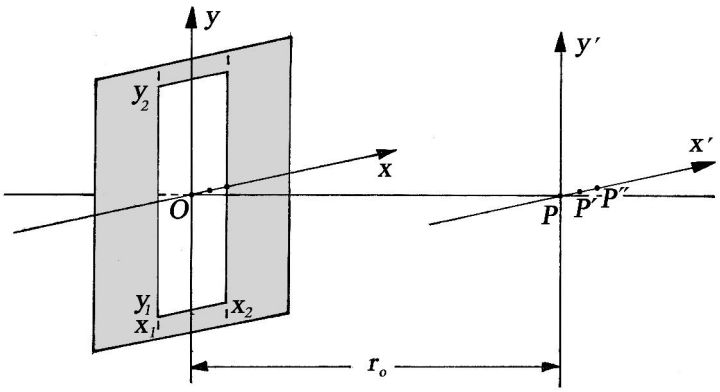
Θέλουμε τώρα να δούμε ποια είναι η συνεισφορά στο πεδίο E_P του δευτέρου όρου της τελευταίας σχέσης. Δηλ. του $\mathbf{E}_{12}(\upsilon)=\left[C(\upsilon)+iS(\upsilon)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}$ όπου βέβαια επειδή $y_1 \to -\infty, y_2 \to +\infty$ τότε και $\upsilon_1 \to -\infty, \upsilon_2 \to +\infty$. Θα έχουμε:

$$\mathbf{E}_{12}(\upsilon)=\left[C(\upsilon)+iS(\upsilon)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}=\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]+i\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+i\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=1+i$$

Αν τώρα ο τελευταίος γραφεί σε πολική μορφή: $(\alpha+i\beta)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{i\arctan(\beta/\alpha)}$ τότε βρίσκουμε: $\mathbf{E}_{12}(\upsilon)=\sqrt{2}e^{i(\pi/2)}$. Οπότε η (σχ. 7.8.9.1) θα πάρει τη μορφή:

$$E_P=\frac{E_u}{2}\mathbf{E}_{12}(u)\sqrt{2}e^{i(\pi/2)} \qquad (7.8.9.2)$$



(Σχ. 7.8.9.1)

Και επειδή η ένταση του φωτός I_P στο σημείο P δίνεται από τη σχέση $I_P=E_PE_P^*$, θα έχουμε τελικά:

$$I_P=\frac{I_u}{2}\mathbf{E}_{12}(u)\mathbf{E}_{12}^*(u)=\frac{I_u}{2}\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2 \qquad (7.8.9.3)$$

Που σημαίνει ότι για τη σχισμή αρκετά μεγάλου μήκους, η I_P είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης y. Τότε αναλυτικά η (σχ. 7.8.9.3) μπορεί να γραφεί:

$$I_P=\frac{I_u}{2}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\} \qquad (7.8.9.4)$$

Η τελευταία μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί για επίλυση προβλημάτων υπολογισμού της έντασης του φωτός, σε διάφορα σημεία του οπτικού άξονα ή γι' αυτά που βρίσκονται κατανεμημένα σ' επίπεδα κάθετα σε διάφορα σημεία του.

Παράδειγμα

(Ι) Σχισμή μεγάλου μήκους και πλάτους $d = x_2 - x_1 = 2.25\text{mm}$ είναι κατακόρυφη και φωτίζεται από ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος που το μ.κ. του είναι: $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Να υπολογιστεί η ένταση του φωτός σε τρία σημεία (P, P', P''). α) Το σημείο P βρίσκεται στον οπτικό άξονα και απέχει από τη σχισμή απόσταση $r_0 = 1\text{m}$. β) Το P' βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στο P, κατά μήκος άξονα παράλληλου προς τον Ox και σε απόσταση $x = +0.562\text{mm}$ από τον οπτικό άξονα. γ) Το P'' βρίσκεται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς σε απόσταση $x = +1.125\text{mm}$ στην ίδια με την προηγούμενη διεύθυνση. Το πρόβλημα να επιλυθεί με τις δύο μεθόδους: 1) Με τη χρησιμοποίηση της (σχ. 7.8.9.4) και 2) Με τη βοήθεια της σπείρας Cornu.

(ΙΙ) Τι διαφοροποιήσεις θα υπάρξουν για τις τιμές των εντάσεων στα τρία σημεία, όταν η σχισμή φωτιστεί από ένα σφαιρικό μετ. κύματος που προέρχεται από μία σημειακή πηγή που απέχει απόσταση $r_{s0} = 1.12\text{m}$ και εκπέμπει στο ίδιο μ.κ.

- (Ι) ***Φωτισμός της σχισμής με επίπεδο μετ. κύματος***

  (1) ***Αναλυτικός υπολογισμός με βάση τις τιμές των ολοκληρωμάτων Fresnel***

α) Ένταση του φωτός στο σημείο P του οπτικού άξονα για το οποίο $OP = r_0 = 1\text{m}$. Από την: $u = x\sqrt{2/\lambda r_0}$ για $r_0 = 10^3\,\text{mm}$ και $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ βρίσκουμε ότι η σχέση μετασχηματισμού είναι: $u = 1.777x$. Οπότε για $x_1 = -1.125\text{mm} \Rightarrow u_1 \simeq -2$ και για $x_2 = 1.125\text{mm} \Rightarrow u_2 \simeq 2$. Και από τον (Πίν. 7.8.82) θα έχουμε:

$C(u_1) = C(-2) = -C(2) = -0.4882 \quad C(u_2) = C(2) = 0.4882$

$S(u_1) = S(-2) = -S(2) = -0.3434 \quad S(u_2) = S(2) = 0.3434$

Οπότε με την αντικατάσταση αυτών των τιμών στη (σχ. 7.8.9.4) βρίσκουμε: $I_P = 0.712 I_u$.

β) Ένταση του φωτός στο σημείο P' σε απόσταση $r_0 = 1\text{m}$ αλλά στη θέση $x = +0.562\text{mm}$ παράλληλα προς τον άξονα Ox (δηλ. προς τα θετικά του). Για την περίπτωση αυτή: $x_2 = +0.562\text{mm} \Rightarrow u_2 \simeq 1$ επειδή είναι: $u = 1.777x$. Επίσης για $x_1 = -1.687(-1.125 - 0.56)\text{mm} \Rightarrow u_2 \simeq -3$. Και με τη βοήθεια του (Πίν. 7.8.8.2) βρίσκουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων Fresnel:

$C(u_1) = C(-3) = -C(3) = -0.6058 \quad C(u_2) = C(1) = 0.7799$

$S(u_1) = S(-3) = -S(3) = -0.4963 \quad S(u_2) = S(1) = 0.4383$

Οπότε με την αντικατάσταση αυτών των τιμών στη (σχ. 7.8.9.4) βρίσκουμε: $I_{P'} = 1.396 I_u$.

γ) Ένταση του φωτός στο σημείο P'' που βρίσκεται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής. Δηλ. στο σημείο που απέχει από το P απόσταση $PP'' = 1.25\text{mm}$ (κατά μήκος του $PP'P''$ του καθέτου στον οπτικό άξονα OP). Για

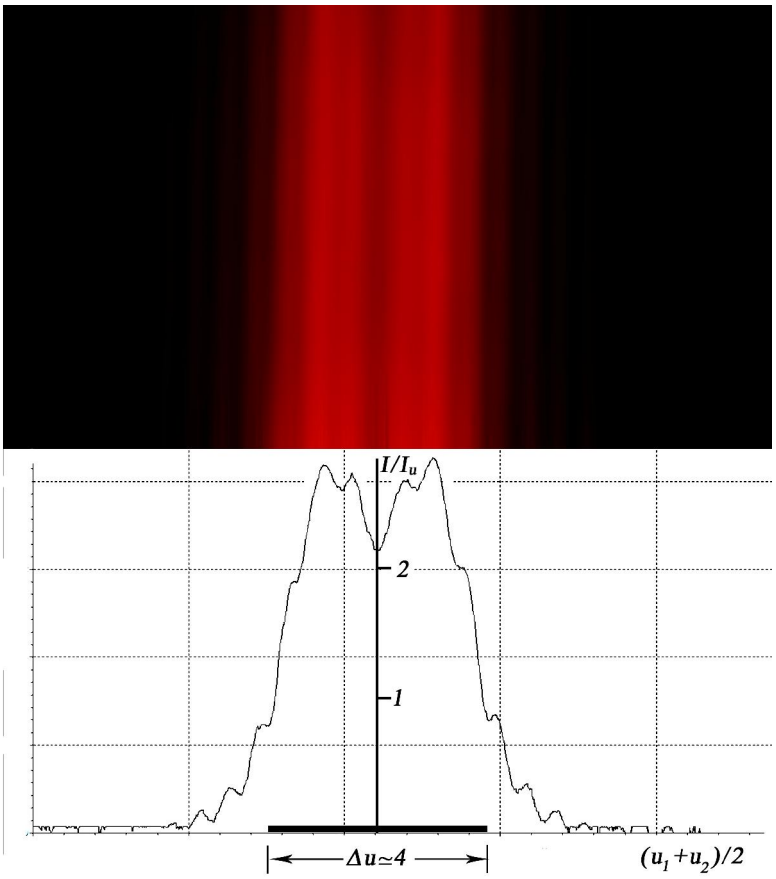
την περίπτωση αυτή $x_2 = 0\text{mm}$, οπότε με βάση την $u = 1.777x$ βρίσκουμε $u_2 = 0$. Και για $x_1 = -2.25\text{mm}$ θα έχουμε $u_1 \simeq -4$. Οπότε και πάλι με τη βοήθεια του (Πίν. 7.8.8.2) βρίσκουμε για τα ολοκληρώματα Fresnel:

$C(u_1) = C(-4) = -C(4) = -0.4984 \quad C(u_2) = C(0) = 0.000$

$S(u_1) = S(-4) = -S(4) = -0.4204 \quad S(u_2) = S(0) = 0.000$

Οπότε με την αντικατάσταση αυτών των τιμών στη (σχ. 7.8.9.4) βρίσκουμε: $I_{P''} = 0.212 I_u$.

Γίνεται εμφανές από την αλληλουχία των τιμών της έντασης του φωτός στα σημεία $P \to P' \to P''$ ότι το πρότυπο περίθλασης Fresnel στη θέση $r_0 = 1\text{m}$ και σε εύρος όσο περίπου τα όρια της σχισμής, παρουσιάζει στο κέντρο του ελάχιστο. Το πλήρες πρότυπο που προέκυψε από την πειραματική εφαρμογή των αριθμητικών δεδομένων του παραδείγματος φαίνεται στην (Εικ. 7.8.9.2). Μια λεπτομερής γραφι-

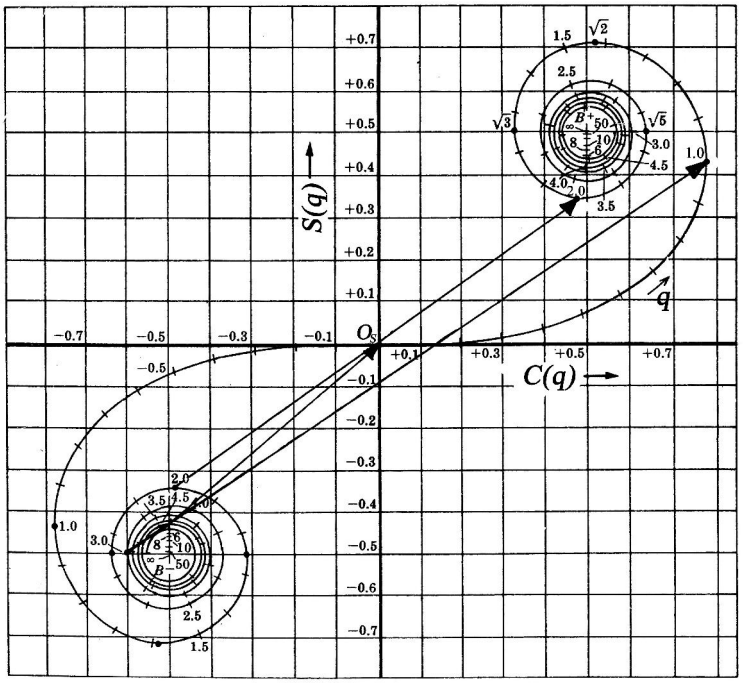


(Εικ. 7.8.9.2)

κή παράσταση της κανονικοποιημένης κατανομής (I/I_u) του προτύπου συναρτήσει του $(u_1 + u_2)/2$ φαίνεται στο κάτω μέρος της εικόνας. Όπου τα σημεία P, P', P'' αντιστοιχούν στις θέσεις $(u_1 + u_2)/2$: $0, -1, -2$.

(2) ***Υπολογισμός με τη βοήθεια της σπείρας Cornu***

Στην προκειμένη περίπτωση, του υπολογισμού με τη βοήθεια της σπείρας Cornu των κανονικοποιημένων εντάσεων I/I_u στα σημεία P, P', P'', χρησιμοποιούμε τη (σχ. 7.8.9.3): $I_P = (I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$. Επομένως για κάθε περίπτωση θα πρέπει να προσδιορίζουμε το μέτρο $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|$ των φασόρων $\mathbf{E}_{12}(u)$. Δηλ. το μήκος Δu που συνδέει τα εκάστοτε δύο σημεία u_1, u_2 όπου $\Delta u = u_2 - u_1$ το μήκος του τόξου της καμπύλης της σπείρας που τα συνδέει. Κατά τα γνωστά, καθώς μεταβάλλονται τα u_1, u_2 ενώ η διαφορά τους παραμένει σταθερή, δηλ. το τμήμα ορισμένου μήκους της σπείρας, τα μέτρα των φασόρων $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|$ θα έχουν διαφορετικές τιμές. Στο (Σχ. 7.8.9.3) έχουμε σχεδιάσει τους φάσορες για τις τρις περιπτώσεις: $P(-2,2)$, $P'(-3,1)$ και $P''(-4,0)$. Τα μήκη τους, αφού αναχθούν στην κλίμακα της σπείρας, μας δίνουν



(Σχ. 7.8.9.3)

τα μέτρα των φασόρων . Βρίσκουμε τελικά: $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|_P = 1.1899$, $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|_{P'} = 1.4142$ και $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|_{P''} = 0.207$. Και με βάση τη (σχ. 7.8.9.3): $(I/I_u)_P = 0.708$, $(I/I_u)_{P'} = 1.361$ και $(I/I_u)_{P''} = 0.207$.Οι τελευταίες τιμές των κανονικοποιημένων εντάσεων συγκρινόμενες με αυτές που υπολογίστηκαν με την προηγούμενη αναλυτική μέθοδο, διαφέρουν μόνο κατά λίγες μονάδες του εκατοστού.

(ΙΙ) ***Φωτισμός της σχισμής με σφαιρικό μετ. κύματος***

Έστω η περίπτωση του φωτισμού της σχισμής με σφαιρικό μετ. κύματος του ίδιου μ.κ. $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$, με τη σημειακή πηγή σε απόσταση από αυτήν $r_{s0} = 1.12\text{m}$. Τότε με τον υπολογισμό των συντεταγμένων u θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια των (σχ. 7.8.8.5): $u = x\sqrt{\dfrac{2(r_{s0}+r_0)}{\lambda r_{s0} r_0}}$, οπότε $\Delta u = \Delta x\sqrt{\dfrac{2(r_{s0}+r_0)}{\lambda r_{s0} r_0}}$. Και για: $\Delta x = 2.25\text{mm},\ r_0 = 1\times10^3\,\text{mm},\ r_{s0} = 1.12\times10^3\,\text{mm}\ \lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ βρίσκουμε: $\Delta u = 5.5$. Και γενικά: $u = 2.446x$. Οπότε πλέον προκειμένου να γίνουν οι υπολογισμοί του πεδίου στα σημεία P, P', P'' θα πρέπει να ξαναεπαναλάβουμε τη διαδικασία επίλυσης για τα ζεύγη τιμών u:

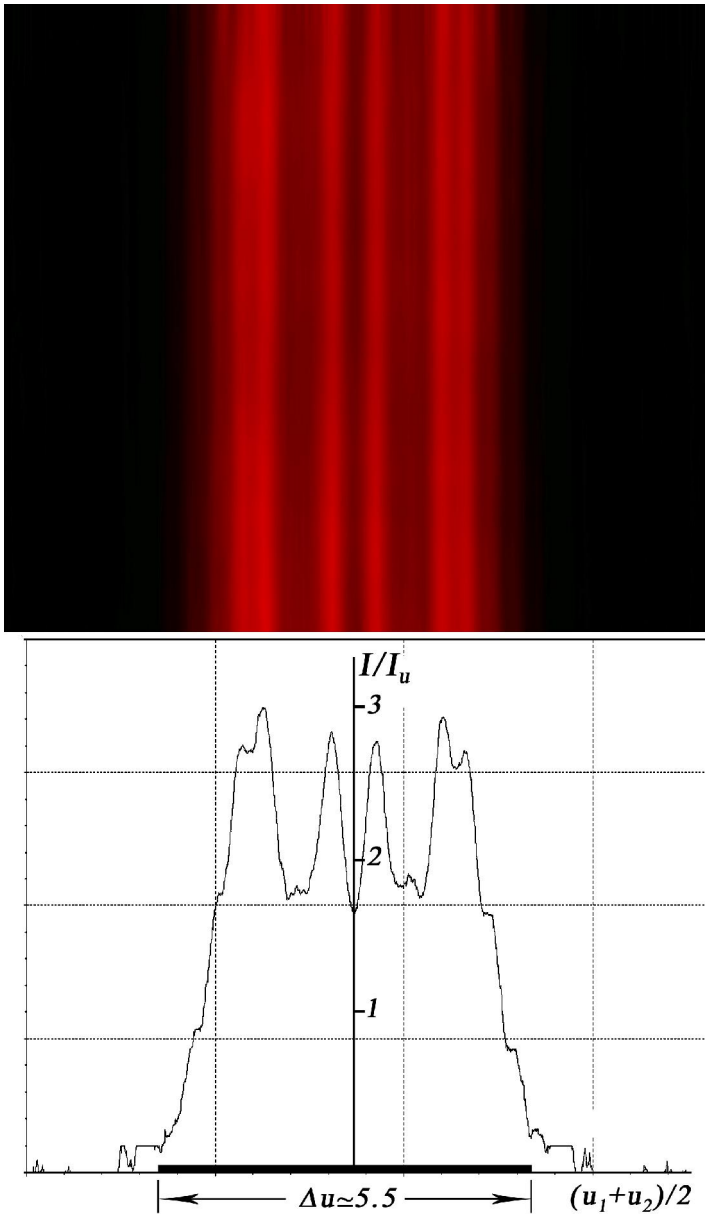
$P(u_1 = -2.75, u_2 = 2.75)$, $P'(u_1 = -4.125, u_2 = 1.375)$ και $P''(u_1 = -5.50, u_2 = 0.00)$. Και με τη βοήθεια της σπείρας Cornu βρίσκουμε: $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|_P = 1.162,\ \left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|_{P'} = 1.61$ και $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|_{P''} = 0.665$. Οπότε: $(I/I_u)_P = 0.675,\ (I/I_u)_{P'} = 1.296$ και $(I/I_u)_{P''} = 0.22$. Το πλήρες πρότυπο της κατανομής της έντασης του φωτός που προέκυψε από την πειραματική εφαρμογή των αριθμητικών δεδομένων του παραδείγματος, φαίνεται στην (Εικ. 7.8.9.4). Μια λεπτομερής γραφική παράσταση της κανονικοποιημένης κατανομής (I/I_u) του προτύπου συναρτήσει του $(u_1+u_2)/2$ φαίνεται στο κάτω μέρος της εικόνας. Όπου τα σημεία P, P', P'' αντιστοιχούν στις θέσεις $(u_1+u_2)/2$: $0, -1.375, -2.75$.

Προκειμένου τώρα να πάρουμε ένα πανομοιότυπο πρότυπο περίθλασης Fresnel με αυτό που προέκυψε με το φωτισμό της σχισμής μ'ένα επίπεδο μετ. κύματος, θα πρέπει να είναι $\Delta u = 4$. Επομένως από τη σχέση: $\Delta u = \Delta x\sqrt{\dfrac{2(r_{s0}+r_0)}{\lambda r_{s0} r_0}}$ λύνοντας ως προς r_{s0} βρίσκουμε: $r_{s0} = \dfrac{r_0}{(\lambda r_0/2)(\Delta u/\Delta x)^2 - 1}$.

Και για $\Delta u = 4$, $\Delta x = 2.25\text{mm}$, $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ και $r_0 = 1\times10^3\,\text{mm}$ βρίσκουμε τελικά: $r_{s0} = 1.777\text{m}$.

Μετάβαση από την περιοχή της περίθλασης Fresnel σ' αυτήν της περίθλασης Fraunhofer

Έχουμε αποδείξει (βλ. Άσκ. 1: Λυμένη) ότι αν d είναι η μέγιστη διάσταση ενός περιθλώντος ανοίγματος και λ το μ.κ. του φωτός που προσπίπτει σ' αυτό, τότε: Το πότε βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel ή Fraunhofer εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των d^2/λ και του r_0. Όπου r_0 η απόσταση από το εκάστοτε



(Εικ. 7.8.9.4)

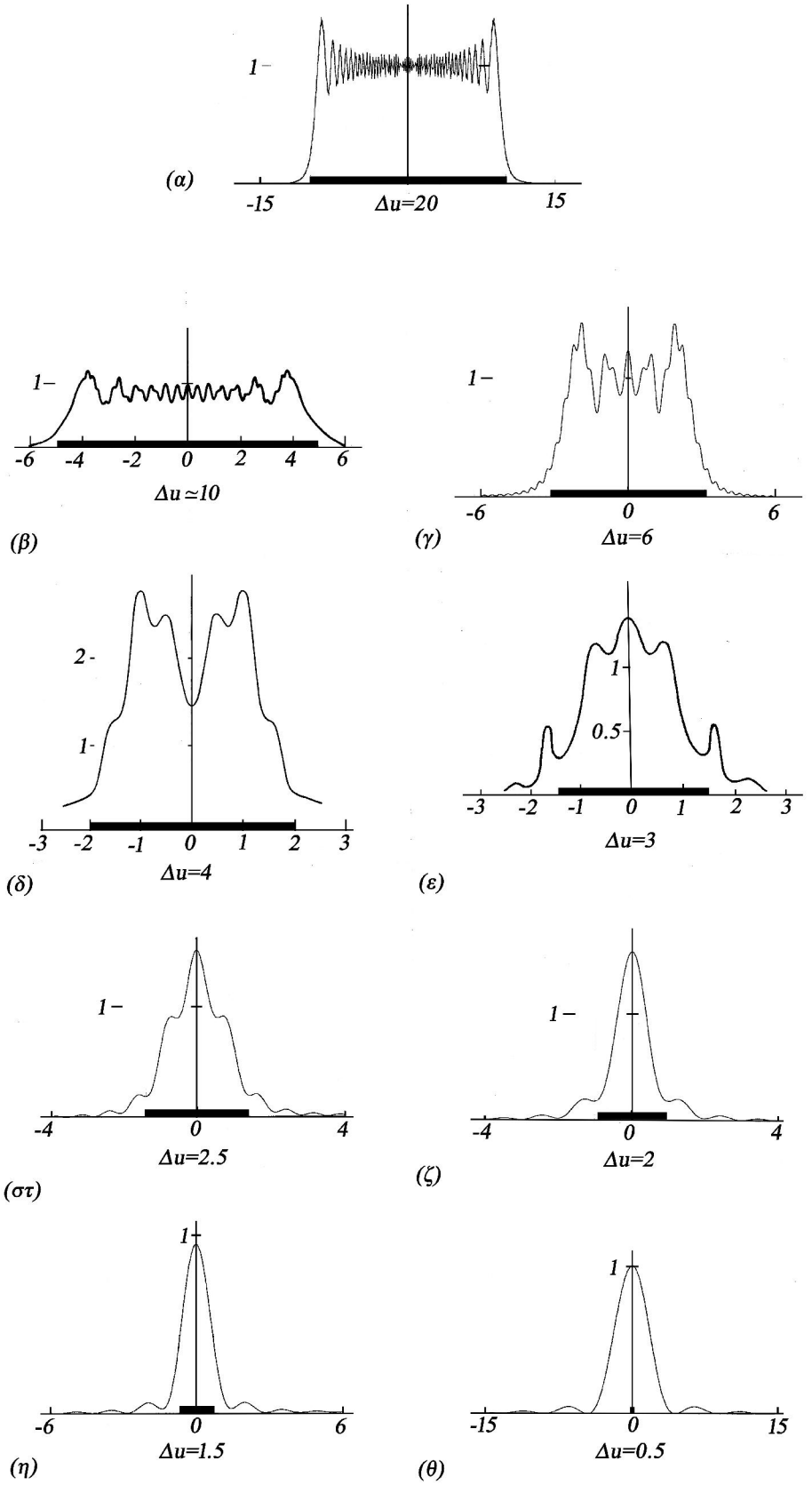
άνοιγμα μέχρι το επίπεδο που θέλουμε να υπολογίσουμε το πρότυπο περίθλασης. Περίθλαση Fresnel σε γενικές γραμμές θα έχουμε για περιοχές για τις οποίες $r_0 < d^2/\lambda$, ενώ Fraunhofer όταν $r_0 > d^2/\lambda$. Για την περίπτωση της σχισμής, το μέγιστο πλάτος της θα είναι αυτό του πλάτους της: $d = \Delta x = x_2 - x_1$.

Κατ' αρχή υποθέτουμε ότι $\Delta u > \sqrt{2} \simeq 1$, όπου Δu η παράμετρος που καθορίζει το μήκος του τόξου στη σπείρα Cornu. Τότε επειδή $\Delta u = \Delta x\sqrt{2/\lambda r_0}$ (φωτισμός της σχισμής με επίπεδο μετ. κύματος):

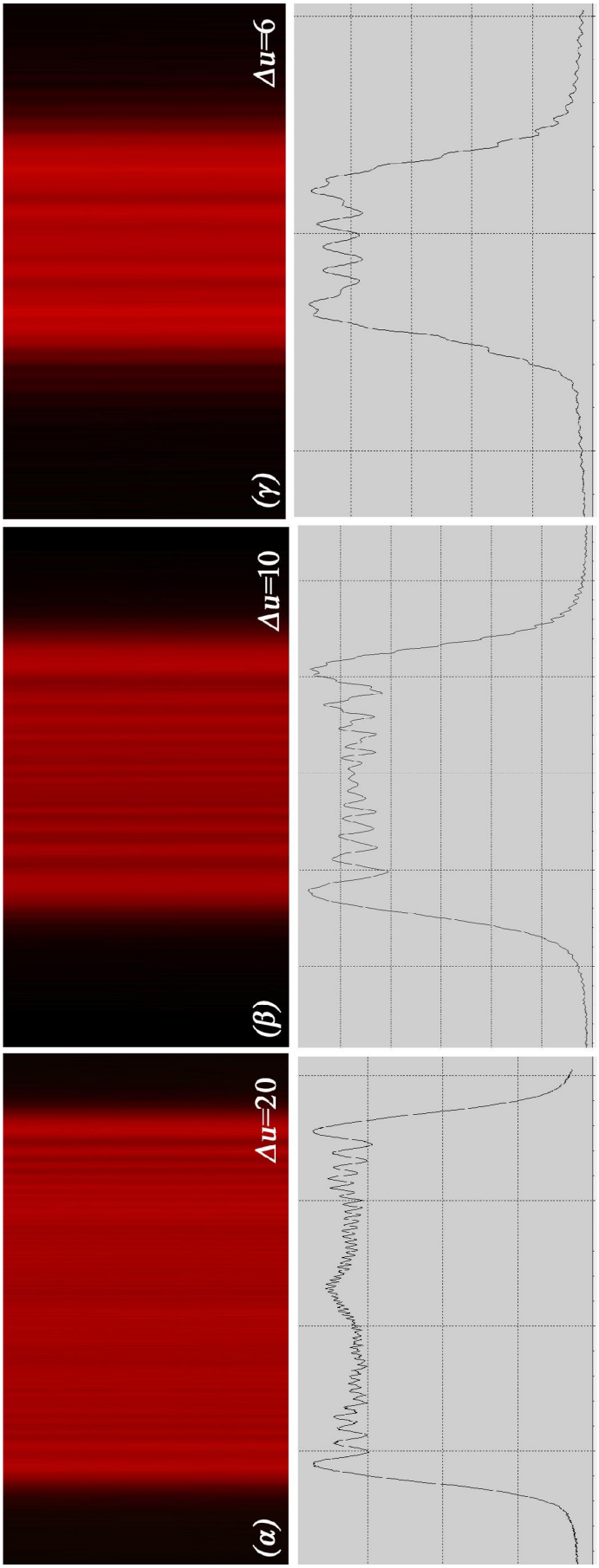
$\Delta u = \Delta x\sqrt{2/\lambda r_0} > \sqrt{2} \Rightarrow (\Delta x)^2 (2/\lambda r_0) > 2 \Rightarrow d^2 (1/\lambda r_0) > 1 \Rightarrow r_0 < d^2/\lambda$. Βλέπουμε δηλ. ότι για $\Delta u > 1$, βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel. Όταν όμως $\Delta u < 1$ ή κατά σύμβαση $\Delta u < \sqrt{2}$ τότε $r_0 > d^2/\lambda$ οπότε βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer. Και προκειμένου να παρακολουθήσουμε τη μετάβαση αυτή, παραθέτουμε μια σειρά από δέκα γραφικές παραστάσεις των προτύπων περίθλασης για: $\Delta u > 20, \Delta u = 20,\ 10,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2.5,\ 2,\ 1.5,\ 0.5$. Ο άξονας των τετμημένων είναι κατά τα γνωστά ο $(u_1 + u_2)/2$ και των τεταγμένων η κανονικοποιημένη ένταση του φωτός I/I_u. Αυτές φαίνονται στα (σχ. 7.8.9.5α-θ). Στα συγκεκριμένα σχήματα η τονισμένη σε πάχος γραμμή στο άξονα των τετμημένων, χαρακτηρίζει το μέγεθος Δu που είναι ανάλογο του πλάτους της σχισμής με βάση την εκάστοτε σχέση μετασχηματισμού.

Παρατηρούμε γενικά ότι για $\Delta u \geq 10$ (Σχ. 7.8.9.5α,β) η κατανομή της έντασης του φωτός της περίθλασης Fresnel περιορίζεται σχεδόν ολοκληρωτικά στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής, ενώ σε μικρό διάστημα έξω από αυτήν ταχύτατα μηδενίζεται. Επίσης το πλήθος των κροσσών της περίθλασης (αυξομειώσεις της έντασης του φωτός) αυξάνεται τον αριθμό όσο το Δu γίνεται μεγαλύτερο. Όταν το Δu γίνει πολύ μεγάλο, τότε το πρότυπο περίθλασης στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής, ταυτίζεται με δύο συμμετρικά μεταξύ τους πρότυπα περίθλασης Fresnel που προέρχονται από την περίθλαση του φωτός από δύο ημιεπίπεδα που συνθέτουν τα όρια της σχισμής (βλ. επόμενη παράγραφο). Το γεγονός αυτό γίνεται εμφανές στο (Σχ. 7.8.9.5α). Η ελάττωση της τιμής του Δu θα έχει σαν αποτέλεσμα την ελάττωση του αριθμού των κροσσών και την έναρξη της διάχυσης της έντασης εκτός αυτής (Σχ. 7.8.9.5γ,δ,ε). Επίσης από το (Σχ. 7.8.9.5δ) μπορούμε να δούμε ότι το κέντρο του προτύπου μπορεί να καταλαμβάνεται από ελάχιστο έντασης. Για $\Delta u = 2.5, 2$ (Σχ. 7.8.9.5στ,ζ), αρχίζει να εμφανίζεται μια κεντρική κατανομή έντασης που καταλαμβάνει το εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής και κροσσοί περίθλασης να εντοπίζονται στο εξωτερικό της. Για $\Delta u = 1.5$ (Σχ. 7.8.9.5η), βρισκόμαστε στην οριακή περιοχή μεταξύ περίθλασης κοντινού και μακρινού πεδίου. Το πρότυπο περίθλασης, προσομοιάζει με αυτό της περίθλασης Fraunhofer από σχισμή, μόνο που τα ελάχιστα των κροσσών δεν είναι μηδενικά. Τέλος για $\Delta u = 0.5$ (Σχ. 7.8.9.5θ), βρισκόμαστε καθαρά σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer. Κύριο χαρακτηριστικό του προτύπου στην περίπτωση αυτή είναι ότι όλη σχεδόν η κατανομή της έντασης του φωτός είναι εκτός των ορίων της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής και τα ελάχιστα των κροσσών περίθλασης είναι μηδενικά.

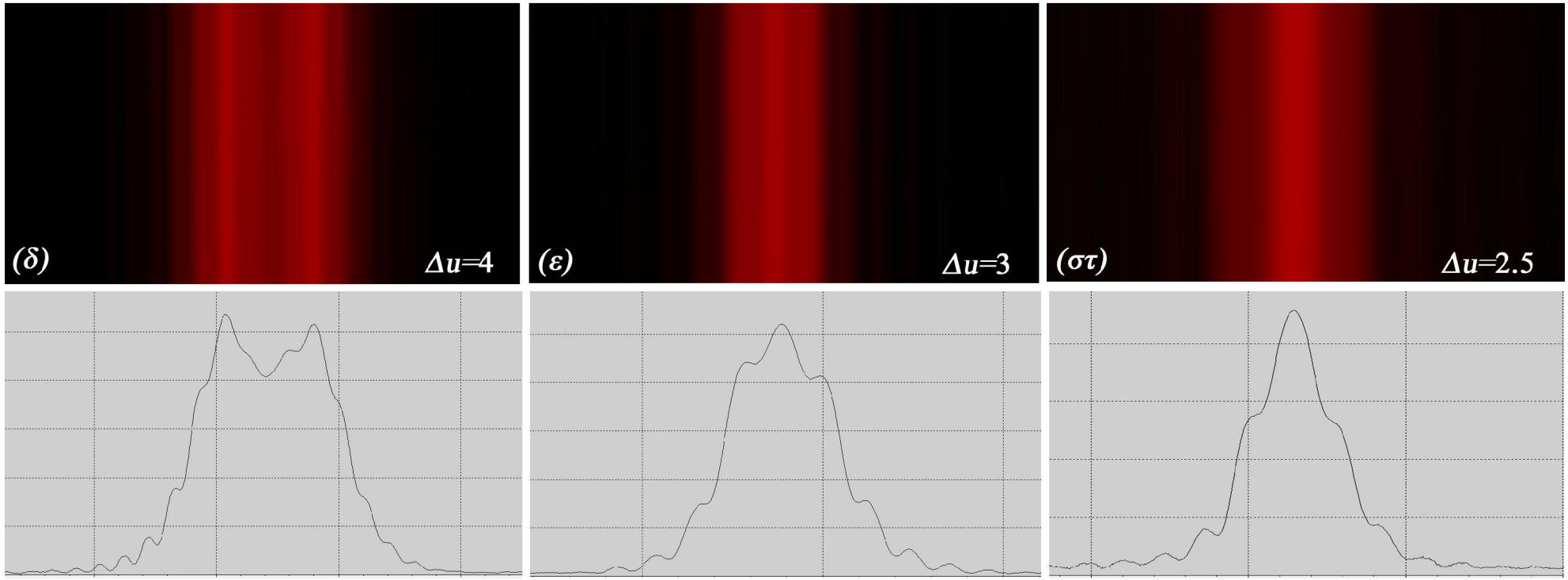
Στις (Εικ. 7.8.9.6 (1),(2),(3)), έχουμε την πειραματική επιβεβαίωση των προαναφερόμενων βήμα προς βήμα.


(α)
1
-15
Δu=20
15
(β)
1
-6 -4 -2 0 2 4 6
Δu ≃10
(γ)
1
-6
0
6
Δu=6
(δ)
2
1
-3 -2 -1 0 1 2 3
Δu=4
(ε)
1
0.5
-3 -2 -1 0 1 2 3
Δu=3
(στ)
1
-4
0
4
Δu=2.5
(ζ)
1
-4
0
4
Δu=2
(η)
1
-6
0
6
Δu=1.5
(θ)
1
-15
0
15
Δu=0.5

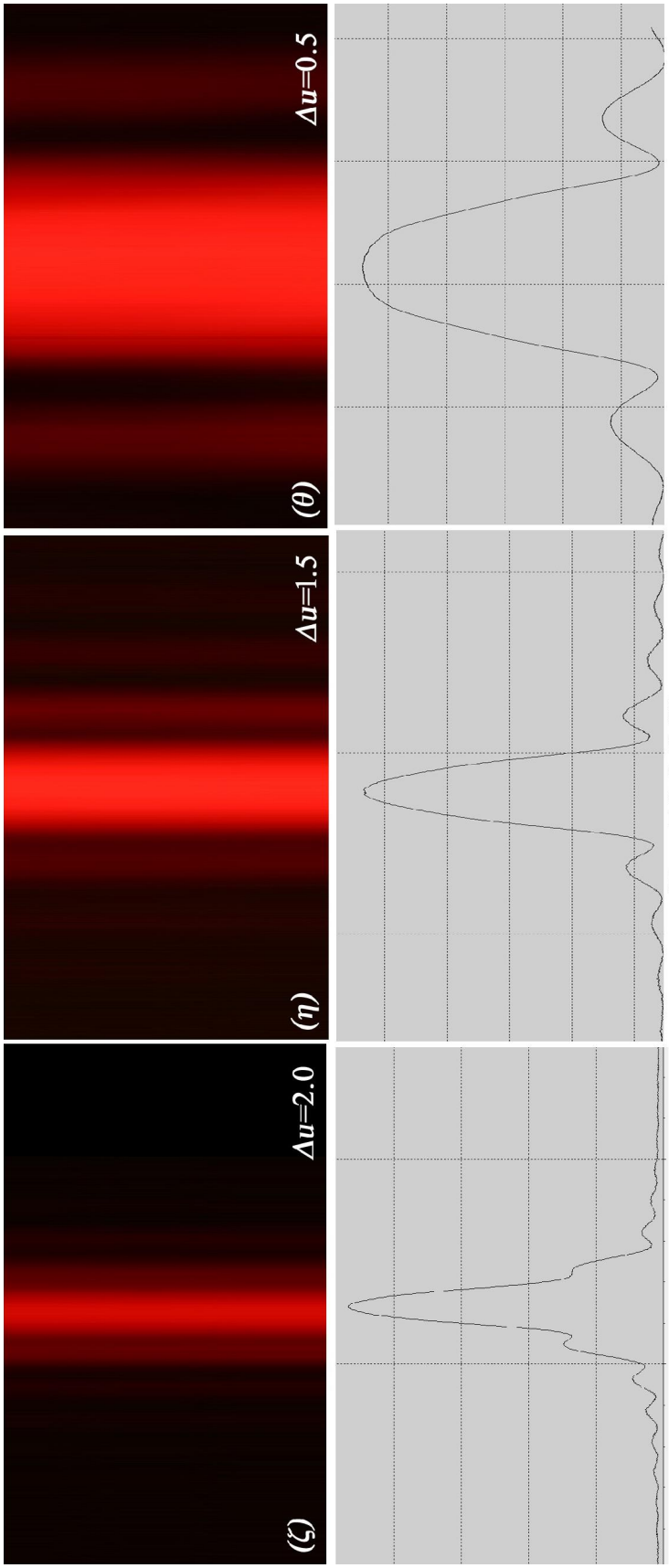
(Σχ. 7.8.9.5)



(Εικ. 7.8.9.6)(1)



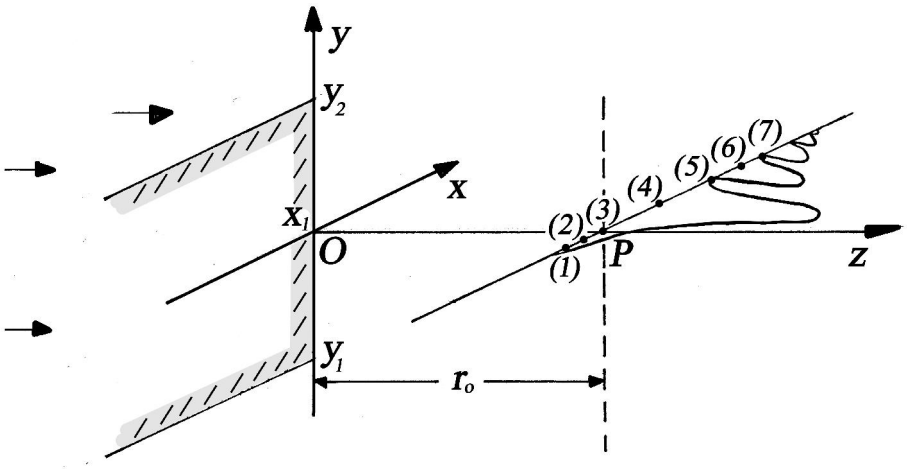
(Εικ. 7.8.9.6)(2)



(Εικ. 7.8.9.6)(3)

7.8.10 *Περίθλαση Fresnel από ακμή*

Θεωρούμε ένα αδιαφανές διάφραγμα (Σχ. 7.8.10.1) μεγάλων διαστάσεων (ημιεπίπεδο), που η μία κατακόρυφη ακμή του συμπίπτει με τον άξονα y. Κάθετα προς αυτήν βρίσκεται ο άξονας των x. Το σύστημα φωτίζεται από αριστερά από ένα μονοχρωματικό μετ. κύματος (επίπεδο ή σφαιρικό) ορισμένου μ.κ. λ. Θέλουμε



(Σχ. 7.8.10.1)

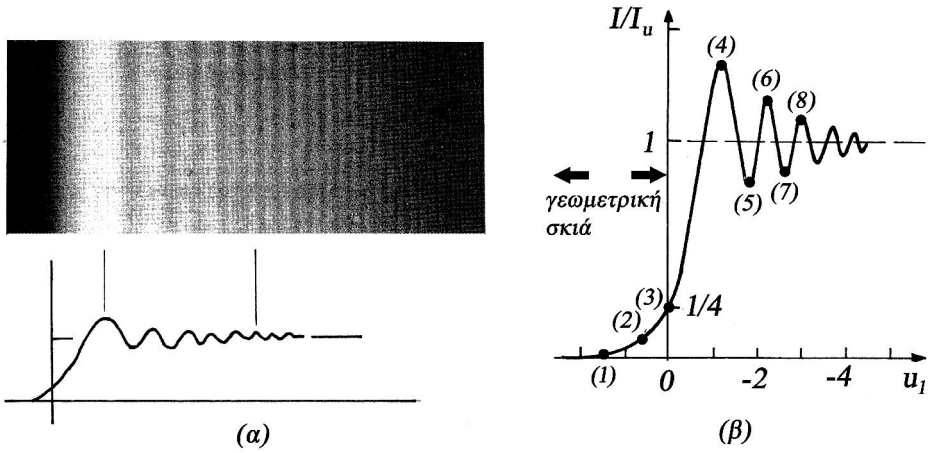
σε συνθήκες περίθλασης Fresnel, να υπολογίσουμε την ένταση του ηλ. πεδίου σε απόσταση $OP = r_0$ από το κέντρο O της ακμής και κατά μήκος μιας διεύθυνσης που είναι κάθετη στον οπτικό άξονα Oz και παράλληλη προς τον Ox.

Το πρόβλημα θα επιλυθεί με τη βοήθεια αυτού της περίθλασης από σχισμή μεγάλου μήκους και με την αποδοχή ότι η μία πλευρά της απομακρύνεται σε άπειρη απόσταση. Π.χ. $x_2 \to \infty$. Και με την προϋπόθεση ότι για μια σχισμή κατά τα γνωστά: $y_1 \to -\infty, y_2 \to \infty$ και ότι το ημιεπίπεδο φωτίζεται με ένα επίπεδο μετ. κύματος $\left(u = x\sqrt{2/\lambda r_0},\ \upsilon = y\sqrt{2/\lambda r_0}\right)$ θα έχουμε τελικά: $\upsilon_1 \to -\infty, \upsilon_2 \to \infty$ και $u_2 \to \infty$. Το πλάτος όμως της έντασης του ηλ. πεδίου E_P σε μια απόσταση r_0 από αυτήν δίνεται από τη (σχ. 7.8.9.1). Όσο δε για την ένταση του φωτός από τη (σχ. 7.8.9.3): $I_P = (I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$, όπου ο φάσορας $\mathbf{E}_{12}(u)$ δίνεται από τη γνωστή σχέση: $\mathbf{E}_{12}(u) = \left[C(u) + iS(u)\right]_{u_1}^{u_2} = \left[C(u_2) - C(u_1)\right] + i\left[S(u_2) - S(u_1)\right]$. Οπότε για το τετράγωνο του μέτρου του: $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2 = \left[C(u_2) - C(u_1)\right]^2 + \left[S(u_2) - S(u_1)\right]^2$. Επομένως: $I_P = (I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2 = (I_u/2)\left\{\left[C(u_2) - C(u_1)\right]^2 + \left[S(u_2) - S(u_1)\right]^2\right\}$. Επειδή όμως

για το ημιεπίπεδο όπως προαναφέραμε: $u_2 \to \infty$ και $C(u_2) \to 1/2, S(u_2) \to 1/2$ θα έχουμε τελικά:

$$I_P = \frac{I_u}{2}\left\{\left[\frac{1}{2} - C(u_1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(u_1)\right]^2\right\} \qquad (7.8.10.1)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον αναλυτικό προσδιορισμό της κανονικοποιημένης έντασης του φωτός σε διάφορες αποστάσεις r_0 από το ημιεπίπεδο, με βάση το πεδίο ορισμού των u_1. Οι τιμές των u_1 θα είναι θετικές μέσα στα όρια της γεωμετρικής σκιάς του ημιεπιπέδου (π.χ. θέσεις (1),(2) (Σχ. 7.8.10.2)) και αρνη-

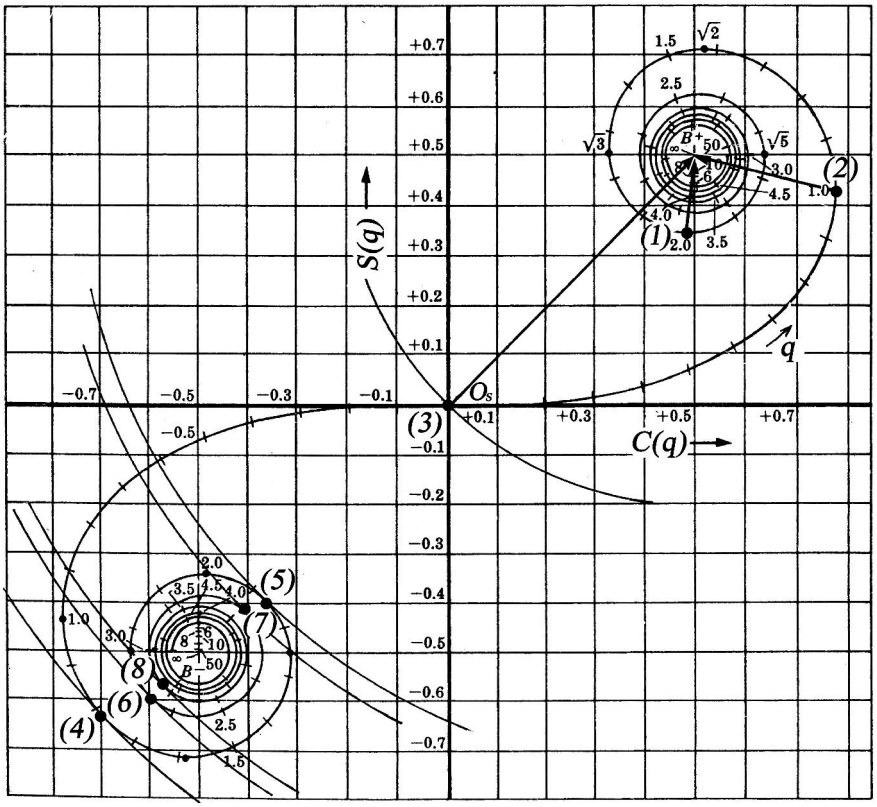


(Σχ. 7.8.10.2)

τικές σε αντίθετη διεύθυνση (π.χ. θέσεις (4),(5),(6),(7),(8)), με βάση τη σύμβαση της νοητής μετατόπισης του άξονα Oy παράλληλα με την ακμή, μέχρις ότου συναντήσει τις προβολές των προαναφερόμενων σημείων. Η θέση (3) αντιστοιχεί στα όρια της γεωμετρικής σκιάς.

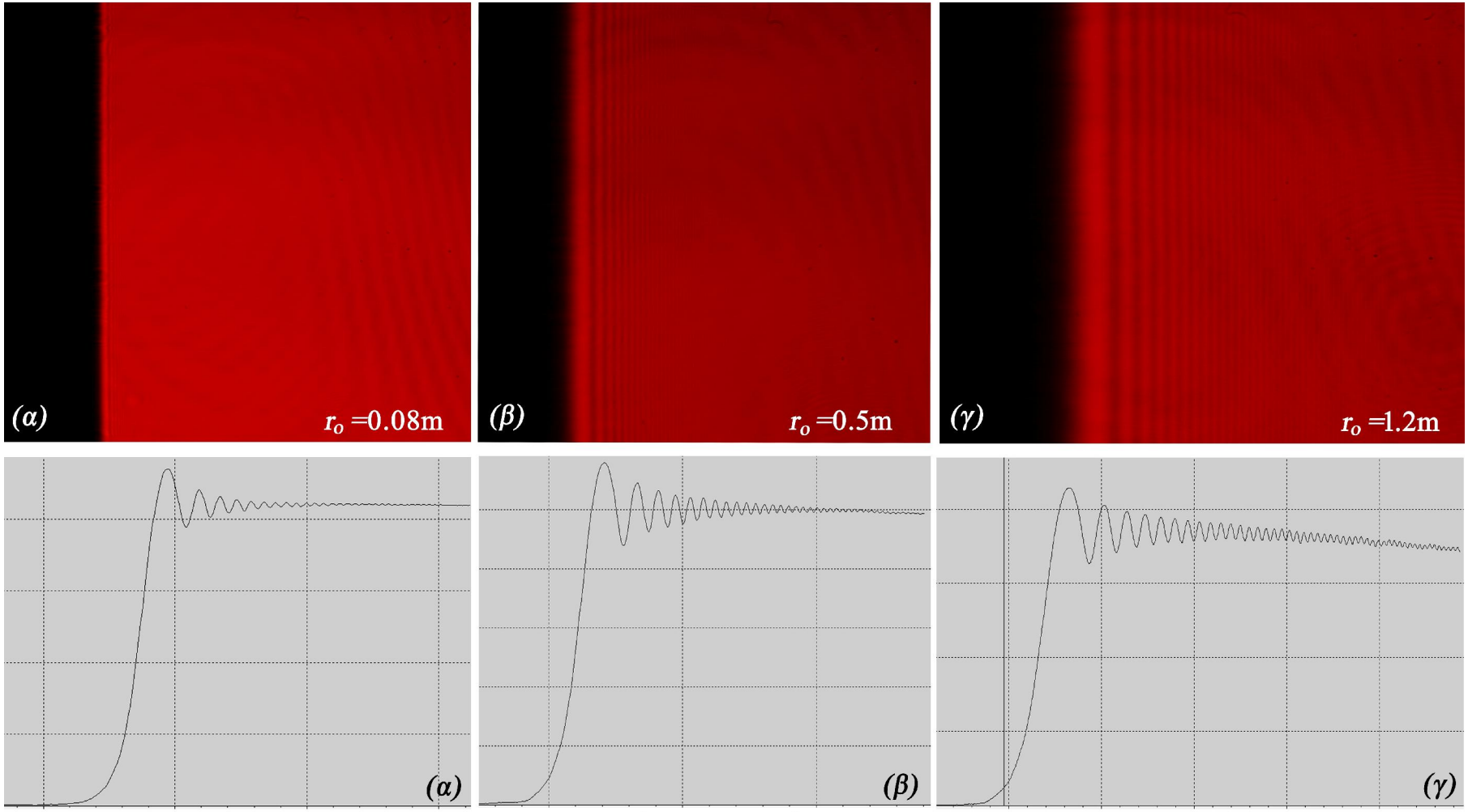
Το πρότυπο περίθλασης Fresnel από την ακμή ενός ημιεπιπέδου σε μια θέση μετά από αυτήν, φαίνεται στην (Εικ. 7.8.10.2α). Βλέπουμε ότι εκτός των ορίων της γεωμετρικής σκιάς, σχηματίζεται πολύ μεγάλος αριθμός ευθύγραμμων κροσσών περίθλασης παράλληλων προς την ακμή και φθίνουσας χωρικής συχνότητας. Τη δομή αυτών των κροσσών (θέσεις και μέγεθος μέγιστων και ελάχιστων) σημεία 4),(5),(6),(7),(8),….μπορούμε άμεσα να τα υπολογίσουμε με τη βοήθεια της σπείρας του Cornu (Σχ. 7.8.10.3) και της σχέσης: $I_P/I_u = (1/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$. Τα σημεία: (4),(6),(8) με τιμές: $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right| = 1.642, 1.540, 1.508$ αντιστοιχούν σε διαδοχικά μέγιστα $(I_P/I_u) = 1.348, 1.185, 1.136$. Ενώ τα σημεία: (5),(7) με τιμές $\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right| = 1.237, 1.288$

αντιστοιχούν σε διαδοχικά ελάχιστα $(I_P/I_u) = 0.766, 0.83$. Τα μέτρα των φασόρων $|\mathbf{E}_{12}(u)|$ (μέγιστα ή ελάχιστα) είναι οι ακτίνες των κύκλων με κέντρο το σημείο B^+ που εφάπτονται των αντίστοιχων σημείων με τη σπείρα Cornu. Το σημείο (3) αντιστοιχεί στο όριο της γεωμετρικής σκιάς της ακμής του ημιεπιπέδου για το οποίο $u_1 = 0$. Και το μήκος του αντίστοιχου φάσορα θα είναι: $|\mathbf{E}_{12}(u)| = B^+O_s = 0.707$. Επο-



(Σχ. 7.8.10.3)

μένως $(I_P/I_u) = 0.25$. Δηλ. η ένταση του φωτός στο σημείο αυτό θα είναι ίσο με το ένα τέταρτο της έντασης του μη εμποδιζόμενου μετ. κύματος στο ίδιο σημείο. Το αποτέλεσμα είναι προφανές για το λόγο ότι η τιμή του ηλ. πεδίου στη θέση αυτή, θα οφείλεται στη συνεισφορά των κυματιδίων που προέρχονται από τα σημεία του μισού από το προσπίπτον μετ. κύματος. Άρα θα είναι: $E_P = E_u/2$. Και επομένως: $I_P = (E_u^2/4) = I_u/4$. Οι (Εικ. 7.8.10.4) προέκυψαν από πείραμα που αφορούσε την περίθλαση Fresnel από ημιεπίπεδο. Το τελευταίο φωτίστηκε με επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}$mm (από Laser He-Ne). Οι αποστάσεις στις οποίες έχουν ληφθεί τα πρότυπα περίθλασης ήταν: $r_0 = 0.08,\ 0.5$ και 1.2m.



(Εικ. 7.8.10.4)

Η ένταση του φωτός στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς

Αν οι τιμές των u είναι αρκετά μεγάλες, τότε τα ολοκληρώματα Fresnel μπορούν να προσεγγιστούν από τις σχέσεις:

$$C(u)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\pi u}\right)\sin\frac{\pi u^2}{2},\quad S(u)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\pi u}\right)\cos\frac{\pi u^2}{2} \tag{7.8.10.2}$$

Οπότε αν οι τελευταίες αντικατασταθούν στη (σχ. 7.8.10.1) που μας δίνει την ένταση του φωτός I_P δηλ. την: $I_P=(I_u/2)\left\{\left[(1/2)-C(u_1)\right]^2+\left[(1/2)-S(u_1)\right]^2\right\}$, τότε θα

έχουμε:
$$\begin{cases} I_P=(I_u/2)\left\{\left[(1/2)-C(u_1)\right]^2+\left[(1/2)-S(u_1)\right]^2\right\}= \\ =\dfrac{I_u}{2}\left\{\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{\pi u}\right)\sin\dfrac{\pi u^2}{2}\right]^2+\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{\pi u}\right)\cos\dfrac{\pi u^2}{2}\right]^2\right\}= \\ =\dfrac{I_u}{2}\left(\dfrac{1}{\pi u}\right)^2\left[\sin\dfrac{\pi u^2}{2}+\cos\dfrac{\pi u^2}{2}\right] \quad \text{και τελικά:} \end{cases}$$

$$I_P=\frac{I_u}{2}\left(\frac{1}{\pi u}\right)^2 \tag{7.8.10.3}$$

Δηλ. βλέπουμε ότι στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς, η ένταση του φωτός ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της τιμής του u. Πράγματι για τις θέσεις (1) και (2) για τις οποίες $u_{1(1)}=1$ και $u_{2(2)}=2$, με τη βοήθεια της σπείρας Cornu (Σχ. 7.8.10.3) βρίσκουμε: $\left|\mathbf{E}_{12}(u=1)\right|=0.29$ οπότε: $(I/I_u)=0.04$. Και για $\left|\mathbf{E}_{12}(u=2)\right|=0.16$, $(I/I_u)=0.013$.

Το πρότυπο περίθλασης Fresnel από ακμή για την περίπτωση που $\lambda\to 0$. (Μετάβαση από την κυματική στη γεωμετρική οπτική)

Αποδεικνύεται ότι η μορφολογία του προτύπου περίθλασης Fresnel από την ακμή ενός ημιεπιπέδου σε μια ορισμένη απόσταση (δηλ. για $r_0=$ σταθ.) από αυτήν, εξαρτάται από το μ.κ. λ της φωτίζουσας ακτινοβολίας. Πράγματι το γεγονός γίνεται εμφανές από τη σχέση μετασχηματισμού μεταξύ των u και x. Π.χ. για φωτισμό με επίπεδο μετ. κύματος θα έχουμε: $u=x\sqrt{2/\lambda r_0}$. Και για $\lambda_R=0.6328\times10^{-3}$mm και

$r_0 = 1\times10^3\,\text{mm}$ βρίσκεται ότι $u_R = 1.777x$. Και μάλιστα για την συγκεκριμένη περίπτωση, το πρώτο μέγιστο της έντασης του προτύπου περίθλασης μετά την ακμή το συναντάμε στη θέση $u_R \simeq 1$ (Σχ. 7.8.10.2β). Που σημαίνει ότι η απόσταση x από την ακμή θα είναι: $u_R = 1.777x = 1 \Rightarrow x \simeq 0.565\text{mm}$. Θέλουμε να δούμε τώρα σε ποια τιμή του u αντιστοιχεί η θέση αυτή ($x \simeq 0.565\text{mm}$) όταν όμως το ημιεπίπεδο φωτιστεί από ιώδες φως μ.κ. $\lambda_V = 0.4\times10^{-3}\,\text{mm}$. Το τελευταίο υπολογίζεται από τη σχέση μετασχηματισμού $u = x\sqrt{2/\lambda r_0}$, η οποία για $\lambda_V = 0.4\times10^{-3}\,\text{mm}$ και $r_0 = 1\times10^3\,\text{mm}$ γράφεται: $u_V = 2.23x$. Και για $x \simeq 0.565\text{mm} \Rightarrow u_V = 1.26$. Με το δεδομένο όμως ότι το πρώτο μέγιστο του προτύπου περίθλασης για το λ_R σχηματίζεται στη θέση $x \simeq 0.565\text{mm}\left(u_R \simeq 1\right)$, το μέγιστο για τον ίδιο κροσσό έχει μετατοπιστεί προς τα αριστερά αυτής της θέσης όταν το ημιεπίπεδο φωτιστεί με φως του οποίου το μ.κ. είναι $\lambda_V = 0.4\times10^{-3}\,\text{mm}$. Και ο λόγος είναι ότι στην ίδια θέση του $x \simeq 0.565\text{mm}$ αντιστοιχεί το $u_V = 1.26$. Επομένως το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι όσο μικρότερο είναι το μ.κ. του φωτός που προσπίπτει στην ακμή, τόσο οι κροσσοί της περίθλασης μετατοπίζονται προς αυτήν και πυκνώνουν μεταξύ τους. Η συρρίκνωση αυτή του προτύπου ισχύει και για το τμήμα της κατανομής της έντασης του φωτός στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς της ακμής.

Για $\lambda \to 0$ θεωρητικά δεν θα υφίστανται κροσσοί (δηλ. αυξομειώσεις της έντασης του φωτός) στον χώρο τον εκτός της γεωμετρικής σκιάς. Η τιμή της I_p εκεί, θα είναι ίση με I_u. Αυτό προκύπτει από τη (σχ. 7.8.10.1):

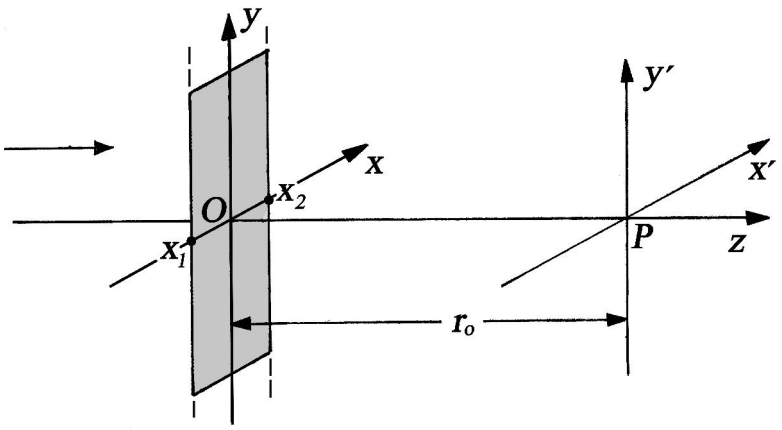
$I_P = \left(I_u/2\right)\left\{\left[1/2 - C(u)\right]^2 + \left[1/2 - S(u)\right]^2\right\}$ για $u \to -\infty$ οπότε: $C(-\infty) = S(-\infty) = -1/2$.

Επίσης για την περιοχή της γεωμετρικής σκιάς και για $u \to +\infty$, από τη (σχ. 7.8.10.3): $I_P = \left(I_u/2\right)\left(1/\pi u\right)^2$ βρίσκουμε: $I_P = 0$. Από τα προαναφερόμενα τελικά βλέπουμε ότι για $\lambda \to 0$ έχουμε μετάβαση στην περιοχή της Γεωμετρικής Οπτικής, όπου ο διαχωρισμός μεταξύ μιας περιοχής της σκιάς και εκείνης του φωτός, αποκτά την έννοια της βαθμίδας.

7.8.11 *Περίθλαση Fresnel από ευθύγραμμο εμπόδιο πλάτους d και μεγάλου μήκους*

Θεωρούμε μια αδιαφανή κατακόρυφη λωρίδα ορισμένου πλάτους d και μεγάλου μήκους (Σχ. 7.8.11.1), η οποία μπορεί να φωτίζεται από ένα επίπεδο ή σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος μ.κ. λ. Θέλουμε να υπολογίσουμε το πρότυπο περίθλασης Fresnel σε ένα επίπεδο σε απόσταση $r_0 = OP$, όπου O το κέντρο της λωρίδας και P ένα σημείο του οπτικού άξονα, καθώς και σε σημεία εκτός αυτού.

Στην προκειμένη περίπτωση μεταξύ των d, r_0 και λ θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $r_0 < d^2/\lambda$. Και κάτω από αυτές τις συνθήκες θα υπολογίσουμε κατ' αρχή την ένταση E_P του ηλ. πεδίου για τις θέσεις που προαναφέραμε και κατά προέκταση την ένταση του φωτός I_P σε σχέση με την ένταση I_u του μη εμποδιζόμενου μετ. κύματος.



(Σχ. 7.8.11.1)

Η επίλυση του προβλήματος θα γίνει με δύο τρόπους: Τον αναλυτικό και με τη βοήθεια της σπείρας του Cornu.

Είναι ευλογοφανές ότι η ένταση του ηλ. πεδίου στη θέση P, θα προέρχεται από την επαλληλία των κυματιδίων που εκπέμπονται από τις δύο περιοχές ένθεν και ένθεν της αδιαφανούς λωρίδας. Δηλ. από $x_1(u_1)$ έως το $-\infty$ και από το $x_2(u_2)$ μέχρις το $+\infty$. Η συνεισφορές αυτές αφορούν μόνο τη διεύθυνση x. Επειδή κατά την y (αδιαφανές τμήμα που καταλαμβάνει η λωρίδα) δεν υπάρχει συνεισφορά στο πεδίο στη θέση P. Οπότε το συνολικό ηλ. πεδίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_P = \frac{E_u}{2}\mathbf{E}_{12}(u) \tag{7.8.11.1}$$

Αρκεί τώρα να υπολογίσουμε το $\mathbf{E}_{12}(u)$. Όπου $\mathbf{E}_{12}(u)$ ο φάσορας στο μιγαδικό επίπεδο με τις δύο του συνιστώσες: Την πραγματική: $\left[C(-\infty)-C(u_1)\right]-\left[C(\infty)-C(u_2)\right]$ και τη φανταστική: $\left[S(-\infty)-S(u_1)\right]-\left[S(\infty)-S(u_2)\right]$.

Και επειδή $C(\infty)=S(\infty)=1/2$ όπως και $C(-\infty)=S(-\infty)=-1/2$ θα έχουμε:

$\mathbf{E}_{12}(u)=\left\{\left[-\frac{1}{2}-C(u_1)\right]-\left[\frac{1}{2}-C(u_2)\right]+i\left[-\frac{1}{2}-S(u_1)\right]-\left[\frac{1}{2}-S(u_2)\right]\right\}$. Και τελικά:

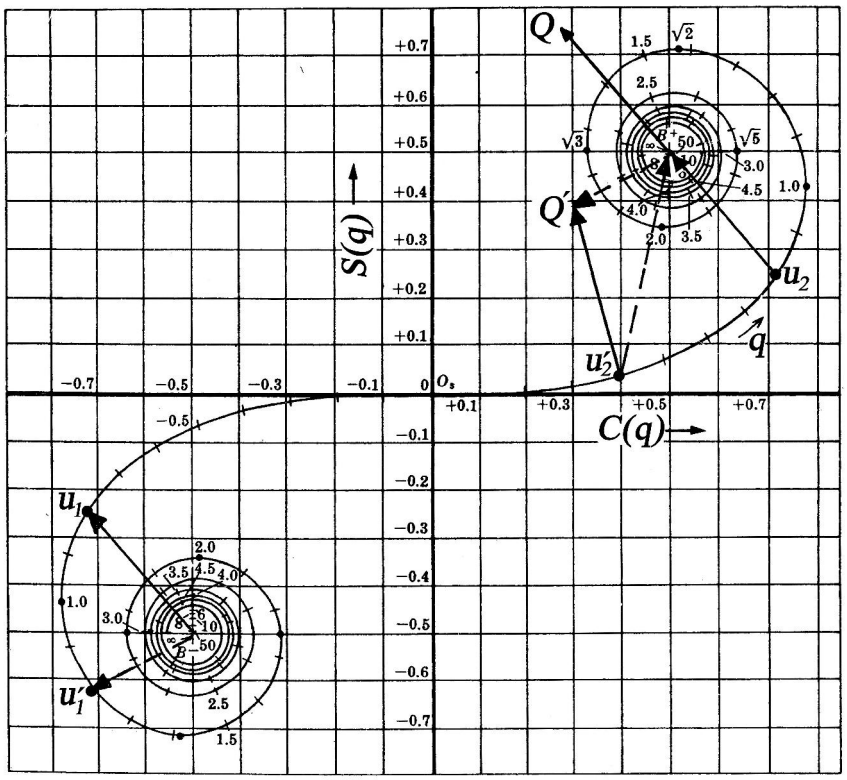
$$\mathbf{E}_{12}(u)=\left[-1+C(u_2)-C(u_1)\right]+i\left[-1+S(u_2)-S(u_1)\right] \qquad (7.8.11.2)$$

Επειδή όμως (σχ.7.8.9.3): $I_P=\frac{I_u}{2}\mathbf{E}_{12}(u)\mathbf{E}_{12}^*(u)=\frac{I_u}{2}\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$ βρίσκουμε τελικά:

$$I_P=\frac{I_u}{2}\left\{\left[-1+C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[-1+S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\} \qquad (7.8.11.3)$$

Το πρόβλημα του υπολογισμού της έντασης του φωτός στην περιοχή της περίθλασης Fresnel από αδιαφανή λωρίδα μεγάλου μήκους κατά την πρόσπτωση σ' αυτήν επιπέδου ή σφαιρικού μετ. κύματος, είναι δυντόν να επιλυθεί και με τη βοήθεια της σπείρας του Cornu. Οι συνεισφορές στη διαμόρφωση του ηλ. πεδίου από τις δύο περιοχές ένθεν και ένθεν των ορίων της λωρίδας, θα είναι οι φάσορες $\overline{B^-u_1}$ και $\overline{u_2B^+}$. Οι τελευταίοι θα πρέπει να προστεθούν διανυσματικά. Και για να υπολογίσουμε την ένταση του φωτός σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα ή σ' οποιαδήποτε άλλη θέση σε απόσταση r_0 από το κέντρο της λωρίδας, θα πρέπει κατ' αρχή να προσδιορίσουμε το μέτρο της συνισταμένης των φασόρων και κατόπιν ν' αντικαταστήσουμε στη σχέση: $I_P=(I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$.

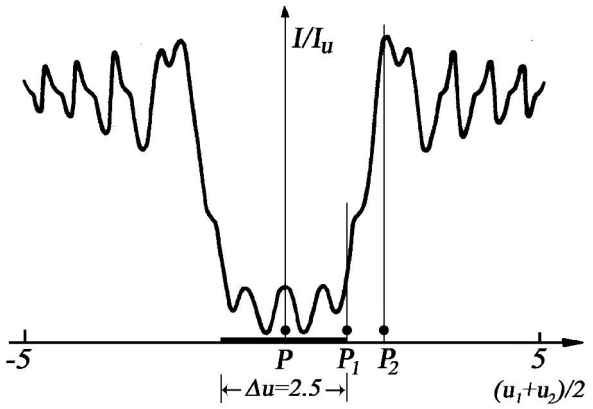
Στο (Σχ. 7.8.11.2) μπορούμε να δούμε τη διαδικασία της διανυσματικής άθροισης των φασόρων στις εξής περιπτώσεις: α) Όταν το σημείο P βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα (χάριν παραδείγματος $\widehat{u_1u_2}=1.6$). Τότε τα u_1,u_2 θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις σε σχέση με την αρχή της σπείρας Cornu $(u_1,u_2)=(-0.8,0.8)$. Οπότε οι φάσορες $\overline{B^-u_1}$ και $\overline{u_2B^+}$ θα είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Άρα το άθροισμά τους είναι ο φάσορας $\overline{u_2Q}$ $\left(\overline{B^-u_1}+\overline{u_2B^+}=\overline{u_2B^+}+\overline{B^+Q}=\overline{u_2Q}\right)$. Όπου το διάνυσμα $\overline{B^-u_1}$ είναι παράλληλο και ίσο κατά μέτρο με το $\overline{B^+u_2}$. β) Όταν ένα σημείο P' βρίσκεται εκτός του οπτικού άξονα, σε διεύθυνση κάθετη προς αυτόν και και παράλληλη με τον Ox, στη θέση π.χ. για την οποία $(u_1',u_2')=(-1.2,0.4)$ (διολίσθηση προς τα' αρνητικά της σπείρας). Τότε θα πρέπει ν' αθροίσουμε διανυσματικά τους φάσορες $\overline{B^-u_1'}$ και $\overline{u_2'B^+}$. Θα έχουμε:
$\overline{B^-u_1'}+\overline{u_2'B^+}=\overline{u_2'B^+}+\overline{B^+Q'}=\overline{u_2'Q'}$. (Όπου το διάνυσμα $\overline{B^+Q'}$ είναι παράλληλο και ίσο κατά μέτρο με το $\overline{B^-u_1'}$). Οπότε οι τιμές των εντάσεων του φωτός στα σημεία P,P' συναρτήσει της I_u θα είναι: $I_P=(I_u/2)\left|\overline{u_2Q}\right|^2$ και $I_{P'}=(I_u/2)\left|\overline{u_2'Q'}\right|^2$.



(Σχ. 7.8.11.2)

Παράδειγμα 1

Στο διάγραμμα του (Σχ. 7.8.11.3), βλέπουμε τη γραφική παράσταση της κανονικοποιημένης έντασης του φωτός που προέρχεται από την περίθλαση Fresnel

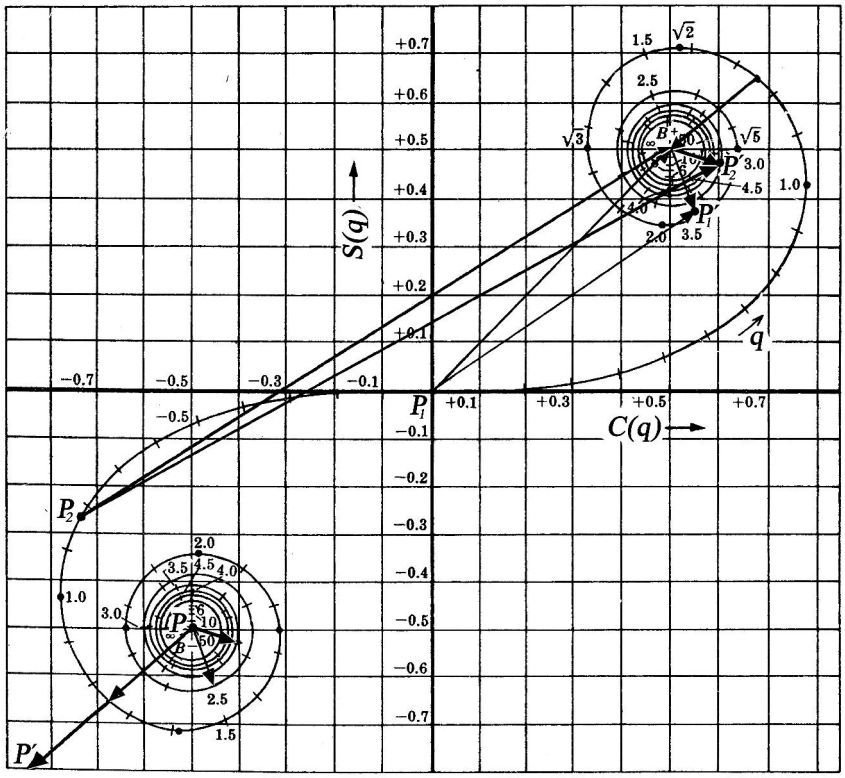


(Σχ. 8.11.3)

από κατακόρυφη αδιαφανή λωρίδα ορισμένου πλάτους, σε μια ορισμένη απόσταση r_0 από το κέντρο της O. Το φωτίζον μετ. κύματος είναι μονοχρωματικό, επίπεδο ή

σφαιρικό. Για την συγκεκριμένη περίπτωση: $\Delta u = 2.5$. Θέλουμε να επιβεβαιώσουμε με τη βοήθεια της σπείρας Cornu, ότι οι κανονικοποιημένες εντάσεις σε τρία χαρακτηριστικά σημεία P, P_1, P_2 με αρχή γενόμενη το P που βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα, αντιστοιχούν στις τιμές I/I_u του διαγράμματος του (Σχ. 7.8.11.3) όπου: α) $P(u_1,u_2)=(-1.25,1.25)$. β) Το P_1 βρίσκεται ακριβώς στα όρια της γεωμετρικής σκιάς με: $P_1(u_1',u_2')=(-2.5,0)$ και γ) Το P_2 ν' αντιστοιχεί στο μέγιστο της έντασης του προτύπου περίθλασης με: $P(u_1'',u_2'')=(-3.33,-0.85)$.

- Με τη βοήθεια του (Σχ. 7.8.11.4) της σπείρας Cornu βρίσκουμε τα διανυσματικά αθροίσματα των φασόρων $\overline{B^-u_1}+\overline{u_2B^+}, \overline{B^-u_1'}+\overline{u_2'B^+}$ και $\overline{B^-u_1''}, \overline{u_2''B^+}$. Τα τελευταία αντιστοιχούν στου φάσορες $\overline{PP'}, \overline{P_1P_1'}$ και P_2P_2'. Με μέτρησή τους με κανόνα και αναγωγή στην κλίμακα της σπείρα ς βρίσκουμε: $\left|\overline{PP'}\right|=0.463, \left|\overline{P_1P_1'}\right|=0.662$



(Σχ. 7.8.11.4)

και $\left|P_2P_2'\right|=1.432$. Οπότε: $I_P=(I_u/2)\left|\overline{PP'}\right|^2=0.107I_u$, $I_{P_1}=(I_u/2)\left|\overline{P_1P_1'}\right|^2=0.219I_u$ και $I_{P_2}=(I_u/2)\left|P_2P_2'\right|^2=1.025I_u$. Οι τιμές αυτές ανταποκρίνονται με αξιοσημείωτη ακρίβεια σε αυτές που μας δίνει το διάγραμμα του (Σχ. 7.8.11.3).

Παράδειγμα 2

Μια αδιαφανής κατακόρυφη λωρίδα πλάτους $d = 2\text{mm}$ φωτίζεται με ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Να υπολογιστούν οι εντάσεις (σε σχέση με την I_u) στις θέσεις:

$$P = 0, P_1 = 0.125, P_2 = 0.25, P_3 = 0.375, P_4 = 0.5, P_5 = 0.625, P_6 = 0.75, P_7 = 0.875,$$
$$P_8 = 1, P_9 = 1.125, P_{10} = 1.25, P_{11} = 1.375, P_{12} = 1.5, P_{13} = 1.625, P_{14} = 1.75, P_{15} = 1.875, P_{16} = 2$$

Οι αποστάσεις αυτές μετρούνται κατά μήκος της διεύθυνσης – καθέτου προς τον οπτικό άξονα – από το σημείο του P και παράλληλου προς τον άξονα Ox. Το σημείο P απέχει από το κέντρο O της αδιαφανούς λωρίδας απόσταση $OP = r_0 = 1\text{m}$. Επίσης ο υπολογισμός της έντασης του φωτός για τα σημεία P, P_1, P_4 να γίνει και με τη βοήθεια της σπείρας του Cornu.

- Οι συντεταγμένες (x_1, x_2) των σημείων P_i $i = 0,1,2,\cdots,16$ κατά μήκος του άξονα Ox θα είναι (σε mm):

$$P(-1,1), P_1(-1.125, 0.875), P_2(-1.25, 0.75), P_3(-1.375, 0.625), P_4(-1.5, 0.5),$$
$$P_5(-1.625, 0.375), P_6(-1.75, 0.25), P_7(-1.875, 0.125), P_8(-2, 0),$$
$$P_9(-2.125, -0.125), P_{10}(-2.25, -0.25), P_{11}(-2.375, -0.75), P_{12}(-2.5, -0.5),$$
$$P_{13}(-2.625, 0.625), P_{14}(-2.75, -0.75), P_{15}(-2.875, -0.875), P_{16}(-3, -1)$$

Και με το δεδομένο ότι η σχέση μετασχηματισμού για προσπίπτον επίπεδο μετ. κύματος είναι η $u = x\sqrt{2/\lambda r_0}$, επειδή $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ και $r_0 = 1 \times 10^3\,\text{mm}$ βρίσκουμε: $u = 1.777x$. Οπότε με βάση την τελευταία σχέση, μπορούμε να εκφράσουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες (u_1, u_2) για τα P_i. Αυτές θα είναι:

$$P(-1.777, 1.777), P_1(-2, 1.554), P_2(-2.221, 1.333), P_3(-2.443, 1.11),$$
$$P_4(-2.665, 0.888), P_5(-2.887, 0.666), P_6(-3.1, 0.444), P_7(-3.331, 0.222), P_8(-3.554, 0),$$
$$P_9(-3.776, -0.222), P_{10}(-3.998, -0.444), P_{11}(-4.22, -0.666), P_{12}(-4.44, -0.888),$$
$$P_{13}(-4.664, -1.1), P_{14}(-4.886, -1.332), P_{15}(-5.1, -1.55), P_{16}(-5.33, -1.777)$$

Αναλυτική λύση

Με τη βοήθεια του (Πίν. 7.8.8.2) βρίσκουμε προσεγγιστικά τις τιμές των $C(u_1), C(u_2), S(u_1), S(u_2)$. Κατόπιν με τη βοήθεια της (σχ. 7.8.11.3):

$I_P = (I_u/2)\left\{\left[-1 + C(u_2) - C(u_1)\right]^2 + \left[-1 + S(u_2) - S(u_1)\right]^2\right\}$, υπολογίζουμε τις τιμές των εντάσεων του φωτός σε σχέση με την I_u. Βρίσκουμε:

$P(-1.777,1.777) \to C(u_1) = -0.33, C(u_2) = 0.33, S(u_1) = -0.47, S(u_2) = 0.47$
$P_1(-2,1.554) \to C(u_1) = -0.488, C(u_2) = 0.4, S(u_1) = -0.343, S(u_2) = 0.668$
$P_2(-2.221,1.333) \to C(u_1) = -0.64, C(u_2) = 0.6, S(u_1) - 0.47, S(u_2) = 0.69$
$P_3(-2.443,1.11) \to C(u_1) = -0.5, C(u_2) = 0.763, S(u_1) = -0.619, S(u_2) = 0.536$
$P_4(-2.665,0.888) \to C(u_1) = -0.39, C(u_2) = 0.76, S(u_1) = -0.48, S(u_2) = 0.31$
$P_5(-2.887,0.666) \to C(u_1) = -0.55, C(u_2) = 0.63, S(u_1) = -0.4, S(u_2) = 0.15$
$P_6(-3.1,0.444) \to C(u_1) = -0.56, C(u_2) = 0.44, S(u_1) = -0.58, S(u_2) = 0.05$
$P_7(-3.331,0.222) \to C(u_1) = -0.4, C(u_2) = 0.2, S(u_1) = -0.52, S(u_2) = 0.009$
$P_8(-3.554,0) \to C(u_1) = -0.55, C(u_2) = 0.00, S(u_1) = -0.46, S(u_2) = 0.00$
$P_9(-3.776,-0.222) \to C(u_1) = -0.44, C(u_2) = -0.2, S(u_1) = -0.56, S(u_2) = -0.009$
$P_{10}(-3.998,-0.444) \to C(u_1) = -0.498, C(u_2) = -0.44, S(u_1) = -0.42, S(u_2) = -0.05$
$P_{11}(-4.22,-0.666) \to C(u_1) = -0.52, C(u_2) = -0.63, S(u_1) = -0.56, S(u_2) = -0.15$
$P_{12}(-4.44,-0.888) \to C(u_1) = -0.439, C(u_2) = -0.76, S(u_1) = -0.45, S(u_2) = -0.31$
$P_{13}(-4.664,-1.1) \to C(u_1) = -0.51, C(u_2) = -0.763, S(u_1) = -0.54, S(u_2) = -0.536$
$P_{14}(-4.886,-1.332) \to C(u_1) = -0.49, C(u_2) = -0.63, S(u_1) = -0.44, S(u_2) = -0.69$
$P_{15}(-5.1,-1.55) \to C(u_1) = -0.499, C(u_2) = -0.42, S(u_1) = -0.562, S(u_2) = -0.66$
$P_{16}(-5.33,-1.777) \to C(u_1) = -0.539, C(u_2) = -0.328, S(u_1) = -0.45, S(u_2) = -0.48$

Οπότε για τις εντάσεις του φωτός θα έχουμε:
$I_P = 0.06I_u, I_{P_1} = 0.063I_u, I_{P_2} = 0.0416I_u, I_{P_3} = 0.0465I_u, I_{P_4} = 0.0333I_u,$
$I_{P_5} = 0.117I_u, I_{P_6} = 0.068I_u, I_{P_7} = 0.19I_u, I_{P_8} = 0.247I_u, I_{P_9} = 0.39I_u, I_{P_{10}} = 0.642I_u,$
$I_{P_{11}} = 0.79I_u, I_{P_{12}} = 1.24I_u, I_{P_{13}} = 1.28I_u, I_{P_{14}} = 1.39I_u, I_{P_{15}} = 1.026I_u, I_{P_{16}} = 0.84I_u$

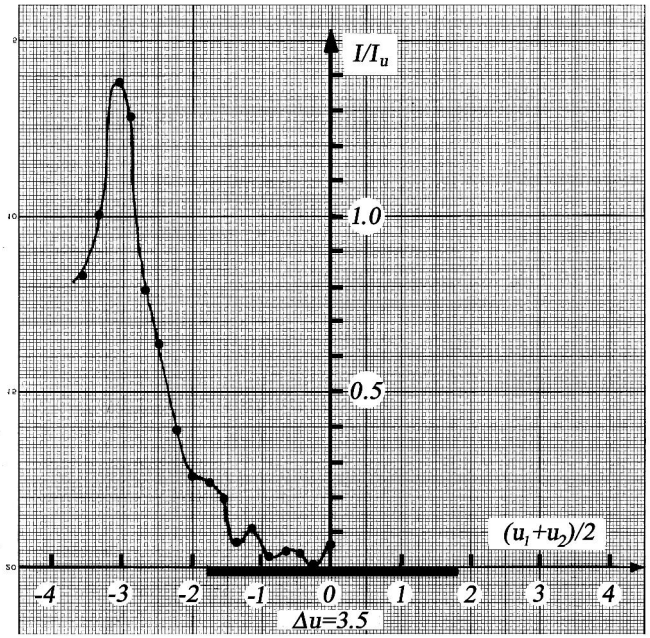
Όσον αφορά τώρα τις τιμές τις τιμές των $(u_1 + u_2)/2$ θα έχουμε:

$P \to 0, P_1 \to -0.223, P_2 \to -0.444, P_3 \to -0.666, P_4 \to -0.888,$
$P_5 \to -1.11, P_6 \to -1.328, P_7 \to -1.554, P_8 \to -1.777,$
$P_9 \to -1.999, P_{10} \to -2.22, P_{11} \to -2.443, P_{12} \to -2.664,$
$P_{13} \to -2.88, P_{14} \to -3.1, P_{15} \to -3.325, P_{16} \to -3.553$

Και μια πρόχειρη γραφική παράσταση της I/I_u συναρτήσει των $(u_1 + u_2)/2$ βλέπουμε στο διάγραμμα του (Σχ. 7.8.11.5).

Παρατηρούμε ότι μέσα στα όρια της γεωμετρικής σκιάς της αδιαφανούς λωρίδας $(\Delta x = 2\text{mm} \to \Delta u = 3.55)$, εμφανίζονται πέντε μικρής έντασης κροσσοί περίθλασης (μέγιστα μικρής έντασης αλλά μετρήσιμα). Στα όρια της γεωμετρικής σκιάς

βλέπουμε μια βαθμίδα μεταβολής της έντασης του φωτός. Και κατόπιν ένα μέγιστο έντασης. Στην πραγματικότητα (στο σχήμα μας δεν φαίνεται), οι αυξομειώσεις της έντασης του φωτός συνεχίζονται και εκτός των ορίων της λωρίδας. Μια ιδέα αυτού του γεγονότος φαίνεται στο (Σχ. 7.8.11.3) αν και το Δu είναι σχετικά διαφορετικό.



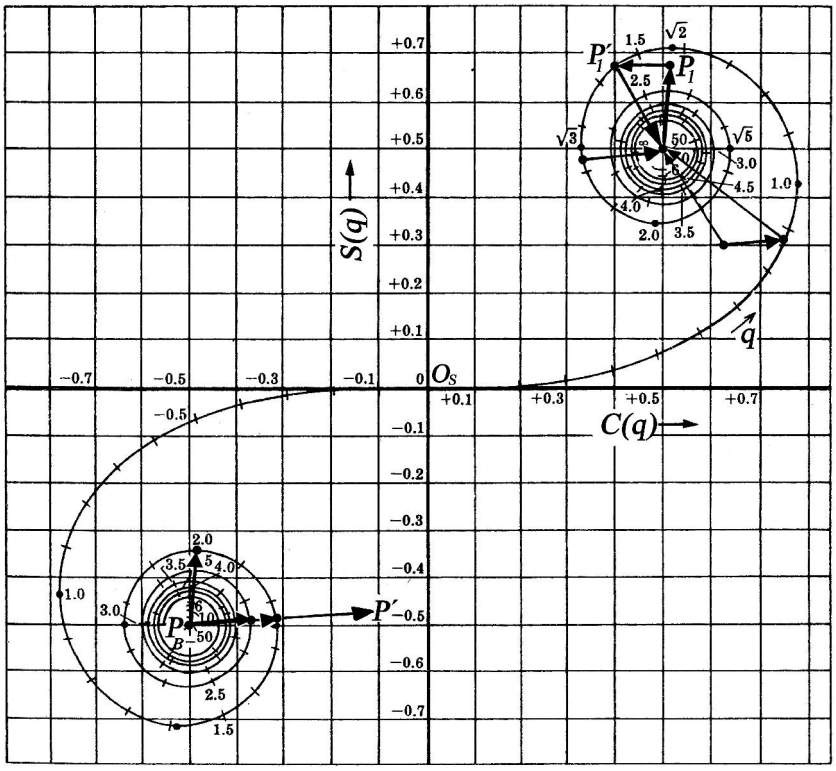
(Σχ. 7.8.11.5)

Μια πληρέστερη περιγραφή αυτού του είδους των προτύπων περίθλασης Fresnel θα δούμε στα επόμενα.

Με τη βοήθεια της σπείρας Cornu

Με τη βοήθεια της σπείρας του Cornu θα υπολογίσουμε την κανονικοποιημένη ένταση I/I_u σε τρία μόνο σημεία τα P, P_1 και P_4. Και αυτό επιτυγχάνεται με τον προσδιορισμό των μέτρων των συνισταμένων φασόρων με γραφικό τρόπο και την αντικατάσταση των τιμών τους στη γνωστή σχέση: $I_P = (I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$. Για τις τρις των περιπτώσεων ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Εγγράφουμε τα διανύσματα $\overline{B^- u_1}$ και $\overline{u_2 B^+}$ για κάθε μια των περιπτώσεων (Σχ. 7.8.11.6). Όπου u_1, u_2 είναι τα άκρα οριοθετούμενου από αυτά τόξου στη σπείρα. Για το σημείο $P(u_1, u_2) = P(-1.777, 1.777)$, είναι συμμετρικό σε σχέση με την αρχή O_s της σπείρας. Ενώ για τα σημεία $P_1(u_1, u_2) = P_1(-2, 1.554)$ και $P_4(u_1, u_2) = P_4(-2.665, 0.888)$ τα τόξα διολισθαίνουν προς τα αρνητικά της σπείρας. Αν τώρα για την κάθε μία των

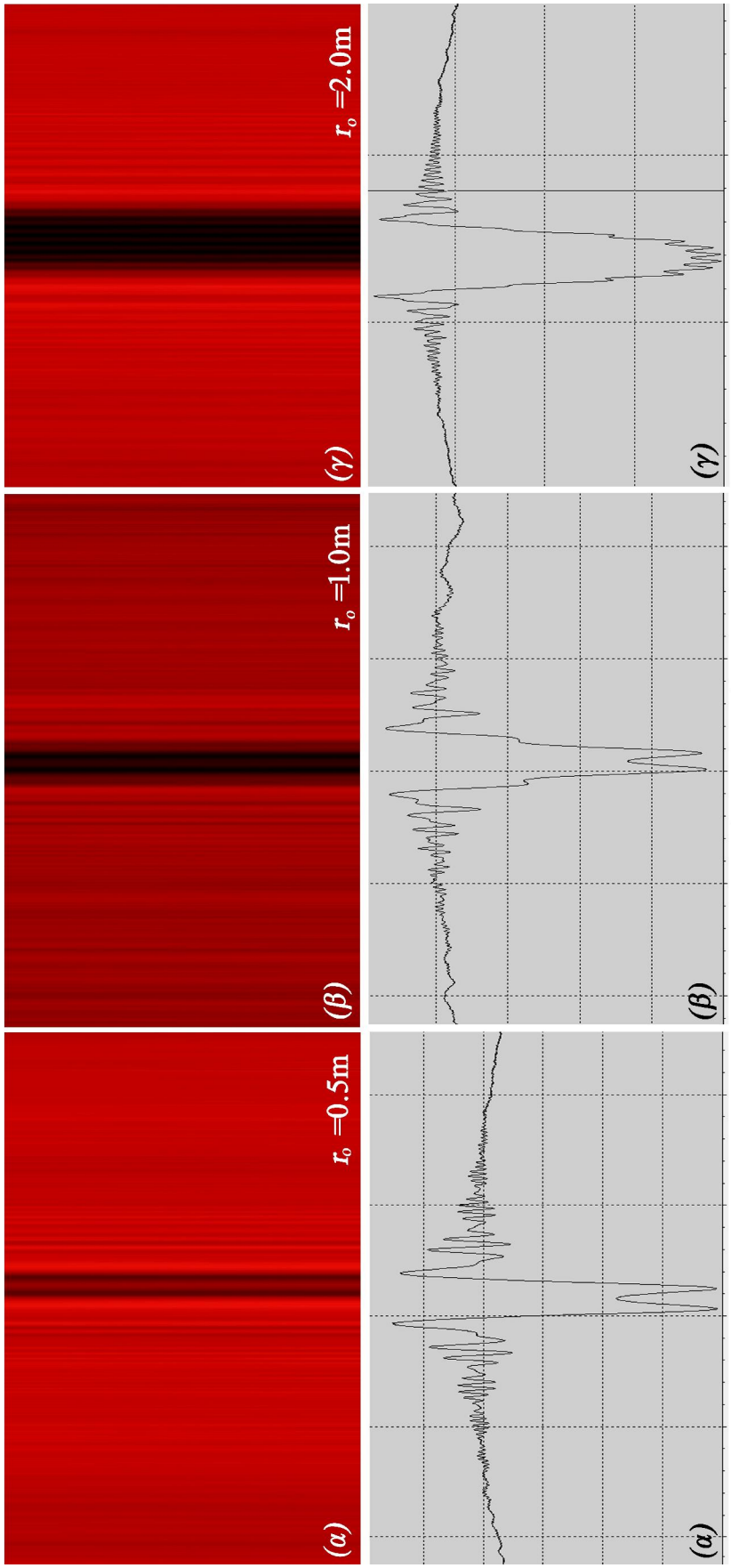
περιπτώσεων προσθέσουμε διανυσματικά τα $\overline{B^{-}u_1}$ και $\overline{u_2B^{+}}$, το μέτρο της συνισταμένης τους θα είναι το μέτρο του αντίστοιχου φάσορα $\mathbf{E}_{12}(u)$. Το μέτρο αυτού του φάσορα μετρείται κατά τα γνωστά με κανόνα και αφού γίνει αναγωγή στην κλίμακα όπου είναι εγγεγραμμένη η σπείρα, βρίσκουμε την πραγματική του τιμή.



(Σχ. 7.8.11.6)

Στο (Σχ. 7.8.11.6) φαίνεται η διαδικασία που προαναφέραμε και οι τελικοί φάσορες είναι οι: $\overline{PP'}, \overline{P_1P_1'}$ και $\overline{P_4P_4'}$. Όσο για τα μέτρα τους: $\left|\overline{PP'}\right| = 0.324$, $\left|\overline{P_1P_1'}\right| = 0.108$ και $\left|\overline{P_4P_4'}\right| = 0.237$. Οπότε: $I_P = 0.0524 I_u$, $I_{P_1} = 0.0058 I_u$ και $I_{P_4} = 0.028 I_u$. Οι τιμές αυτές είναι με αρκετά μεγάλη ακρίβεια παραπλήσιες με αυτές που υπολογίσαμε αναλυτικά.

Στις (Εικ. 7.8.11.7) μπορούμε να δούμε τα πρότυπα περίθλασης Fresnel από κατακόρυφες αδιαφανείς λωρίδες με πλάτη $d = \Delta x = 1, 1.5$ και 2mm, σε απόσταση από αυτές $r_0 = 1\text{m}$ που φωτίζονται διαδοχικά από ένα επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Επίσης κάτω από τις εικόνες βλέπουμε τα διαγράμματα της κατανομής της έντασης του φωτός, σε διεύθυνση κάθετη με αυτή των λωρίδων. Παρατηρούμε τα εξής: Στο εσωτερικό των ορίων της γεωμετρικής σκιάς τους, εμφανίζεται ένας ορισμένος αριθμός κροσσών περίθλασης χαμηλής φωτοαντίθεσης,

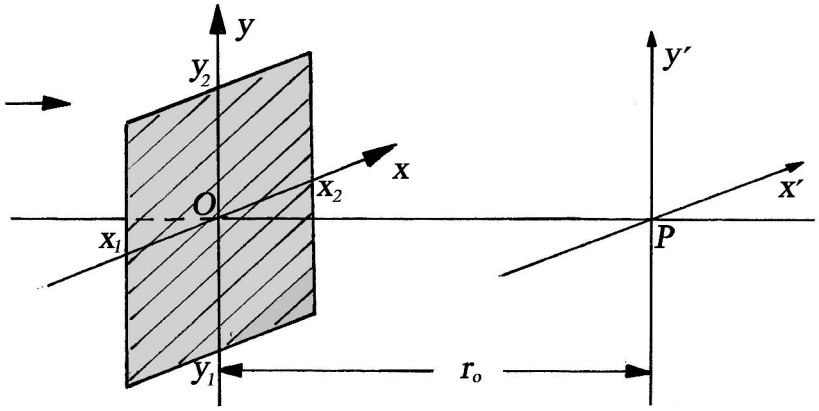


(Εικ. 7.8.11.7)

που βαίνει αυξανόμενος καθώς αυξάνεται το πλάτος της λωρίδας. Όμως έξω από τα όρια της γεωμετρικής σκιάς εμφανίζεται μεγάλο πλήθος κροσσών μιας ορισμένης δομής και μεγαλύτερης φωτοαντίθεσης. Πάντως σε αντιπαραβολή με την περίθλαση Fresnel από κυκλικό δίσκο και τ' αναφερόμενα για την κηλίδα του Poison, το ίδιο διαπιστώνουμε και για την περίπτωση της περίθλασης Fresnel από λωρίδες. Δηλ. ότι σε οποιαδήποτε θέση τοποθετηθεί το επίπεδο παρατήρησης (μέσα βέβαια στην περιοχή της περίθλασης Fresnel και όχι πολύ κοντά στη λωρίδα), σε κάθε θέση του οπτικού άξονα θα υφίσταται μέγιστο περίθλασης που όσο απομακρυνόμαστε η έντασή του θα γίνεται μικρότερη.

7.8.12 *Περίθλαση Fresnel από ορθογώνιο εμπόδιο*

Στο (Σχ. 7.8.12.1) βλέπουμε ένα ορθογώνιο εμπόδιο το οποίο φωτίζουμε από αριστερά με ένα επίπεδο ή ένα σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος. Θέλουμε να υπολογίσουμε σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα καθώς και σε οποιοδήποτε σημείο σε επίπεδα κάθετα σ' αυτόν, την ένταση του ηλ. πεδίου E_P και κατά προέκτα-



(Σχ. 7.8.12.1)

ση την ένταση I_P του φωτός για την περιοχή της περίθλασης Fresnel. Στην προκειμένη περίπτωση μεταξύ των d, r_0 και λ θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $r_0 < d^2/\lambda$. Όπου d η μέγιστη διάσταση του ορθογώνιου, r_0 η απόσταση από αυτό μετρούμενη πάνω στον οπτικό άξονα και λ το μ.κ. της φωτίζουσας ακτινοβολίας.

Με συλλογισμούς ανάλογους που έγιναν στις (§ 7.8.8,7.8.11), μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι τελικά η ένταση του φωτός κατά την περίθλαση Fresnel από ορθογώνιο εμπόδιο που οι διαστάσεις του κατά τους άξονες x, y είναι $(x_2 - x_1)$ και $(y_2 - y_1)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_P = \frac{I_u}{2}\left\{\left[-1+C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[-1+S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}\cdot \\ \cdot\left\{\left[-1+C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]^2+\left[-1+S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]^2\right\} \qquad (7.8.12.1)$$

όπου: $C(u_1), C(u_2), S(u_1), S(u_2), C(\upsilon_1), C(\upsilon_2), S(\upsilon_1), S(\upsilon_2)$ οι τιμές των ολοκληρωμάτων Fresnel, τις οποίες κατά τα γνωστά μπορούμε να βρούμε στον (Πίν. 7.8.8.2) αφού εκτελεστούν πρώτα οι μετασχηματισμοί: $(x_1,x_2)\to(u_1,u_2)$ και $(y_1,y_2)\to(\upsilon_1,\upsilon_2)$.

Παράδειγμα

Ένα τετράγωνο εμπόδιο πλευράς 2mm φωτίζεται από ένα επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$. Να υπολογιστεί η κανονικοποιημένη ένταση του φωτός στις θέσεις $r_0 = 3\text{m}$ και $r_0 = 0.5\text{m}$.

- Η διαδικασία μετασχηματισμού μεταξύ των x, y και u, υ θα δίνεται για επίπεδο μετ. κύματος από τις γνωστές σχέσεις: $u = x\sqrt{2/\lambda r_0}$ και $\upsilon = y\sqrt{2/\lambda r_0}$. Επομένως: α) Για $(x_1,x_2)=(-1,1)$, $(y_1,y_2)=(-1,1)$, $r_0 = 3\text{m}$ και $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ βρίσκουμε: $u_1 \simeq -1,\ u_2 \simeq 1,\ \upsilon_1 \simeq -1,\ \upsilon_2 \simeq 1$. Οπότε από τον (Πίν. 7.8.8.2) προκύπτει:

$$C(u_2)=C(\upsilon_2)=C(1)=0.7799 \qquad C(u_1)=C(\upsilon_1)=C(-1)=-0.7799$$
$$S(u_2)=S(u_2)=S(1)=0.4383 \qquad S(u_1)=S(u_1)=S(-1)=-0.4383$$

Και η αντικατάστασή τους στη (σχ. 7.8.12.1) μας δίνει $I_P = 0.027 I_u$.

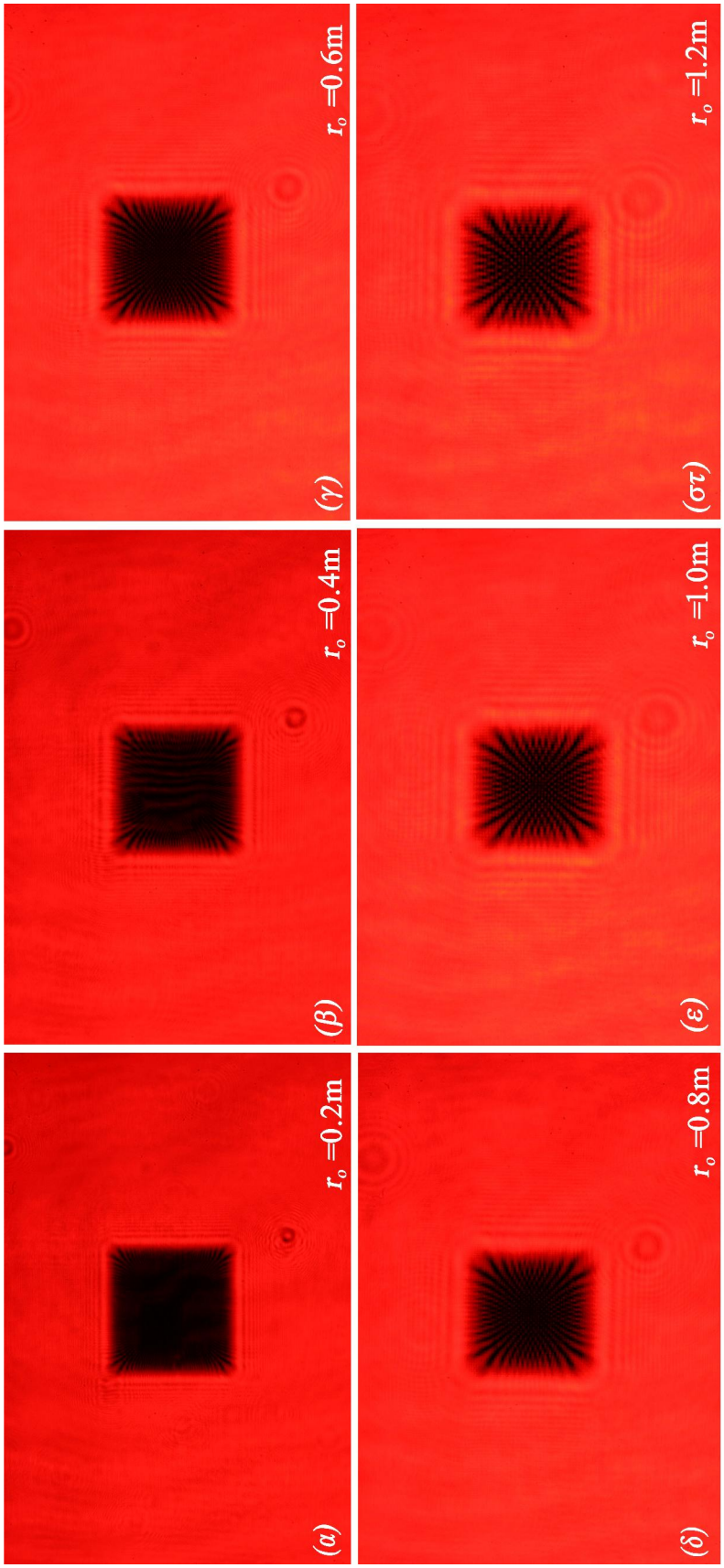
β) Για $(x_1,x_2)=(-1,1)$, $(y_1,y_2)=(-1,1)$, $r_0 = 0.5\text{m}$ και $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ βρίσκουμε: $u_1 \simeq -2.5,\ u_2 \simeq 2.5,\ \upsilon_1 \simeq -2.5,\ \upsilon_2 \simeq 2.5$. Άρα από τον (Πίν. 7.8.8.2) θα έχουμε:

$$C(u_2)=C(\upsilon_2)=C(2.5)=0.4574 \qquad C(u_1)=C(\upsilon_1)=C(-2.5)=-0.4574$$
$$S(u_2)=S(u_2)=S(2.5)=0.6192 \qquad S(u_1)=S(u_1)=S(-2.5)=-0.6192$$

Και η αντικατάστασή τους στη (σχ. 7.8.12.1) μας δίνει τελικά $I_P = 0.001 I_u$.

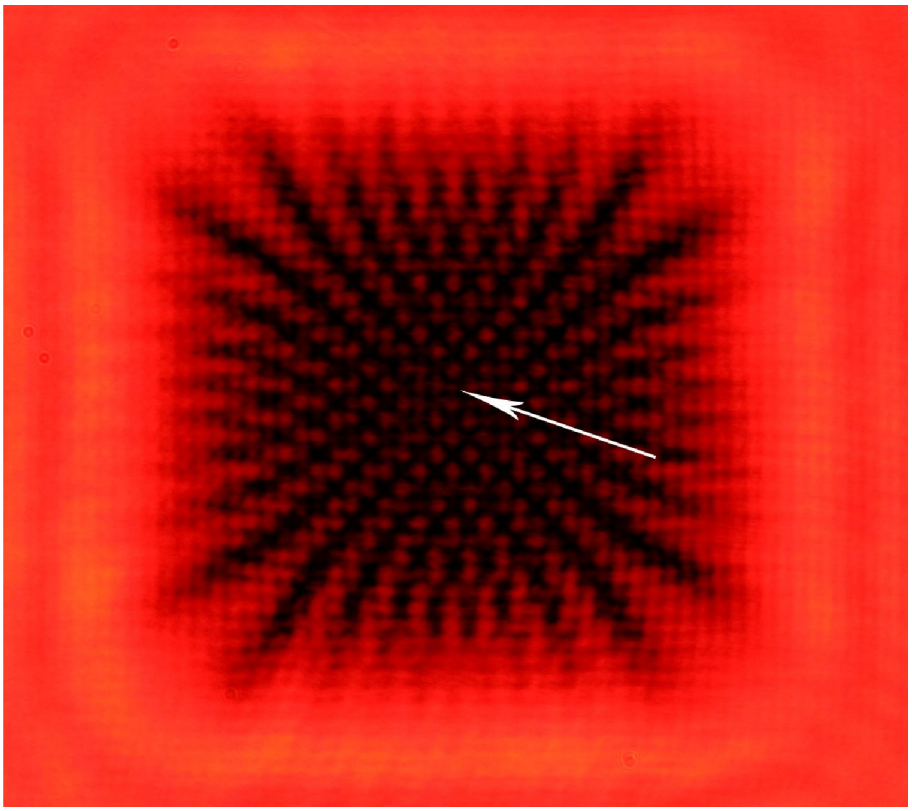
Στην προκειμένη περίπτωση, κατά μήκος του οπτικού άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του τετράγωνου εμπόδιου, η ένταση του φωτός είναι διάφορη του μηδενός αν και όσο πλησιάζουμε σ' αυτό τείνει να μηδενιστεί. Πρόκειται και εδώ για ένα είδος κηλίδας του Poison.

Στις (Εικ. 7.8.12.2) παραθέτουμε μια σειρά από πρότυπα περίθλασης, τα οποία προέκυψαν από την εξής πειραματική διαδικασία: Τετράγωνο αδιαφανές



(Εικ. 7.8.12.2)

εμπόδιο πλευράς 2mm, φωτίστηκε με επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Έχουν ληφθεί συνολικά έξη πρότυπα περίθλασης, σε επίπεδα κάθετα ως προς τον οπτικό άξονα, που οι αποστάσεις τους από το εμπόδιο ήταν: $r_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2\text{m}$. Οι θέσεις στις οποίες έχουν ληφθεί τα πρότυπα βρίσκονται μέσα στην περιοχή της περίθλασης Fresnel. Και το γεγονός οφείλεται στο ότι επειδή η μέγιστη διάσταση του εμποδίου είναι $d \simeq 2.82\text{mm}$, ο λόγος $\left(d^2/\lambda\right) \simeq 12.5\text{m}$. Κατ' αρχή το πρότυπο της (Εικ. 7.8.12.2α) (το πλέον πλησιέστερο στο εμπόδιο), εμφανίζει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του. Και μόνο στο εξωτερικό του αναπτύσσονται κροσσοί περίθλασης, που οφείλονται στις ακμές του (περίθλαση από τα τέσσερα ημιεπίπεδα που συνθέτουν το εμπόδιο και που καλύτερα διακρίνονται στις (Εικ. 7.8.12.2ε,στ)). Όμως ήδη από την απόσταση των $r_0 = 0.4\text{m}$



(Εικ. 7.8.12.3)

εμφανίζονται αυξομειώσεις της έντασης του φωτός και στο εσωτερικό τις γεωμετρικής σκιάς του εμποδίου. Τέλος η (Εικ. 7.8.12.2στ) μας δείχνει την εξαιρετικά περίπλοκη μορφή που εμφανίζει το πρότυπο περίθλασης στην απόσταση των $r_0 = 1.2\text{m}$. Η (Εικ. 7.8.12.3) είναι η (Εικ. 7.8.12.2στ) μεγεθυμένη. Το βέλος, μας δείχνει την πολύ μικρής έντασης κηλίδα του Poison.

7.8.13 *Η αρχή του Babnet, για τις περιοχές περίθλασης Fresnel και Fraunhofer*

Στη γενικότερη περίπτωση δύο περιθλώντα στοιχεία θα λέγονται συμπληρωματικά, όταν το άθροισμα των συναρτήσεων διαφάνειας πλάτους τους έχει τιμή ίση με τη μονάδα. Ένα παράδειγμα συμπληρωματικών περιθλώντων στοιχείων είναι μια σχισμή μεγάλου μήκους και ορισμένου πλάτους πάνω σε αδιαφανές διάφραγμα και μια αδιαφανής ευθύγραμμη λωρίδα του ίδιου πλάτους πάνω σε ένα διαφανές π.χ. γυάλινο πλακίδιο.

Η αρχή του Babinet για την περιοχή της περίθλασης Fresnel

Έστω ότι E_1, E_2 είναι οι κατανομές των ηλ. πεδίων που προκύπτουν το καθένα ξεχωριστά κατά την περίθλαση ενός προσπίπτοντος επιπέδου ή σφαιρικού μετ. κύματος σε καθένα των συμπληρωματικών περιθλώντων στοιχείων, στην περιοχή της περίθλασης Fresnel. Τότε είναι ευλογοφανές να υποθέσουμε ότι για το άθροισμα των δύο πεδίων ισχύει η σχέση:

$$E_1 + E_2 = E_u \tag{7.8.13.1}$$

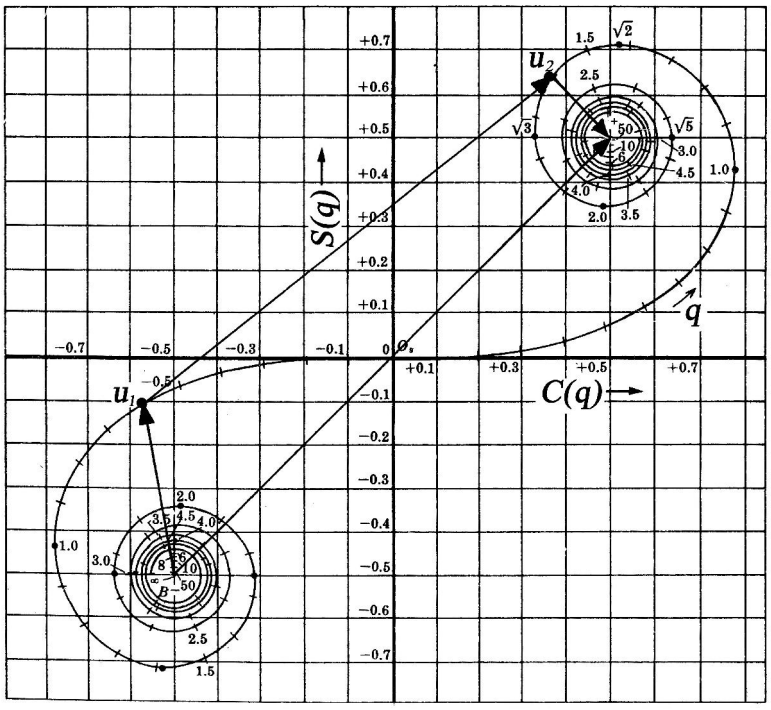
όπου E_u η κατανομή της έντασης του ανεμπόδιστου μετ. κύματος. Η τελευταία σχέση εκφράζει την αρχή του Babinet για την περιοχή της περίθλασης Fresnel.

Μια απεικονιστική έκφραση αυτής της αρχής μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της σπείρας Cornu και φαίνεται στο (Σχ. 7.8.13.1). Βλέπουμε τις εντάσεις E_1, E_2 των ηλ. πεδίων που αφορούν τη σχισμή και το ευθύγραμμο εμπόδιο, για ένα οποιοδήποτε σημείο P' στον οπτικό άξονα ή σε επίπεδο κάθετο προς αυτόν. Για τη θέση αυτή (στην περίπτωσή μας $\widehat{u_1 O_s u_2} = 2.2$), το διάνυσμα $\overline{u_1 u_2}$ παριστάνει το πεδίο E_1 στο P' που οφείλεται στη σχισμή. επίσης το άθροισμα των διανυσμάτων: $\overline{B^- u_1}$ και $\overline{u_2 B^+}$ μας δίνει την ένταση του ηλ. πεδίου στη θέση P' που οφείλεται στο ευθύγραμμο εμπόδιο. Τότε μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα:

$$\overline{B^- u_1} + \overline{u_1 u_2} + \overline{u_2 B^+} = \overline{B^- B^+} \tag{7.8.13.2}$$

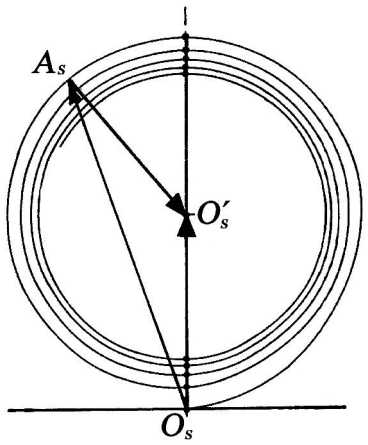
όπου $\overline{B^- B^+}$ είναι η ένταση του ηλ. πεδίου στο σημείο P' του ανεμπόδιστου μετ. κύματος.

Ένα δεύτερο παράδειγμα εφαρμογής της αρχής του Babinet για την περιοχή της περίθλασης Fresnel είναι όταν τα περιθλώντα στοιχεία είναι: Ένα κυκλικό ά-



(Σχ. 7.8.13.1)

νοιγμα και το συμπληρωματικό του κυκλικό εμπόδιο. Τα πεδία E_1, E_2 που προέρχονται από αυτά, τα παριστάνουμε κατά τα γνωστά στη σπείρα ταλάντωσης όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.8.13.2). $\overline{O_s A_s}$ είναι η ένταση E_1 του ηλ. πεδίου σ' ένα σημείο



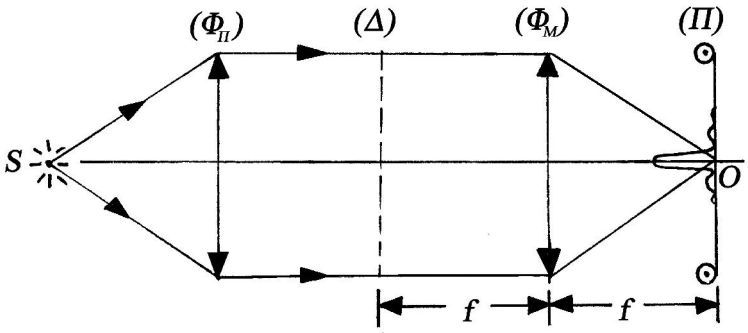
(Σχ. 7.8.13.2)

P' πάνω ή εκτός του οπτικού άξονα και σε απόσταση r_0 από το κυκλικό άνοιγμα. $\overline{A_s O'_s}$ είναι η ένταση του ηλ. πεδίου E_2 σ' ένα σημείο P' που οφείλεται στο κυκλι-

κό εμπόδιο. Η πρόσθεση αυτών των διανυσμάτων θα μας δώσει το διάνυσμα $\overline{O_s O_s'}$ που παριστάνει την ένταση του ηλ. πεδίου στη θέση P' του μη εμποδιζόμενου μετ. κύματος, επιπέδου ή σφαιρικού.

Η αρχή του Babinet για την περιοχή της περίθλασης Fraunhofer

Μας είναι γνωστή (βλ. § 7.3) η διάταξη που χρησιμοποιούμε (με τη βοήθεια φακών) για τη λήψη των προτύπων περίθλασης Fraunhofer. Πρόκειται για το γνωστό περιθλασίμετρο, όπως αυτό φαίνεται στο (Σχ. 7.8.13.3). Η σημειακή πηγή S



(Σχ. 7.8.13.3)

που εκπέμπει μονοχρωματικό φως, βρίσκεται στο εμπρός εστιακό επίπεδο του παραλληλιστή φακού Φ_Π. Σαν αποτέλεσμα, από το φακό θ' αναδυθεί ένα επίπεδο μετ. κύματος. Στη θέση Δ τοποθετείται το εκάστοτε περιθλόν στοιχείο. Και σε απόσταση από αυτό ίση με την εστιακή του f, βρίσκεται ο φακός Φ_M. Τέλος σε απόσταση και πάλι f βρίσκεται το πέτασμα Π, πάνω στο οποίο παίρνουμε το εκάστοτε πρότυπο περίθλασης του περιθλώντος στοιχείου στη θέση Δ.

Έστω τώρα θεωρητικά ότι στη θέση Π αθροίζουμε τα πεδία E_1 και E_2 δύο συμπληρωματικών περιθλώντων στοιχείων. Τότε το συνολικό αποτέλεσμα θα είναι το E_u'. Δηλ. το μη εμποδιζόμενο μετ. κύματος. Και αυτό επειδή το 'συνολικό' πεδίο προήλθε από ένα 'περιθλόν άνοιγμα' με συνάρτηση διαφάνειας $t = 1$ (διαφανές περιθλόν άνοιγμα απείρων διαστάσεων). Επομένως:

$$E_1 + E_2 = E_u' \qquad (7.8.13.3)$$

Όμως στην πράξη, εξαιτίας του τρόπου λήψης των E_1, E_2 αν στη θέση Δ δεν υπάρχει συγκεκριμένο περιθλόν στοιχείο τότε $E_u' = 0$. Ή ακριβέστερα $E_u' = 0$ εκτός από τη θέση O του οπτικού άξονα όπου εμφανίζεται η οξύτατη και πολύ μικρών δια-

στάσεων κατανομή έντασης του φωτός λόγω της περίθλασης του προσπίπτοντος επιπέδου μετ. κύματος από τα κυκλικό όριο του φακού Φ_M. Άρα λοιπόν μπορούμε στη (σχ. 7.8.13.3) θα θέσουμε: $E'_u = 0$ (εκτός όπως είπαμε του κέντρου του προτύπου) οπότε:

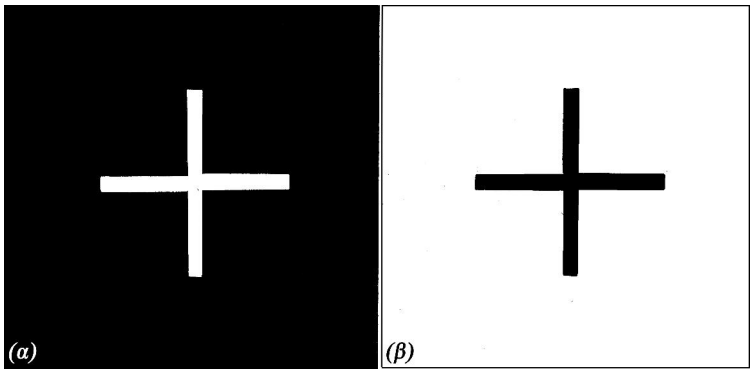
$$E_1 + E_2 = 0 \quad \text{ή} \quad E_1 = -E_2 \tag{7.8.13.4}$$

Από την οποία προκύπτει το εξαιρετικά ενδιαφέρον αποτέλεσμα που μας λέγει ότι: Για την περιοχή της περίθλασης Fraunhofer, τα περιθλώμενα ηλ. πεδία που προέρχονται από δύο συμπληρωματικά περιθλώντα στοιχεία είναι ίδια, με μόνη τη διαφορά ένα παράγοντα φάσης π rad $\left(-1 = e^{i\pi}\right)$.Επομένως:

$$I_1 = |E_1|^2 = |E_2|^2 = I_2 \tag{7.8.13.5}$$

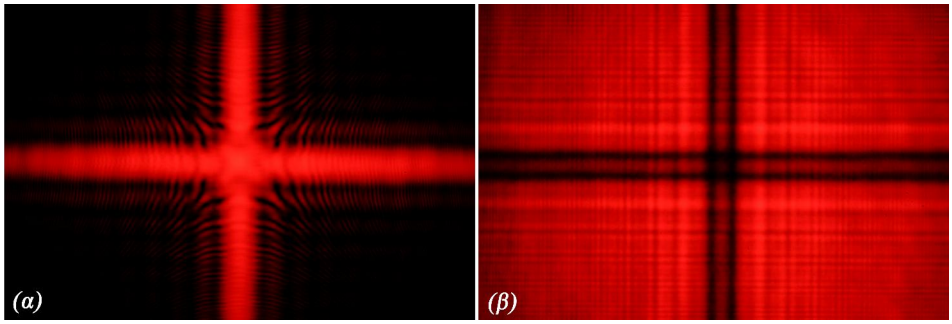
που σημαίνει ότι η κατανομές της έντασης του φωτός από δύο συμπληρωματικά περιθλώντα στοιχεία είναι πανομοιότυπες, με μόνη διαφορά το κεντρικό τους σημείο.

Παραδείγματα προτύπων περίθλασης Fraunhofer και Fresnel που προέρχονται από συμπληρωματικά περιθλώντα στοιχεία μπορούμε να δούμε στα επόμενα. Στα (Σχ. 7.8.13.4) βλέπουμε δύο συμπληρωματικά περιθλώντα στοιχεία σταυροει-



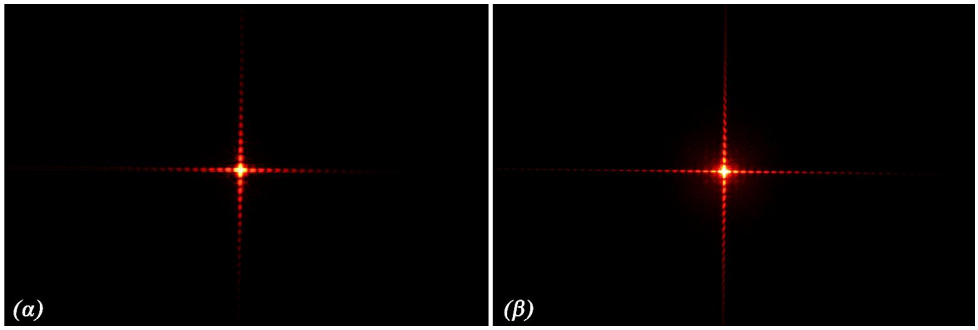
(Σχ. 7.8.13.4)

δούς μορφής. Στις (Εικ. 7.8.13.5) φαίνονται τα αντίστοιχα πρότυπα περίθλασης που έχουν ληφθεί σε περιοχή περίθλασης Fresnel. Είναι προφανές ότι εκτός από μια γενικότερη σταυροειδή συμμετρία, τα δύο πρότυπα δεν ομοιάζουν μεταξύ τους. Το αντίθετο συμβαίνει με τις (Εικ. 7.8.13.6). Εκεί βλέπουμε τα πρότυπα περίθλασης



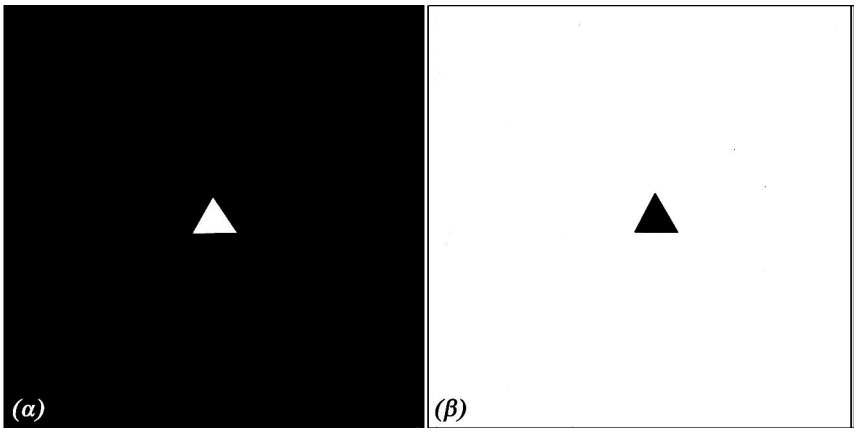
(Εικ. 7.8.13.5)

των περιθλώντων συμπληρωματικών στοιχείων των (Εικ. 7.8.13.4), τα οποία όμως έχουν ληφθεί σε περιοχή περίθλασης Fraunhofer. Η ομοιότητά τους είναι πλήρης εκτός της (Εικ. 7.8.13.6β) που το κέντρο της είναι πιο φωτεινό και που οφείλεται



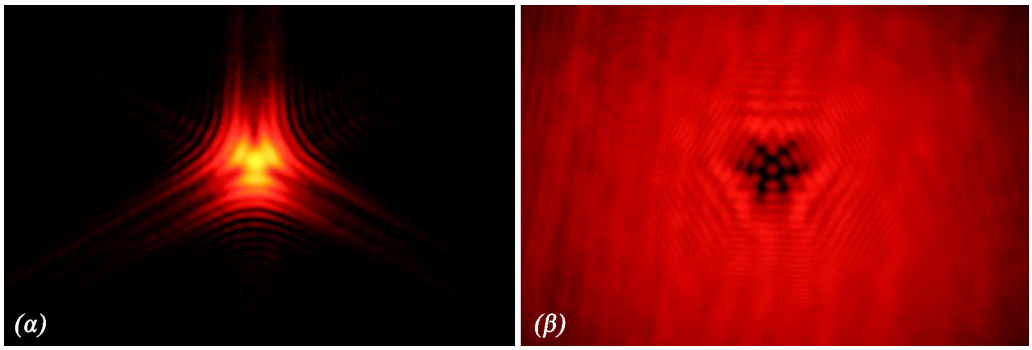
(Εικ. 7.8.13.6)

– σύμφωνα με τα προαναφερόμενα – στην επί πλέον υπάρχουσα σημειακή κατανομή της έντασης του φωτός. Διαπιστώνουμε τελικά την επιβεβαίωση της αρχής του Babinet για τις δύο των περιπτώσεων περίθλασης Fresnel και Fraunhofer.



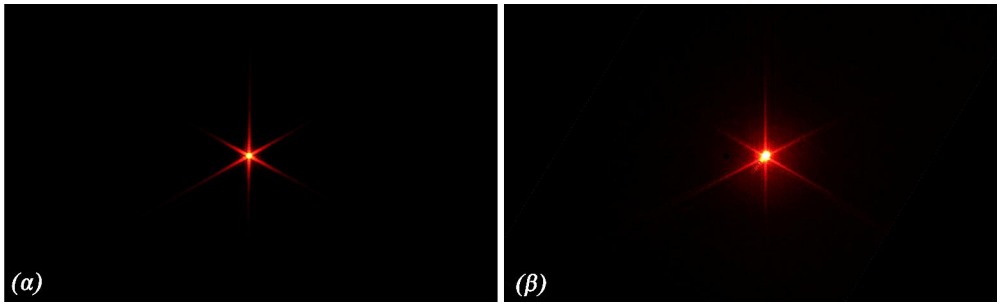
(Σχ. 7.8.13.7)

Σε ένα δεύτερο παράδειγμα, σαν συμπληρωματικά περιθλώντα στοιχεία χρησιμοποιούμε αυτά του (Σχ. 7.8.13.7) που είναι τριγωνικής συμμετρίας. Στις (Εικ. 7.8.13.8) μπορούμε να δούμε τα πρότυπα περίθλασης των αντίστοιχων στοιχείων



(Εικ. 7.8.13.8)

στην περιοχή της περίθλασης Fresnel . Και στις (Εικ. 7.8.13.9) τα αντίστοιχα πρότυπα περίθλασης στην περιοχή της περίθλασης Fraunhofer. Τα συμπεράσματα είναι



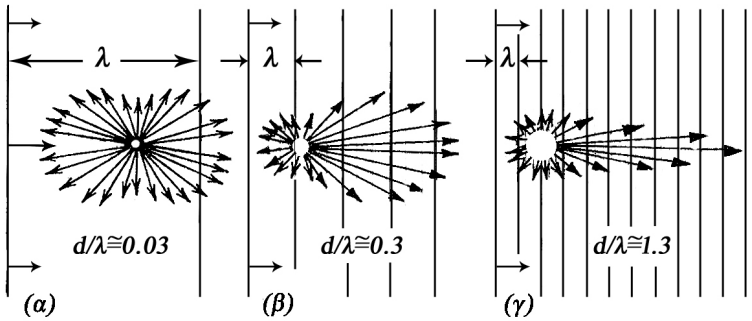
(Εικ. 7.8.13.9)

ακριβώς τα ίδια με τα προηγούμενα, όσον αφορά την εφαρμογή της αρχής του Babinet για τις δύο περιοχές περίθλασης.

7.9 *Ανάδειξη φαινομένων που σχετίζονται με την περίθλαση και τη σκέδαση του φωτός*

Στο (Κέφ. 5: Πόλωση του φωτός (§ 5.8.3)), περιγράψαμε με στοιχειώδη τρόπο το φαινόμενο της σκέδασης του φωτός. Πρόκειται σε γενικές γραμμές για το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης της Η/Μ ακτινοβολίας με την ύλη. Όπου σαν ύλη εδώ θεωρούμε τα διαφόρων ειδών και μεγεθών σωματίδια ορισμένης διαμέτρου και δείκτη διάθλασης καθώς και διαφόρων ειδών ιδιομορφίες της ύλης (όπως π.χ. η από σημείο σε σημείο διαφορές της πυκνότητας της μάζας ενός αερίου). Το πρόβλημα αφορά στον προσδιορισμό της έντασης του σκεδανύμενου από τα σωματίδια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου κατά μέτρο και διεύθυνση σ' ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου, καθώς και την κατάσταση πόλωσής τους. Για την περίπτωση που η προσπίπτουσα ακτινοβολία ανήκει στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος, τότε μιλούμε για σκέδαση του φωτός. Όπως προαναφέραμε, οι παράμετρες που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της σκέδασης του φωτός είναι η διάμετρος d των σωματιδίων, ο δ.δ. τους n καθώς και το μ.κ. λ της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας. Όμως πολύ σημαντικό ρόλο παίζει το σχήμα τους και η μορφολογία της επιφάνειάς τους, το αν είναι διηλεκτρικά ή αγώγιμα κλπ.

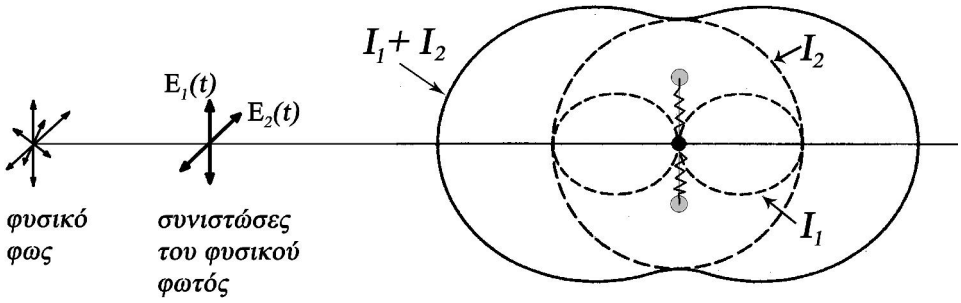
Σε πολύ γενικές γραμμές είχαμε αναφερθεί σε δύο περιοχές σκέδασης: Κατά Rayleigh και Mie αν και η θεωρία της σκέδασης κατά Mie είναι μια γενικότερη θεωρία η οποία περιλαμβάνει την κατά Rayleigh. Ο διαχωρισμός γίνεται με βάση την τιμή του λόγου d/λ. Που σημαίνει ότι όταν η διάμετρος των σωματιδίων είναι μικρότερη ή μάλλον πολύ μικρότερη από το μ.κ. της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας, βρισκόμαστε στην περιοχή της σκέδασης Rayleigh. Τότε αποδεικνύεται ότι



(Σχ. 7.9.1)

η σκεδανύμενη από κάθε σωματίδιο ένταση του φωτός σχεδόν δεν έχει προτιμητέα διεύθυνση, εκτός από αυτήν της διεύθυνσης της κάθετης προς τη διεύθυνση διάδοσης που είναι σχετικά μικρότερη όπως φαίνεται στην τομή του πολικού διαγράμματος του (Σχ.7.9.1α). Η μορφολογία αυτού του πολικού διαγράμματος προκύπτει από

τη (σχ. 5.8.3.1) με την προϋπόθεση ότι το προσπίπτον φως είναι φυσικό. Πράγματι με το δεδομένο ότι τα σωματίδια (κέντρα σκέδασης) είναι πολύ μικρά σε σχέση με το μ.κ. της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας, μπορούμε με μεγάλη προσέγγιση να τα θεωρήσουμε σαν απλούς αρμονικούς ταλαντωτές. Οπότε το προσπίπτον φυσικό φως (ένταση ηλεκτρικού πεδίου), μπορεί ν' αναλυθεί σε δύο συνιστώσες (Σχ. 7.9.2). Αυτήν κατά μήκος του διπόλου (στο επίπεδο του σχήματος) καθώς και την



(Σχ. 7.9.2)

κάθετη προς αυτήν. Όμως για το γραμμικά πολωμένο φως που δονεί το δίπολο κατά μήκος του άξονά του, η σκεδανύμενη ένταση της ακτινοβολίας θα παριστάνεται κατά τα γνωστά (βλ. § 5.8.3) από ένα τοροειδές (Σχ. 5.8.3.5) και δίνεται από τη (σχ. 5.8.3.10). Αν όμως το δίπολο δονηθεί κάθετα προς τον άξονά του, τότε η ένταση της σκεδανύμενης ακτινοβολίας θα είναι η ίδια προς οποιαδήποτε διεύθυνση, που σημαίνει ότι θα παρίσταται από μια σφαίρα στο χώρο. Άρα γι' αυτό το είδος το δίπολο και για πρόσπτωση σ' αυτό φυσικού φωτός, η συνολικά σκεδανύμενη ακτινοβολία θα είναι το άθροισμα των δύο προαναφερόμενων. Στο (Σχ. 7.9.2) μπορούμε να δούμε σε τομή (στο επίπεδο του σχήματος) ξεχωριστά τα πολικά διαγράμματα των εντάσεων του φωτός (διακεκομμένες γραμμές) καθώς και το άθροισμά τους συνεχής γραμμή), που αντιστοιχεί στη σκεδανύμενη κατά Rayleigh ακτινοβολία.

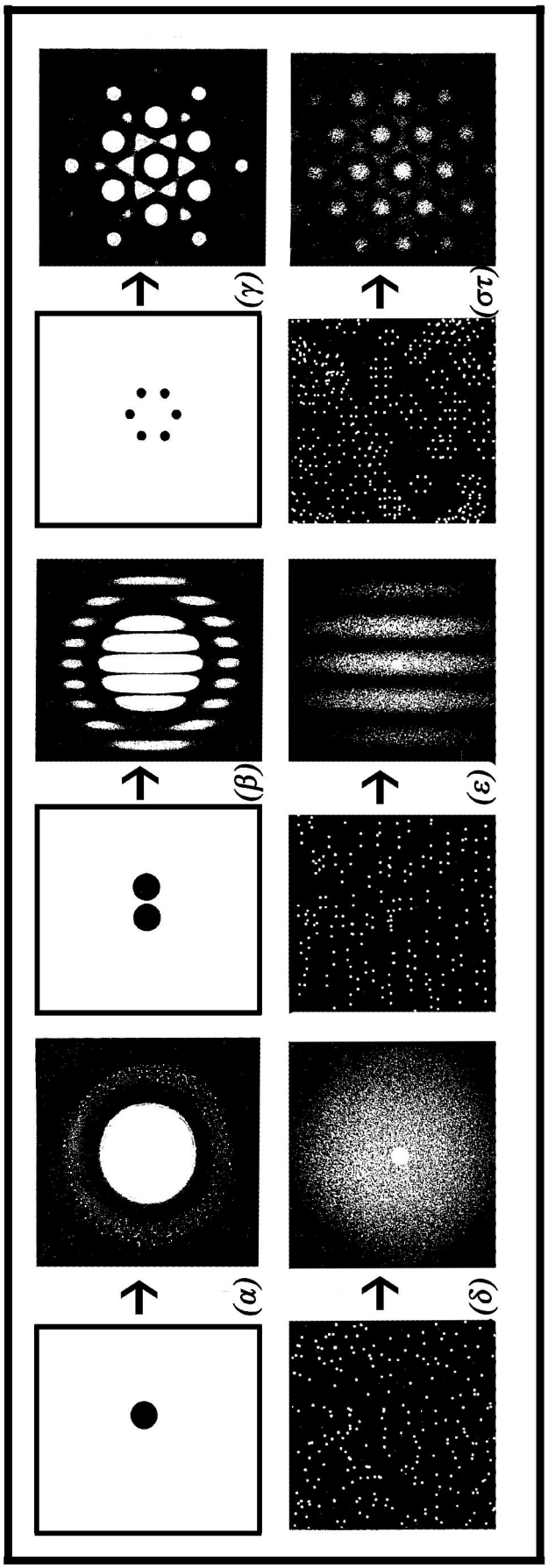
Όσο όμως σε γενικές γραμμές το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας γίνεται συγκρίσιμο με το μέγεθος του σωματιδίου, τότε η σκεδανύμενη από αυτό ακτινοβολία αποκτά προτιμητέα κατεύθυνση, αυτή της προσπίπτουσας όπως φαίνεται στα (Σχ. 7.9.1.β,γ) με πολύ μικρή την ένταση της οπισθοανακλώμενης. Οι περιπτώσεις αυτές είναι που περιγράφονται από τη θεωρία της σκέδασης κατά Mie. Αν τελικά το μέγεθος των υποτιθέμενων 'κέντρων σκέδασης' είναι υπερβολικά μεγαλύτερο σε σχέση με το μ.κ. του προσπίπτοντος σ' αυτά φωτός (π.χ. μια μάζα γυαλιού ή νερού που μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν ένα σύνολο από αλληλεπιδρώντες συζευγμένους μεταξύ τους ταλαντωτές), τότε η αλληλεπίδραση φωτός - ύλης γίνεται με τη βοήθεια της θεωρίας της ανάκλασης και της διάθλασης από οπτικά υλικά δ.δ. n. Με τη βοήθεια αυτής της θεωρίας καθώς και αυτής του διασκεδασμού του φω-

τός που μας οδηγεί στην ανάδειξη της ανάλυσής του (Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.6)), ερμηνεύσαμε το φαινόμενο του ουράνιου τόξου. Το τελευταίο κατά τα γνωστά οφείλεται στην πρόσπτωση του φωτός σε καταιονισμό σταγονιδίων της βροχής.

Ο λόγος της παράθεσης των προαναφερόμενων αυτής της παραγράφου, είναι προς την κατεύθυνση της απάντησης στο εξής ερώτημα: Πως σχετίζεται η περίθλαση του φωτός – όπως τη μελετήσαμε μέχρις εδώ – με τη θεωρία της σκέδασης του φωτός; Οπωσδήποτε και το φαινόμενο της περίθλασης (κοντινού ή μακρινού πεδίου) αφορά την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη. Δηλ. μελετούμε την πρόσπτωση του φωτός σε διάφορα περιθλώντα στοιχεία, με αποτέλεσμα τον αναλυτικό υπολογισμό της κατανομής του ηλ. πεδίου και κατά προέκταση της έντασης του φωτός. Η περίθλαση όμως στις περιοχές Fresnel και Fraunhofer (που ανάγεται στην θεωρία του Kirchhoff (βλ. ΘΕΜΑ 1)) μελετούν το πεδίο σαν βαθμωτό μέγεθος. Και ο λόγος είναι ότι οι διαστάσεις των περιθλώντων στοιχείων (ανοιγμάτων εμποδίων κλπ.) είναι πολύ μεγαλύτερες του μ.κ. της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας. Με συνεπεία – όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου – η σύζευξη μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου να είναι υπολογίσιμη μόνο σε απόσταση από τα όριά τους λίγων μ.κ. Εξ' ου και η περιγραφή του φαινομένου με τη βοήθεια της έντασης του ηλ. πεδίου ή αντίστοιχα του μαγνητικού. Σε αντίθετη περίπτωση – που αφορά συγκρίσιμες διαστάσεις περιθλώντων στοιχείων και μηκών κύματος προσπιπτουσών σ' αυτά ακτινοβολιών – τα φαινόμενα θα πρέπει να μελετηθούν με τη βοήθεια της αυστηρής θεωρίας της περίθλασης, που είναι στη βάση της διανυσματική. Για την τελευταία μπορούμε να πούμε ότι σχετίζεται με τη θεωρία της σκέδασης του φωτός.

Ένας σημαντικός λόγος – όπως αναφέραμε – που διαφοροποιούνται τ' αποτελέσματα των θεωριών της σκέδασης του φωτός από αυτήν της κλασσικής περίθλασης, είναι το ότι στην πρώτη από αυτές λαμβάνεται υπόψη η φύση των σκεδαζόντων σωματιδίων. Π.χ. δεν μπορεί να παραβλεφθεί η μορφολογία τους (σφαιρικά, κυλινδρικά, πρισματικά κλπ). Επίσης ένα σφαιρικό π.χ. σωματίδιο διαμέτρου d μπορεί να συνίσταται από διαφανές διηλεκτρικό δ.δ. n ή ν' απορροφά σε μια περιοχή του Η/Μ φάσματος (μιγαδικός δ.δ.). Μπορεί η επιφάνειά του να είναι λεία ή να έχει ιδιομορφίες, να είναι τελείως ανακλαστική κλπ. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός του σκεδανύμενου πεδίου κατά Mie θα μας δώσει σχετικά διαφορετικό αποτέλεσμα σε σύγκριση με αυτά της περίθλασης, της οποίας οι υπολογισμοί στηρίζονται στη διάμετρο d και το μ.κ. λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, δηλ. στους υπολογισμούς μιας βαθμωτής θεωρίας.

Επίσης μια σημαντική παράμετρος της θεωρίας της σκέδασης κατά Mie είναι όσον αφορά σε τελευταία ανάλυση την κατανομή της έντασης του φωτός όχι α-



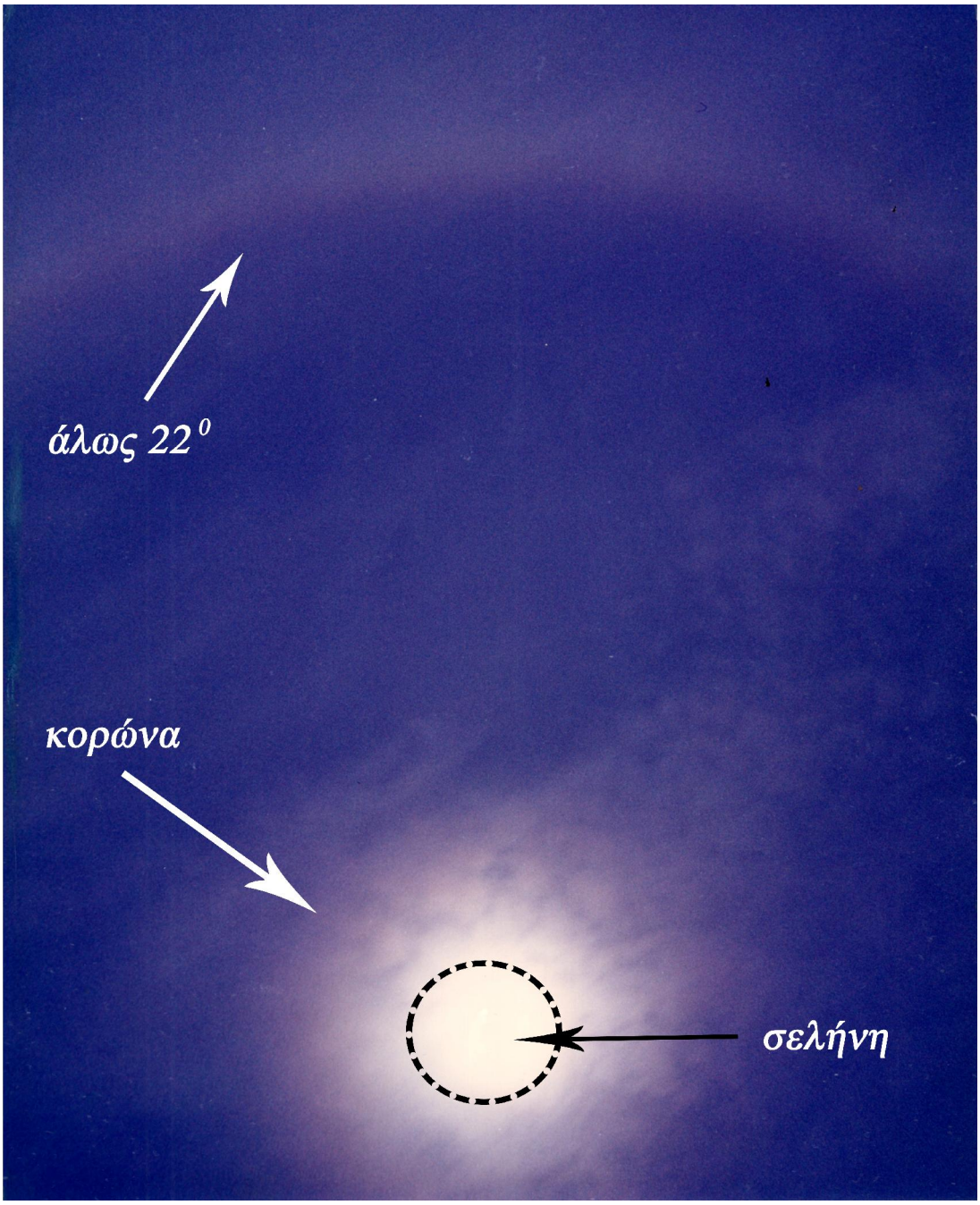
(Εικ. 7.9.3)

πό ένα σκεδάζον σωματίδιο, αλλά από ένα με τυχαίο τρόπο κατανεμημένο σύνολό τους όπως συνήθως συμβαίνει στην πράξη. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το διακριτό υπολογιζόμενο πρότυπο της έντασης του φωτός, θα εμφανίζει από σημείο σε σημείο τυχαίες διακυμάνσεις της έντασης του φωτός με τη μορφή φωτεινών και σκοτεινών 'κόκκων' (speckles). Το ίδιο ακριβώς φαινόμενο συναντούμε και στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer όπως μπορούμε να δούμε στις (Εικ. 7.9.3). Στην πάνω σειρά βλέπουμε τα περιθλώντα στοιχεία: Κυκλικό άνοιγμα, δύο κυκλικά ανοίγματα και έξη τοποθετημένα στις κορυφές κανονικού εξαγώνου. Ακριβώς δίπλα από το καθένα παρατίθεται το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer. Στην κάτω σειρά και σε αντιστοιχία, σαν περιθλώντα στοιχεία έχουμε μια τυχαία κατανομή από κυκλικά (ιδίων διαστάσεων) ανοίγματα, ζευγών κυκλικών ανοιγμάτων καθώς και κυκλικών ανοιγμάτων τοποθετημένων σε κορυφές κανονικών εξαγώνων. Στις διπλανές τους φωτογραφίες μπορούμε να δούμε τα διαμορφωμένα από την κοκκίαση πρότυπα περίθλασης (μόνο στην περιοχή του δίσκου του Airy). Μια τυχαία κατανομή σχεδόν κυκλικών εμποδίων (κόκκοι γύρης του φυτού Λυκοπόδιο με $d \simeq 28\mu\text{m}$) φαίνεται στην (Εικ. 7.9.1.5γ). Το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer αυτού του περιθλώντος στοιχείου μπορούμε να δούμε στην (Εικ. 7.9.1.5δ) όταν όμως φωτίζεται με λευκό φως. Είναι σαφής η διαμόρφωση του προτύπου περίθλασης του ενός κυκλικού ανοίγματος (βλ. (Εικ. 7.9.1.5β)) από 'κόκκους' ακτινωτής μορφής.

7.9.1 *Σκέδαση (περίθλαση) του φωτός του ηλίου και της σελήνης από τα σταγονίδια των υδρατμών και τους παγοκρυσταλλίτες της ατμόσφαιρας της γης (κορώνες, δόξες και άλωες)*

Είναι συνηθισμένο φαινόμενο στο νυκτερινό ουρανό να βλέπουμε γύρω από τη σελήνη, ιδίως όταν αυτή βρίσκεται στη 'γέμισή', της να περιβάλλεται από μια αχλή, της οποίας οι διαστάσεις είναι λίγες διάμετροι της ίδιας. Τις περισσότερες φορές ο δίσκος αυτός με τα ασαφή όρια, είναι λευκής απόχρωσης (ή ακόρεστης γαλαζωπής), τα εξωτερικά της όμως όρια είναι κοκκινορόδινα (βλ. την κάτω περιοχή της (Εικ. 7.9.1.1). Το φαινόμενο αυτό μπορεί να γίνεται πιο έντονο όταν η σελήνη προβάλλεται μέσα από μικρού πάχους (σχεδόν διαφανή) κινούμενα σύννεφα. Τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε μια μεγαλύτερη ποικιλία χρωμάτων, ακόμη δε σε πιο σπάνιες περιπτώσεις την εμφάνιση γύρο από την κεντρική κατανομή, δακτυλίων με μια συγκεκριμένη αλληλουχία χρωμάτων. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στην (Εικ. 7.9.1.5α). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται κορώνα και η γενεσιουργός του αιτία – όπως θα δούμε στα επόμενα – είναι η ύπαρξη στην ατμόσφαιρα της γης συγκεντρώσεων σταγονιδίων νερού, όπως στα νέφη που προαναφέραμε, ή η συγκέντρωση συσσωματωμάτων κρυσταλλιτών πάγου σε πολύ μεγάλες βέβαια ποσότητες.

Όσον αφορά τη δομή και τον προσανατολισμό των παγοκρυσταλλιτών, τα τελευταία σχετίζονται με την ανάδειξη πολύ μεγάλου αριθμού ατμοσφαιρικών φαινομένων από τα οποία στα επόμενα θα περιγράψουμε μόνο ένα: Την εμφανιζόμενη άλω των 22^{0} γύρω από τη σελήνη (ή τον ήλιο). Η τελευταία με τη μορφή δακτυλί-



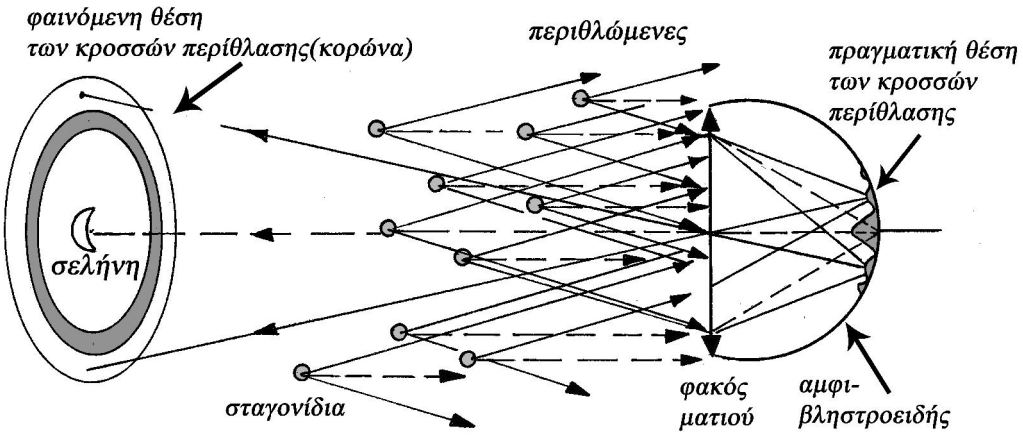
(Εικ. 7.9.1.1)

ου τα περιβάλλει σε αρκετά όμως μεγαλύτερη απόσταση από τη θέση που καταλαμβάνει σαν σύνολο η κορώνα (βλ. Εικ. 7.9.1.1). Γιατί πραγματικά το δακτύλιο

αυτό δεν πρέπει να τον συγχέουμε με τους δακτυλίους που εμφανίζονται γύρω από την κεντρική περιοχή της σελήνης και οι οποίες αφορούν το φαινόμενο της κορώνας.

Το φαινόμενο της κορώνας

Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία η ερμηνεία του φαινομένου της ***κορώνας (crown)*** παραπέμπει στο φαινόμενο της περίθλασης του φωτός μακρινού πεδίου από τα σταγονίδια νερού ή συσσωματώματα παγοκρυσταλλιτών. Κατά την άποψή μας, δεδομένου ότι τα προαναφερόμενα σκεδάζοντα μέσα διαθέτουν ποικίλες διαστάσεις και είναι διαφανή ορισμένου δ.δ. θα έπρεπε η εξήγηση της κορώνας ν' αναχθεί σε πρόβλημα σκέδασης κατά Mie. Που σημαίνει ότι η ερμηνεία της με τη βοήθεια της περίθλασης Fraunhofer δεν είναι παρά προσεγγιστική, την οποία όμως τελικά υιοθετούμε.



(Σχ. 7.9.1.2)

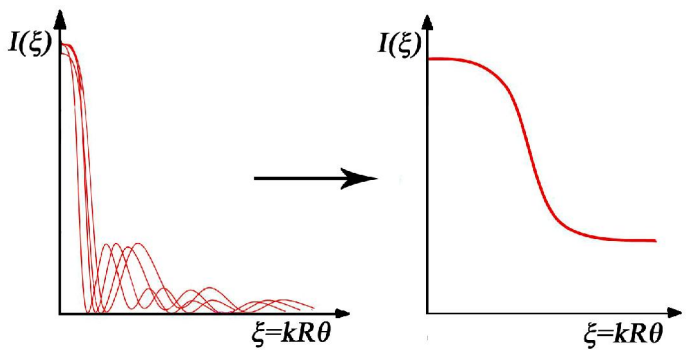
Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φως από τη σελήνη (ή τον ήλιο) λόγω της μεγάλης απόστασής τους από τη γη, προσπίπτει στα σφαιρικά σταγονίδια από νερό των νεφών, με τη μορφή επιπέδου μετ. κύματος, το οποίο κατ' αρχή υποθέτουμε ότι είναι μονοχρωματικό (Σχ. 7.9.1.2). Επομένως το καθένα από τα σταγονίδια − κυκλικής ενεργού διατομής − περιθλά το φως σαν να ήταν κυκλικό εμπόδιο. Αλλά γνωρίζουμε από την αρχή του Babinet (§ 7.8.13) ότι το πρότυπο περίθλασης αυτού του εμποδίου με βάση την προσέγγιση Fraunhofer είναι το ίδιο με αυτό ενός κυκλικού ανοίγματος ιδίων διαστάσεων. Οπότε η κατανομή της έντασης του φωτός (για ένα σταγονίδιο) στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας για παρατήρηση στο άπειρο, θα έχει τη μορφή της (Εικ. 7.5.1.7). Στο (Σχ. 7.9.1.2) βλέπουμε από το κάθε σταγονίδιο εκκινούν οι 'ακτίνες' (πρόκειται εδώ για χωρικές συχνοτήτητες) με διευ-

θύνσεις: α) Των μη περιθλώμενων (μηδενικής τάξης) που συγκεντρώνονται από το φακό του ματιού και συγκροτούν τον κεντρικό λοβό περίθλασης (δίσκος του Airy) και β) Των τάξεων με γωνία περίθλασης που αντιστοιχεί στον πρώτο δακτύλιο μετά το δίσκο του Airy. Όμως το μάτι μας – κατά τα γνωστά – 'βλέπει' κατά την προέκταση των ακτινών οι οποίες προσπίπτουν στον αμφιβληστροειδή του. Αυτός είναι και ο λόγος που το δακτυλιοειδές πρότυπο περίθλασης προβάλλεται φαινομενικά γύρω από τη σελήνη (ή τον ήλιο).

Σημείωση

Παρόμοια διαδικασία παρατήρησης προτύπων περίθλασης του φωτός περιγράψαμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου. Εκεί όπου δια μέσου μιας κουρτίνας παράθυρου του σπιτιού μας, βλέπαμε πρότυπα περίθλασης να σχηματίζονται γύρω από τα φώτα του δρόμου: (Εικ. 7.2) και (Εικ. 7.9.4.1).

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου της κορώνας, έχουμε να μιλήσουμε για τη χρωματικότητα του κεντρικού λοβού της, καθώς και αυτής των δακτυλίων της, για την περίπτωση που αυτά εμφανίζονται. Προκαταρκτικά θα πρέπει να πούμε ότι οι δακτύλιοι γύρω από την κεντρική περιοχή της κορώνας θα διακρίνονται όταν τα σταγονίδια του νερού (ή τα συσσωματώματα των κρυσταλλιτών) είναι κατά το δυνατόν ίδιου μεγέθους. Πράγματι τότε οι δακτύλιοι της κατανομής της έντασης του φωτός θα καταλαμβάνουν συγκεκριμένη θέση και δεν θα συγχέονται μεταξύ τους λόγω της ασύμφωνης επαλληλίας των διαφορετικής έκτασης προτύπων περίθλασης. Στο (Σχ. 7.9.1.3) μπορούμε να



(Σχ. 7.9.1.3)

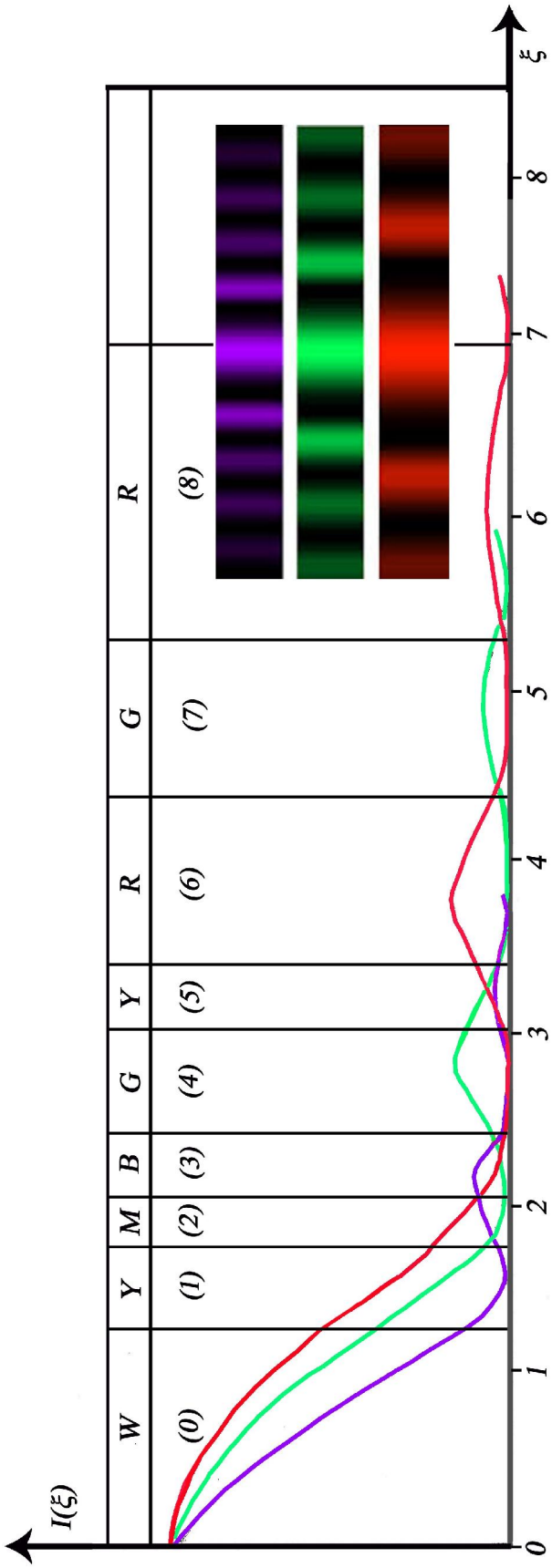
δούμε την ασύμφωνη επαλληλία καθώς και το αποτέλεσμα στο οποίο μας οδηγεί η πρόσθεση των εντάσεων που προκύπτουν από την περίθλαση πολλών διαφορετικής

διαμέτρου κυκλικών ανοιγμάτων κατά την πρόσπτωση σ' αυτά μονοχρωματικού μετ. κύματος. Και αν τα προαναφερόμενα ισχύουν για μονοχρωματικό φως, πόσο μάλλον θα ενισχύονται από το γεγονός ότι στην πραγματικότητα στα σταγονίδια των νεφών προσπίπτει πολυχρωματικό φως (το προερχόμενο από τη σελήνη ή τον ήλιο λευκό φως), με τελικό αποτέλεσμα την ανάλυσή του λόγω της δράσης του φαινομένου της περίθλασης. Πράγματι η γωνία περίθλασης κατά τα γνωστά, εξαρτάται αναλογικά από το μ.κ. λ.

Με την προϋπόθεση ότι η περίθλαση του λευκού φωτός προέρχεται από ισομεγέθη σφαιρικά σταγονίδια, προκειμένου να προσδιορίσουμε το χρωματικό πρότυπο περίθλασης, θα πρέπει να προσθέσουμε τα πρότυπα περίθλασης της έντασης του φωτός από κυκλικό άνοιγμα για όλα τα μ.κ. που περιλαμβάνει το φάσμα του ορατού φωτός π.χ. από $\lambda_V = 0.4\mu\text{m}$ μέχρις $\lambda_R = 0.7\mu\text{m}$. Αντί για τη διαδικασία αυτή επιλέγουμε μια προσεγγιστική, κατά την οποία θα προσθέσουμε τις εντάσεις των προτύπων για τρία χαρακτηριστικά μ.κ. του ορατού φάσματος της ιώδους , της πράσινης και της κόκκινης περιοχής του. Επιλέγουμε εδώ τα εξής μήκη κύματος: $\lambda_V = 0.4\mu\text{m}$, $\lambda_G = 0.55\mu\text{m}$ και $\lambda_R = 0.7\mu\text{m}$. Τα πρότυπα περίθλασής τους σε μια διεύθυνση φαίνονται στο δεξιό τμήμα της (Εικ. 7.9.1.4). Και όσον αφορά την από περιοχή σε περιοχή εμφάνιση των χρωμάτων της κεντρικής περιοχής και των δακτυλίων θα ενσκήψουμε στο διάγραμμα της (Εικ. 7.9.1.4). Στο σχήμα αυτό οι τιμές των μεγίστων των εντάσεων των δύο πρώτων από το σύνολο των δακτυλίων (σε σχέση με το κεντρικό τους μέγιστο) και για κάθε χρώμα, σχεδιαστήκαν να είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τις πραγματικές τους τιμές (βλ. (Σχ. 7.5.1.5)). Και αυτό για λόγους εποπτικούς που αφορά στην ανάδειξη των χρωματικών τους συνθέσεων. Ακριβής όμως είναι η θέση των μηδενικών ελάχιστων για κάθε μ.κ. τα οποία και καθορίζουν το εκάστοτε χρωματικό εύρος των δακτυλίων. Τα τελευταία προέκυψαν από τη (σχ. 7.5.19): $(I/I_0) = \left[2J_1(\xi)/\xi\right]^2$, όπου $\xi = kR\theta$ με θ τη γωνία περίθλασης και R την ακτίνα του κυκλικού ανοίγματος $(k = 2\pi/\lambda)$. Και για το επίπεδο στο οποίο παίρνουμε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer $\theta \simeq \tan\theta = x/z$ με z την απόσταση ανοίγματος - πετάσματος και x την απόσταση ενός σημείου του προτύπου από το κέντρο του. Οπότε θα έχουμε: $x = \alpha\xi\lambda$ όπου $\alpha = (z/2\pi R) = \text{σταθ.}$ Και για $\xi = 3.83,\ 7.02,\ 10.17$ (για τα τρία πρώτα ελάχιστα) βρίσκουμε:

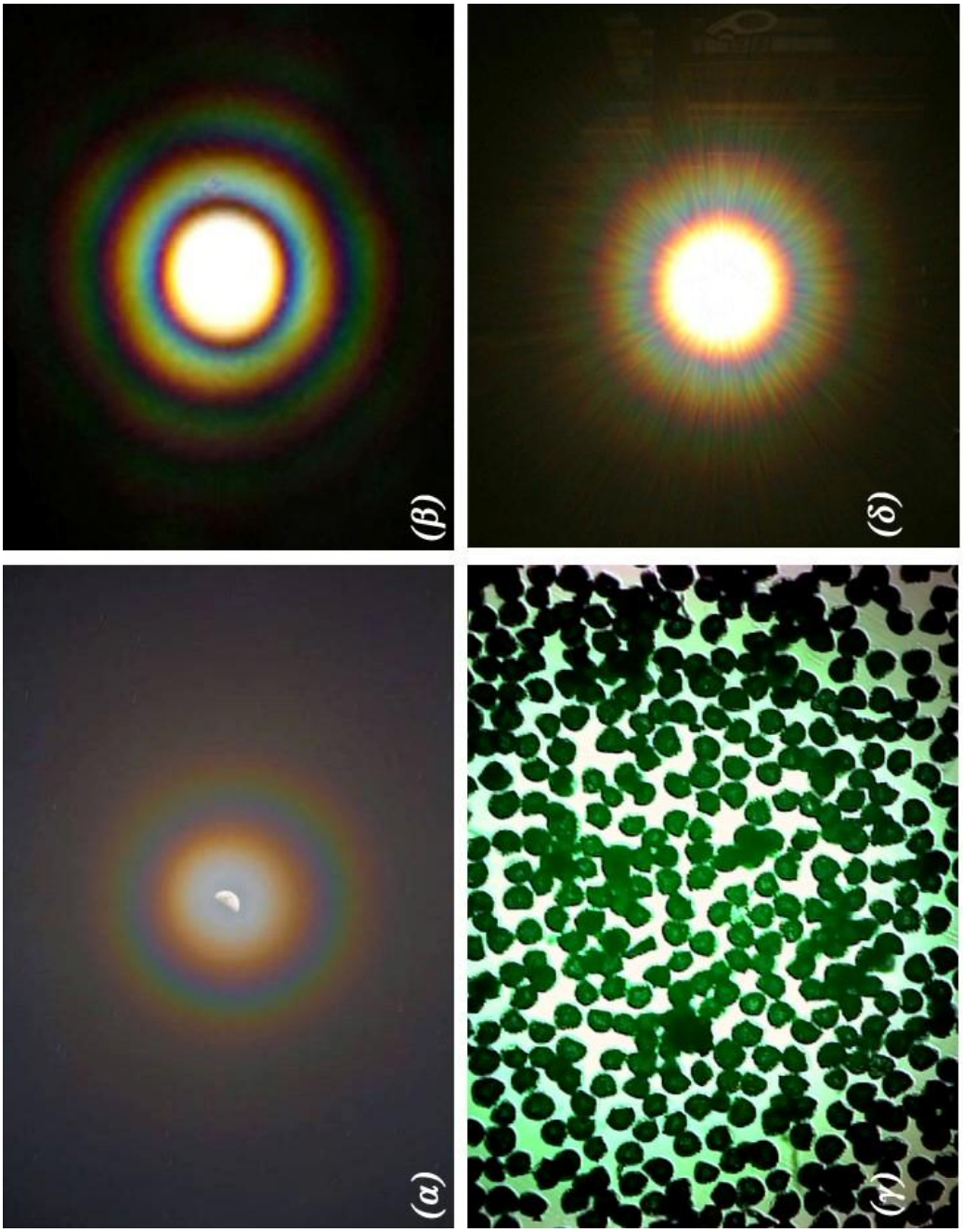
$$x_{1V} \simeq 1.5, x_{1G} \simeq 2.1, x_{1R} \simeq 2.7 \quad x_{2V} \simeq 2.8, x_{2G} \simeq 3.8, x_{2R} \simeq 4.9 \quad x_{3V} \simeq 4.0, x_{3G} \simeq 5.6, x_{3R} \simeq 7.1$$

Το αποτέλεσμα αυτής της χρωματικής σύνθεσης που θα προκύψει από την αλληλοεπικάλυψη των διαφορετικών ποσοτήτων χρωμάτων σε κάθε περιοχή, θα μας δώσει και το κυρίαρχο χρώμα με το οποίο θ' αναδεικνύονται οι διαδοχικοί έγχρωμοι δακτύλιοι, χωρίς όμως οι τελευταίοι να έχουν σαφή όρια. Η σύγκριση θα γίνεται με την χρωματική αλληλουχία των δακτυλίων της κορώνας που φαίνεται



(Елк. 7.9.1.4)

στην (Εικ. 7.9.1.5α). Κατ' αρχή η κεντρική περιοχή (0) του προτύπου, λόγω της συνύπαρξης όλων των χρωμάτων, θα έχει περίπου λευκή απόχρωση. Στην περιοχή (1) (όπου συναντάται και το πρώτο ελάχιστο του ιώδους), θα έχουμε τη μίξη των κατανομών του κόκκινου και του πράσινου. Δηλ. θα προκύψει κίτρινο χρώμα. Στην



(7.9.1.5)

περιοχή (2) όπου το πράσινο σχεδόν ελαχιστοποιείται κυριαρχούν το ιώδες και το κόκκινο (πρωτίστως). Οπότε η απόχρωση αυτής της περιοχής θα είναι κυανοκόκκινη (φούξια). Στην περιοχή (3) όπου τα ποσοστά του κόκκινου και του πράσινου είναι μικρά, η περιοχή έχει την απόχρωση του ιώδους - μπλε. Η περιοχή (4), όπου

και η σχετική ελαχιστοποίηση του κόκκινου και του ιώδους, θα έχει πράσινη απόχρωση. Και η επόμενή της (5), στη θέση της οποίας βρίσκεται το δεύτερο μέγιστο του ιώδους, δεδομένου ότι η τιμή του είναι πάρα πολύ μικρή, θα κυριαρχεί και πάλι το κίτρινο χρώμα. Η επόμενη περιοχή (6) όπου το πράσινο και το ιώδες σχεδόν μηδενίζονται αναδεικνύεται το ακόρεστο κόκκινο. Τέλος μετά την κόκκινη, στην περιοχή (7), τα χρώματα κόκκινο (δεύτερο μηδενικό ελάχιστο) και ιώδες δεν υφίστανται πρακτικά, οπότε μπορούμε να διακρίνουμε ένα πολύ ακόρεστο πράσινο.

Η περιγραφή αυτή των χρωματικών αντιθέσεων που αναδεικνύουν κυκλικούς 'κροσσούς' περίθλασης, αν και με ασαφή όρια, έγινε με βάση την πρόσθεση από περιοχή σε περιοχή των τριών προτύπων περίθλασης που αντιστοιχούν στο κάτω (ιώδες) και πάνω όριο (κόκκινο) του ορατού φάσματος, καθώς και μιας κεντρικής του περιοχής που αντιπροσωπεύει το πράσινο χρώμα. Προσεγγίζει όμως με πολύ ικανοποιητικό τρόπο τη χρωματικότητα της αλληλουχίας των δακτυλίων της κορώνας (Εικ. 7.9.1.5α). Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κατά προσέγγιση το φαινόμενο είναι δυνατόν να περιγραφεί από τη θεωρία της περίθλασης μακρινού πεδίου, παρακάμπτοντας τη θεωρία της σκέδασης κατά Mie. Όταν βέβαια – όπως προαναφέραμε – τα σταγονίδια έχουν διαφορετικό μέγεθος, τότε δεν παρατηρούνται δακτύλιοι. Και η μορφή της κορώνας συνίσταται από ένα δίσκο με εξωτερικά ασαφή όρια και ροδίζουσα απόχρωση (βλ. το κάτω μέρος της (Εικ. 7.9.1.1)). Το είδος αυτό της κορώνας, είναι που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές τη νύχτα να περιβάλει τη σελήνη. Και η ροδίζουσα απόχρωση των εξωτερικών της ορίων, οφείλεται στο ότι ο κεντρικός λοβός περίθλασης για το κόκκινο, είναι μεγαλύτερης έκτασης από ότι των άλλων χρωμάτων. Αυτά τα οποία ειπώθηκαν, προκειμένου να ερμηνευθεί το φαινόμενο της κορώνας που προκαλείται από τη σελήνη, ισχύουν πανομοιότυπα και όταν πηγή φωτισμού είναι ο ήλιος. Στην περίπτωση όμως αυτή, προκειμένου να ειδωθούν οι δακτύλιοι και οι χρωματικές τους αντιθέσεις, θα πρέπει – λόγω της ισχυρής έντασης του φωτός που εκλύεται από αυτόν – ο δίσκος του να καλύπτεται από ένα αδιαφανές διάφραγμα.

Στην (Εικ. 7.9.1.5β) φαίνεται το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer από ένα κυκλικό άνοιγμα, όταν αυτό φωτίζεται με παράλληλο μετ. κύματος λευκού φωτός. Είναι αυτονόητο ότι η χρωματική αλληλουχία των δακτυλίων του θα συμπίπτει σε μεγάλο βαθμό με αυτή των δακτυλίων της κορώνας της (Εικ. 7.9.1.5α). Τέλος στην (Εικ. 7.9.1.5δ) φαίνεται το πρότυπο Fraunhofer το οποίο οφείλεται στην περίθλαση λευκού φωτός από ένα σύνολο μεγάλου αριθμού κόκκων γύρης του φυτού Λυκοπόδιο που είναι τυχαία κατανεμημένοι πάνω σε μια διαφανή γυάλινη πλάκα (Εικ. 7.9.1.5γ). Οι κόκκοι της γύρης είναι σχεδόν κυκλικού σχήματος και διαμέτρου $d \simeq 28\mu\text{m}$. Και εδώ μπορούμε να δούμε ότι η χρωματική αλληλουχία των κροσσών είναι σχεδόν ίδια με αυτή που εμφανίζεται στις (Εικ. 7.9.1.5α,β). Με τη διαφορά ότι

στην προκειμένη περίπτωση έχουμε την εμφάνιση ενός είδους 'κοκκίασης' στην κατανομή της έντασης, λόγω της τυχαίας κατανομής των κόκκων του Λυκοποδίου. Η κοκκίαση αυτή εμφανίζεται και στην (Εικ. 7.9.1.5α) του προτύπου της κορώνας γύρο από τη σελήνη, αν και είναι πολύ λεπτής υφής, με τη μορφή διάχυσης. Και ο λόγος είναι η τυχαία κατανομή των σταγονιδίων του νερού στο εσωτερικό των νεφών της ατμόσφαιρας.

Το φαινόμενο της δόξας

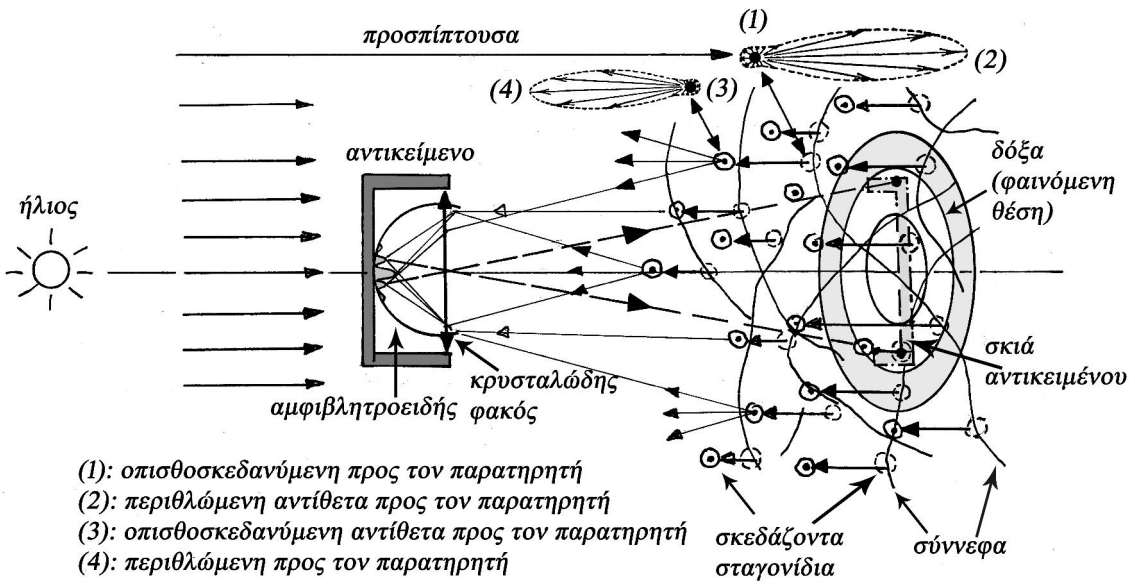
Η ***δόξα (glory)*** είναι το φαινόμενο της ανάδειξης έγχρωμων δακτυλιοειδών προτύπων έντασης του φωτός, που τις βλέπουμε στις πλείστες των περιπτώσεων να προβάλλονται πάνω σε ανοιχτόχρωμα σύννεφα, όταν ο ήλιος βρίσκεται πίσω μας και τα φωτίζει. Συνήθως μια δόξα περιλαμβάνει και τη σκιά του αντικειμένου από το οποίο γίνεται η παρατήρηση. Στην (Εικ. 7.9.1.6α) το φαινόμενο γίνεται αντι-

(Εικ. 7.9.1.6)

ληπτό από το παράθυρο ενός αεροπλάνου που πετάει σε σχετικά κοντινή απόσταση δίπλα σε λευκά σύννεφα. Επίσης στην (Εικ. 7.9.1.6β) η δόξα φαίνεται να περιβάλλει τη σκιά ενός ορειβάτη, που παρατηρεί τα σύννεφα σε μεγάλο υψόμετρο σ' ένα βουνό. Η ερμηνεία της εμφάνισης της δόξας είναι παρόμοια με αυτήν της κορώνας.

Στο (Σχ. 7.9.1.7) το πολυχρωματικό φως του ηλίου φωτίζει ένα σύμπλεγμα από ανοιχτόχρωμα σύννεφα. Οι διαστάσεις των σταγονιδίων των υδρατμών που τα συγκροτούν, υιοθετούμε και εδώ ότι είναι μεγαλύτερες του μ. κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Που σημαίνει ότι εκτός της σκεδανύμενης (περιθλώμενης) προς τη διεύθυνση πρόσπτωσης, υφίσταται και διάδοση μικρού ποσοστού οπισθοσκεδανύμενης ακτινοβολίας (Σχ. 7.9.1β,γ). Επομένως από το σύνολο του οπισθοσκεδανύμενου στην πραγματικότητα λευκού φωτός, συγκροτείται ένα μετ. κύματος με τη

μορφή 'ανακλώμενου' από τα σταγονίδια με διεύθυνση τώρα προς τον ήλιο. Έστω κατόπιν ότι μεταξύ του ηλίου και σε σχετικά κοντινή απόσταση από τα σύννεφα βρίσκεται ένας φορέας. Για την (Εικ. 7.9.1.6α) πρόκειται για ένα αεροπλάνο στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται ο παρατηρητής. Και επειδή το 'ανακλώμενο' από τα σύννεφα φως προσπίπτει και πάλι στα σταγονίδια, τα τελευταία περιθλούν το φως. Από το σημείο αυτό και μετά η ερμηνεία της εμφάνισης της δόξας, δηλ. το πο-



(Σχ. 7.9.1.7)

λυχρωματικό δακτυλιοειδές πρότυπο της έντασης του φωτός, που το μάτι του ανθρώπου βλέπει να προβάλλεται στα σύννεφα, είναι η ίδια με αυτή του φαινομένου της κορώνας. Δηλ. αυτό το πρότυπο περίθλασης σχηματίζεται στον αμφιβληστροειδή του ματιού του παρατηρητή και προβάλλεται στα σύννεφα όπου και η φαινομένη θέση της δόξας. Όμως επειδή τα σύννεφα βρίσκονται σε κοντινή σχετικά απόσταση από τον παρατηρητή, στο εσωτερικό της φαινόμενης θέσης της δόξας, προβάλλεται και η σκιά του φορέα στον οποίο βρίσκεται αυτός, ή η σκιά του ίδιου (Εικ. 7.9.1.6α,β).

Σε προγενέστερες της χρήσης του αεροπλάνου εποχές αλλά και σήμερα, το φαινόμενο της δόξας μπορούσε να ειδωθεί μόνο από ορειβάτες οι οποίοι βρισκόταν σε κορυφές βουνών, που μπροστά τους υπήρχαν σύννεφα και φωτιζόταν από τον ήλιο (Εικ. 7.9.1.6β). Τότε με μια ορισμένη προοπτική, στο κέντρο της εμφανιζόμενης δόξας, έβλεπαν τη σκιά τους. Το συγκεκριμένο φαινόμενο ονομάστηκε ***(specter of Broken) το φάσμα των (βουνών) Broken***, με τα τελευταία να βρίσκονται στη Γερμανία, όπου και η παρατήρησή τους ήταν πιο συχνή.

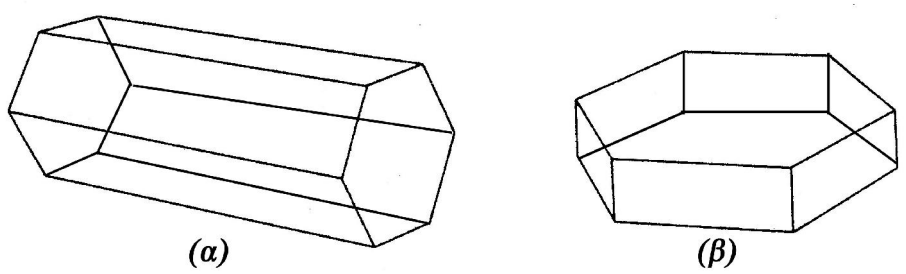
Το φαινόμενο της άλω των 22^0

Η (Εικ. 7.9.1.1) προήλθε από φωτογράφιση του νυκτερινού ουρανού της Θεσσαλονίκης προς το τέλος του χειμώνα του 1986. Σ' αυτήν μπορούμε να δούμε μια κεντρική περιοχή με εσωτερική λευκή απόχρωση η οποία περιβάλλεται από μια κοκκινορόδινη περιοχή με ασαφή όρια. Το μέγεθος του όλου κεντρικού σχηματισμού, δεν υπερβαίνει τις τρεις διαμέτρους της σελήνης που καταλαμβάνει το πολύ κεντρικό φωτεινό του τμήμα. Πρόκειται για το φαινόμενο της κορώνας, το οποίο με λεπτομέρεια περιγράψαμε προηγουμένως και που ερμηνεύτηκε προσεγγιστικά με τη βοήθεια της περίθλασης του φωτός μακρινού πεδίου μέσω των σταγονιδίων νερού ή συσσωματωμάτων παγοκρυσταλλιτών) που συγκροτούν ένα ορισμένο είδος νεφών στην ατμόσφαιρα της γης. Και όσον αφορά την απουσία δακτυλίων που θα έπρεπε κανονικά να περιβάλλουν την κορώνα, το αποδώσαμε – για τη συγκεκριμένη συγκυρία – στην διαφορετικότητα του μεγέθους των σκεδαζόντων σωματιδίων. Στην ίδια όμως εικόνα και σε αρκετά μεγάλη απόσταση από την κεντρική κατανομή της κορώνας, εμφανίζεται ένας άλλος δακτύλιος. Τα εσωτερικά του όρια (κοκκινωπής απόχρωσης) είναι αρκετά σαφή. Καθώς όμως απομακρυνόμαστε από αυτή την περιοχή η απόχρωση του δακτυλίου γίνεται πορτοκαλοκόκκινη μέχρις που γίνεται λευκή με ασαφή όμως πλέον τα όριά του.

Η μέτρηση της φαινόμενης γωνίας που οριοθετούνταν από το κέντρο της σελήνης και τα εσωτερικά όρια αυτού του δακτυλίου, μας έδωσε την τιμή των 22^0. Η τιμή αυτής της γωνίας – όπως θα δούμε στα επόμενα –, αποκλείει το γεγονός ο δακτύλιος αυτός να οφείλεται στο φαινόμενο περίθλασης του φωτός. Και ο λόγος είναι ο εξής: Στο πρότυπο περίθλασης από κυκλικό άνοιγμα, θεωρητικά οι δακτύλιοι που περιβάλλουν το δίσκο του Airy μπορεί να εκτίνονται σε μεγάλη απόσταση. Όμως στην πράξη η τιμή του μεγίστου του δευτέρου δακτυλίου (Σχ. 7.5.1.5) είναι τα 0.0042 αυτής στο κέντρο του δίσκου του Airy που είναι η μονάδα. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε εκφυλισμό της έντασης των υπόλοιπων δακτυλίων με αποτέλεσμα να μην μπορούμε καν να τους εντοπίσουμε. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το γωνιακό άνοιγμα που αντιστοιχεί στα εντοπιζόμενα όρια ενός τέτοιου προτύπου μπορούμε να το υπολογίσουμε από τη σχέση: $\xi = kR\theta \simeq kR\tan\theta$. Όπου θ η γωνία περίθλασης που αντιστοιχεί στο τρίτο μηδενικό ελάχιστο $(\xi = 10.17)$. Οπότε για $\lambda = 0.55\times10^{-3}\,\text{mm}$ και $2\text{R} \simeq 0.02\text{mm}$ (που είναι μια μέση τυπική διάμετρος των σταγονιδίων των νεφών), βρίσκουμε: $\theta \simeq 5^0$. Που σημάνει ότι μια τέτοια τιμή απέχει πολύ από τον δακτύλιο τον εντοπισμένο στη γωνία των 22^0. Εκτός όμως από το γεγονός αυτό, εάν επρόκειτο για δακτύλιο περίθλασης, θα έπρεπε η εκτροπή των χρωμάτων του να είναι ανάλογη του μ.κ. Αυτό όμως δεν συμβαίνει. Τουναντί-

ον κοκκινωπής απόχρωσης είναι το εσωτερικό του δακτυλίου, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην (Εικ. 7.9.1.1).

Η απάντηση στα προηγούμενα συμπεράσματα – όπως θ' αποδείξουμε αμέσως μετά – είναι ότι ο δακτύλιος των 22^0 οφείλεται στη διάθλαση του φωτός (που προέρχεται από τον ήλιο ή τη σελήνη) από τους παγοκρυσταλλίτες εξαγωνικής συμμετρίας που αιωρούνται στην ατμόσφαιρα με τη μορφή νεφών σε ορισμένο ύψος από τη γη. Το φαινόμενο ονομάζεται ***άλως (halos)*** των 22^0. Το προαναφερόμενο είναι που εμφανίζεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα, από τα δεκάδες – αν όχι περισσότερα – ατμοσφαιρικά φαινόμενα που οφείλονται στην διάθλαση και την ανάκλαση από τους παγοκρυσταλλίτες. Οι τελευταίοι, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες θερμοκρασίας και υγρασίας εμφανίζονται σε δύο κύριες μορφές* (Σχ. 7.9.1.8). α) Σαν εξαγωνικοί στυλίσκοι (Σχ. 7.9.1.8α), με μεγάλο μήκος κατά τον άξονά τους και μικρή διατομή. Μια μέση τυπική τιμή που αφορά το μήκος τους εί-



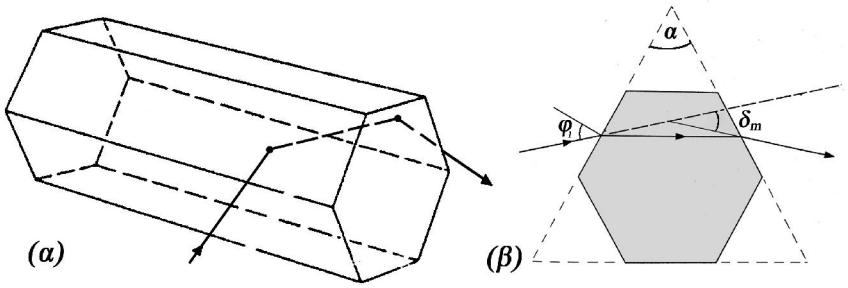
(Σχ. 7.9.1.8)

ναι $l \simeq 0.2\text{mm}$ με τη διάμετρο της διατομής τους υποδεκαπλάσια. Οι κρυσταλλίτες αυτοί μπορούν να εμφανιστούν και σε συσσωματώματα. β) Σαν εξαγωνικά πλακίδια (Σχ. 7.9.1.8β), με μεγάλη διάμετρο της διατομής τους και μικρό το μήκος του άξονά τους. Οι συνδυασμοί των διαθλάσεων και των ανακλάσεων δια μέσου των διαφόρων επιφανειών τους, όπως προαναφέραμε μπορούν να δημιουργήσουν μια μεγάλη ποικιλία ατμοσφαιρικών φαινομένων. Ένα από αυτά είναι και η άλως των 22^0.

Το συγκεκριμένο φαινόμενο οφείλεται στους παγοκρυσταλλίτες της μορφής των στυλίσκων (Σχ. 7.9.1.9α), και μάλιστα για τη διάθλαση των προσπιπτουσών ακτίνων φωτός σε επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις τους, μεταξύ των δύο παραδιαδοχικών τους εδρών. Οι παγοκρυσταλλίτες αυτού του είδους σχηματίζονται σε αρκετά μεγάλο υψόμετρο (άνω των 7000m) και συγκεντρώνονται με τη μορφή αραιών νεφών με την ονομασία ***θυσανοστρώματα (cirrostratus)***. Τέτοιου είδους νέφη παρεμβάλλονται ανάμεσα στη σελήνη (ή τον ήλιο) και τον παρατηρητή που

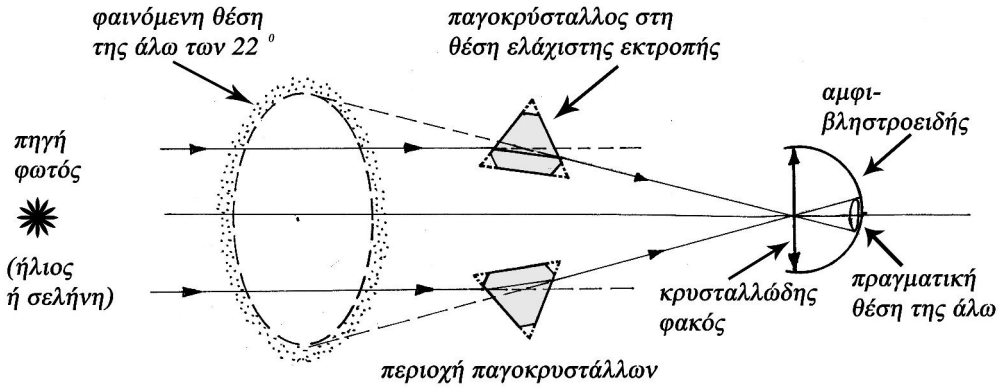
* R. Greenler: 'Rainbows, Halos, and Glories' Cambridge University Press. London (1980) (Ch. 2).

βρίσκεται πάνω στη γη. Οι άξονες των κρυσταλλιτών έχουν τυχαία κατανομή στο χώρο αλλά κατά ένα ποσοστό τους είναι παράλληλοι προς τα επίπεδα που είναι κάθετα στη διεύθυνση πηγής φωτός και παρατηρητή. Ένα τέτοιο επίπεδο είναι αυτό του επιπέδου του (Σχ. 7.9.1.10). Οι κρυσταλλίτες αυτοί κατά την κίνησή τους



(Σχ. 7.9.1.9)

παίρνουν όλες τις δυνατές θέσεις σαν να περιστρέφονται περί άξονα κατά μήκος της μεγάλης τους διάστασης (εδώ κάθετα στο επίπεδο του σχήματος). Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες πρόσπτωσης ϕ_1 των ακτινών στις επιφάνειες των κρυσταλλιτών μπορούν να μεταβληθούν οριακά από $0^0 - 90^0$. Στην προκειμένη όμως περίπτωση η γωνία εκτροπής δ κατά την έξοδο της ακτίνας από τον κρυσταλλίτη (Σχ. 7.9.1.9β) (η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της προσπίπτουσας με αυτήν



(Σχ. 7.9.1.10)

της εξερχόμενης), δεν ακολουθεί μονοτόνως φθίνουσα πορεία. Αλλά (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική οπτική (ΠΑΡ/ΜΑ 1)(Σχ. 1.2)) διαγράφεται φθίνουσα, εγγίζει ένα ελάχιστο και κατόπιν και πάλι αυξάνεται καθώς μεταβάλλεται η ϕ_1. Η ελάχιστη αυτών των γωνιών δ_m ονομάζεται κατά τα γνωστά γωνία ελάχιστης εκτροπής και συνδέε-

ται με τον δ.δ. n πρίσματος (κρυσταλλίτη) και τη διαθλαστική του γωνία α (στην προκειμένη περίπτωση $\alpha = 60^0$) με τη σχέση:

$$n = \sin\frac{\alpha + \delta_m}{2} \Big/ \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (7.9.1.1)$$

(βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική οπτική (ΠΑΡ/ΜΑ 1)(σχ. 1.12)). Από τη σχέση αυτή για $n = 1.3121$ που αντιστοιχεί σε μια μέση τιμή του δ.δ. των παγοκρυσταλλιτών θεωρούμενων σαν ισοτρόπων υλικών, βρίσκουμε ότι $\delta_m \simeq 22^0$. Άρα από το σύνολο των

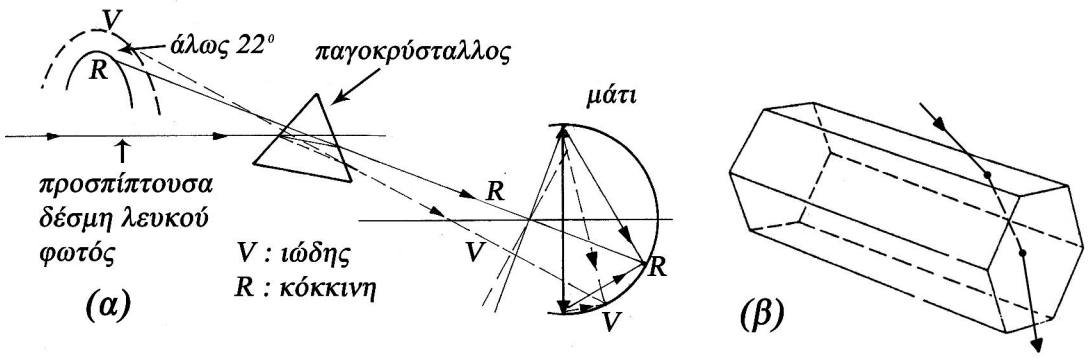
Σημείωση

Θα πρέπει εδώ να ειπωθεί ότι στην πραγματικότητα οι παγοκρύσταλλοι είναι ανισότροπα κρυσταλλικά υλικά και μάλιστα θετικά με $n_o = 1.309$ και $n_e = 1.310$. Οι τελευταίοι κρυσταλλώνονται στο εξαγωνικό σύστημα.

εξερχόμενων από τους παγοκρυστάλλους ακτινών – σε σχέση με τα όρια των γωνιών πρόσπτωσης – οι γωνίες εκτροπής των 22^0 είναι οι ελάχιστες. Η προέκταση αυτών των ακτινών που δέχεται το ανθρώπινο μάτι (Σχ. 7.9.1.10), είναι που σχηματίζουν τα εσωτερικά σαφή όρια του φαινόμενου δακτυλίου της λεγόμενης άλω των 22^0 (Εικ. 7.9.1.1). Ανεξάρτητα του προσανατολισμού των παγοκρυσταλλιτών (που προκύπτουν από την περιστροφή των αξόνων τους) όλες οι άλλες γωνίες εκτροπής των ακτινών είναι μεγαλύτερες των 22^0. Προφανής θα είναι και η κυκλική συμμετρία του δακτυλίου, που προκύπτει από την περιστροφή του άξονα πηγή – παρατηρητής κατά 360^0. Όσον αφορά τη σχετική ασάφεια των εξωτερικών ορίων της άλω, αυτή θα οφείλεται στο γεγονός ότι για τις συγκεκριμένες γωνίες εκτροπής δεν λειτουργεί αυστηρά ένα πάνω όριο, όπως το κάτω όριο της γωνίας ελάχιστης εκτροπής.

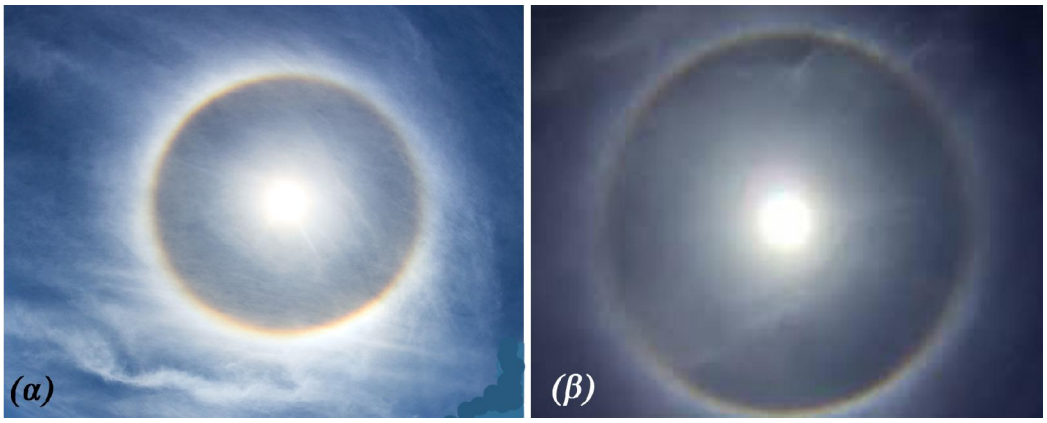
Μένει να εξετάσουμε στοιχειωδώς την εμφανιζόμενη χρωματική αλληλουχία του δακτυλίου της άλω των 22^0. Η τελευταία σχετίζεται με το φαινόμενο του διασκεδασμού του φωτός. Μας είναι γνωστό (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.3.2)), ότι η πρόσπτωση μιας δέσμης λευκού φωτός με μια ορισμένη γωνία σε μια τριγωνική πρισματική επιφάνεια, θα έχει σαν αποτέλεσμα την ανάλυσή του, με μεγαλύτερη γωνία εκτροπής να εμφανίζει το ιώδες φως σε σχέση με το κόκκινο (που είναι τα χρωματικά άκρα του ορατού φάσματος) (Σχ. 7.9.1.11α). Όμως δεδομένου ότι και στην περίπτωση αυτή το μάτι μας βλέπει κατά την προέκταση των ακτινών του φωτός που δέχεται, τότε η απόχρωση του εσωτερικού τμήματος του δακτυλίου

της άλω θα είναι κόκκινο, όπως μπορούμε να δούμε στην (Εικ. 7.9.1.1). Και όσον αφορά τη διαδοχή των χρωμάτων, αυτά θα ακολουθούν τυπικά αυτή των χρωμάτων



(Σχ. 7.9.1.11)

της ίριδας. Αρκετά ευδιάκριτα, η χρωματική αυτή αλληλουχία φαίνεται στην φωτογραφία της άλω των 22^0 της (Εικ. 7.9.1.12α) (με πηγή φωτισμού τον ήλιο). Τουλάχιστον φαίνεται η διαδοχή του κόκκινου, πορτοκαλί και κίτρινου, με τα υπόλοιπα



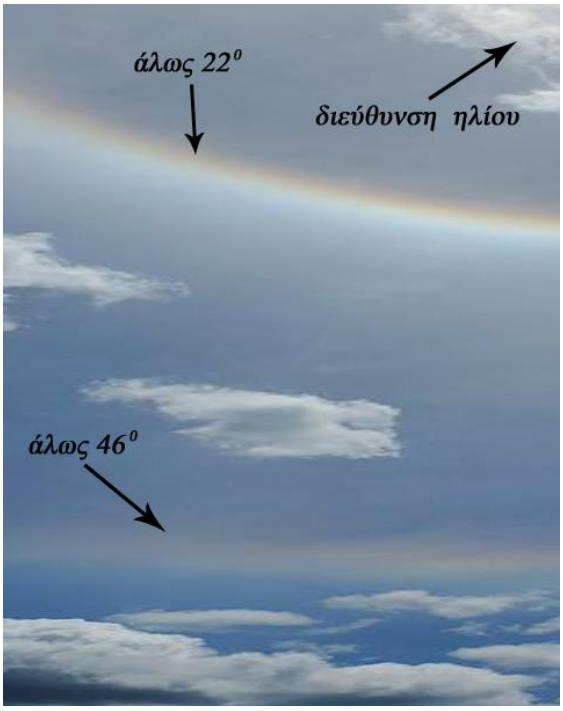
(Εικ. 7.9.1.12)

χρώματα να διαχέονται στην λευκή αχλή που περιβάλλει την άλω. Η (Εικ. 7.9.1.12β) μας δείχνει και πάλι την άλω των 22^0, με πηγή φωτισμού όμως τη σελήνη.

***Η άλως των* 46^0**

Την ερμηνεία της δημιουργίας της άλω των 22^0 τη στηρίξαμε στον τρόπο διάθλασης των ακτινών του φωτός μέσω των παγοκρυσταλλιτών με τη μορφή στυλίσκων και σε επίπεδα πρόσπτωσης παράλληλα με τις βάσεις τους (Σχ. 7.9.1.9α).

Όμως για τέτοιου είδους κρυστάλλους, η διάθλαση μπορεί να γίνει και μέσω των βάσεών τους που διαδίδονται σε επίπεδα που διέρχονται από τους άξονές τους, όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.9.1.11β). Η διαφορά που χαρακτηρίζει την πρώτη και την δεύτερη περίπτωση, είναι ότι στους μεν η διαθλαστική γωνία είναι $\alpha = 60^0$ ενώ στους δεύτερους $\alpha = 90^0$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες από τη (σχ. 7.9.1.1) και για $n = 1.3121$ βρίσκουμε ότι η γωνία ελάχιστης εκτροπής θα είναι: $\delta_m = 46.18^0 \simeq 46^0$. Και δεδομένου ότι στα νέφη των παγοκρυσταλλιτών το ποσοστό τους με τον προαναφερόμενο προσανατολισμό είναι εξ' ίσου μεγάλος, τότε εκτός της άλω των 22^0 θα είναι πιθανή και η δημιουργία της άλω των 46^0. Δηλ. με φαινόμενη γωνία 46^0 θα έχουμε στον ουρανό τον σχηματισμό και ενός δευτέρου δακτυλίου ο οποίος και θα περιβάλλει τον πρώτο με τα ίδια χαρακτηριστικά και χρωματική διαδοχή. Στην (Εικ. 7.9.1.13) μπορούμε να διακρίνουμε σε μικρό τμήμα του ουρανού την συνύ-

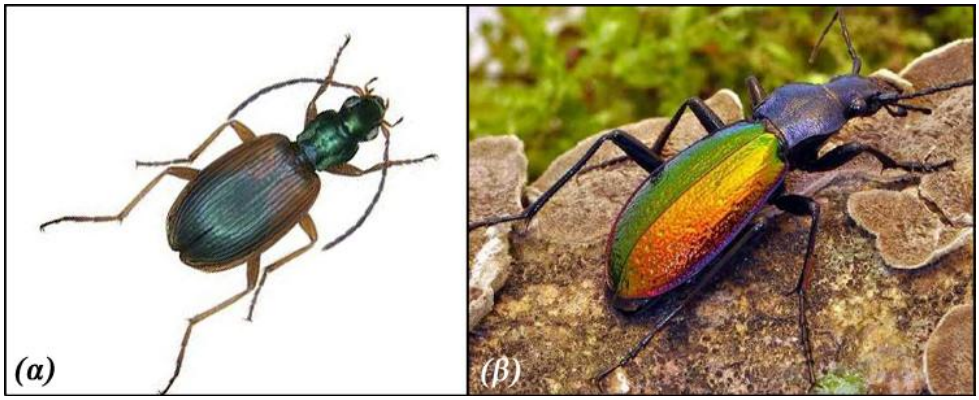


(Εικ. 7.9.1.13)

παρξη των δύο άλων. Η φαινόμενική έλλειψη κοινού κέντρου των δύο άλων, οφείλεται στη λήψη της φωτογραφίας με ευρυγώνιο φακό. Συνήθως η άλως των 46^0 δεν γίνεται ορατή επειδή η έντασή της είναι πολύ μικρή. Κύρια αιτία είναι το ότι το εύρος των γωνιών πρόσπτωσης εκείνων των ακτινών που μπορούν να διαθλαστούν μέσω της πρισματικής γωνίας των 90^0, χωρίς να υποστούν ολική ανάκλαση στη δεύτερη επιφάνεια είναι πολύ μικρό. Επίσης ένας δεύτερος λόγος είναι το ότι η άλως των 46^0 κατανέμεται σ' ένα πολύ μεγάλο εύρος του ουρανού.

7.9.2 *Περίθλαση του φωτός από τα φτερά και άλλα τμήματα του σώματος των εντόμων*

Έχουμε πολλές φορές συναντήσει στη φύση έντομα όπως: Σφήκες, αράχνες, αλλά ως επί το πλείστον σκαθάρια, που τα διάφορα μέρη του σώματός τους και κυρίως τα κελύφη τους ιριδίζουν έντονα κατά την πρόσπτωση επάνω τους του ηλιακού φωτός. Δύο τέτοια είδη σκαθαριών με την ονομασία: Iridagonum quadripuncata και Loxandrus lusidus φαίνονται στις (Εικ. 7.9.2.1α,β) αντίστοιχα. Η χρωματι-



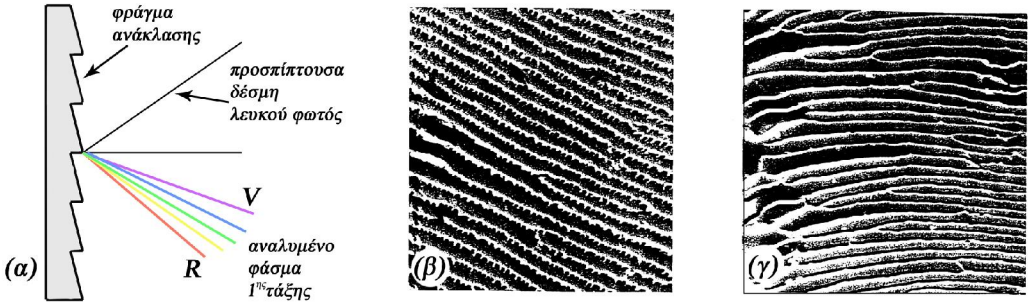
(Εικ. 7.9.2.1)

κότητα που αναδύουν, δεν οφείλεται σε χρωστικές του σώματός τους. Και το γεγονός αυτό αποδεικνύεται από το ότι: α) Αν αλλάξουμε γωνία παρατήρησης των εντόμων, αλλάζει και η χρωματικότητά τους. β) Αν μεταφέρουμε τα έντομα σε σκοτεινό σχετικά περιβάλλον, τα χρώματά τους σχεδόν εξαφανίζονται.

Αποδεικνύεται τελικά, ότι η χρωματική αυτή 'συμπεριφορά' οφείλεται στο φαινόμενο της περίθλασης του φωτός. Και όσον αφορά το από πού προκύπτει η περίθλαση, μπορούμε να το διαπιστώσουμε εξετάζοντας μέσω ειδικού ηλεκτρονικού μικροσκοπίου (Scanning Electron Microscope) το κέλυφος (τους κολεούς) των δύο αυτών σκαθαριών. Οι ηλεκτρονικές μικρογραφίες τους φαίνονται στις (Εικ. 7.9.2.2β,γ) αντίστοιχα και οι οποίες μας δείχνουν περιοχές σε μεγέθυνση $1-1.5\mu m$. Από αυτές μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μορφολογία των κελυφών τους είναι εγχάρακτη και περιοδική σε πολύ μεγάλο βαθμό. Και με το δεδομένο ότι το υπόβαθρο στο οποίο βρίσκονται είναι αδιαφανές, μπορούμε να συμπεράνουμε αβίαστα ότι τα κελύφη αυτών των εντόμων συμπεριφέρονται στο ηλιακό φως σαν διαμορφωμένα φράγματα ανάκλασης των οποίων η μελέτη έγινε στην (§ 7.6.3).

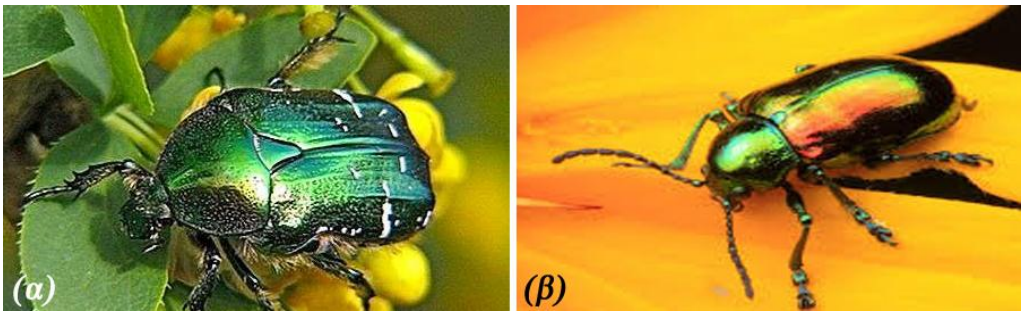
Ένα αντικείμενο ορισμένου σχήματος που είναι διαμορφωμένο από περιοδικό φράγμα ανάκλασης, θα περιθλά το φως με τέτοιο τρόπο ώστε να μας δίνει στο χώρο μια 'βεντάλια' σχεδόν διαχωρισμένων ίδιων μετ. κύματος διαφορετικής όμως χρωματικότητας (Εικ. 7.9.2.2α). Τα φράγματα βέβαια που διαμορφώνουν τα διάφο-

ρα μέλη των εντόμων αν και εν πολλοίς περιοδικά, δεν είναι τέλεια. Οπότε το αποτέλεσμα θα είναι το αναλυμένο χρωματικά κατόπιν περίθλασης μετ. κύματος που προέρχεται από το έντομο, να δίνει τελικά στον παρατηρητή μια συγκεχυμένη χρω-



(Εικ. 7.9.2.2)

ματική εικόνα. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν συνέπεια ένας θηρευτής (π.χ. ένα πτηνό που το επιβουλεύεται) να μην μπορεί να εντοπίσει με ακρίβεια ούτε την απόσταση στην οποία βρίσκεται ούτε το συγκεκριμένο σχήμα του. Εκτός από αυτό θα έχουμε και μεταβολές της έντασης του περιθλώμενου φωτός, που θα οφείλεται στην παραμικρή κίνησή του. Τα προαναφερόμενα θα έχουν σαν αποτέλεσμα την αναβολή οποιασδήποτε επιθετικής ενέργειας του θηρευτή και τελικά την σωτηρία του εντόμου. Η διαδικασία αυτή είναι πειραματικά αποδεδειγμένη, κατά τη διάρκεια που πτηνά οδηγήθηκαν να επιτεθούν σε κινούμενους στόχους του μεγέθους των εντόμων: Αφενός μεν μαύρου χρώματος, αφετέρου ιριδίζοντος και του ίδιου



(Εικ. 7.9.2.3)

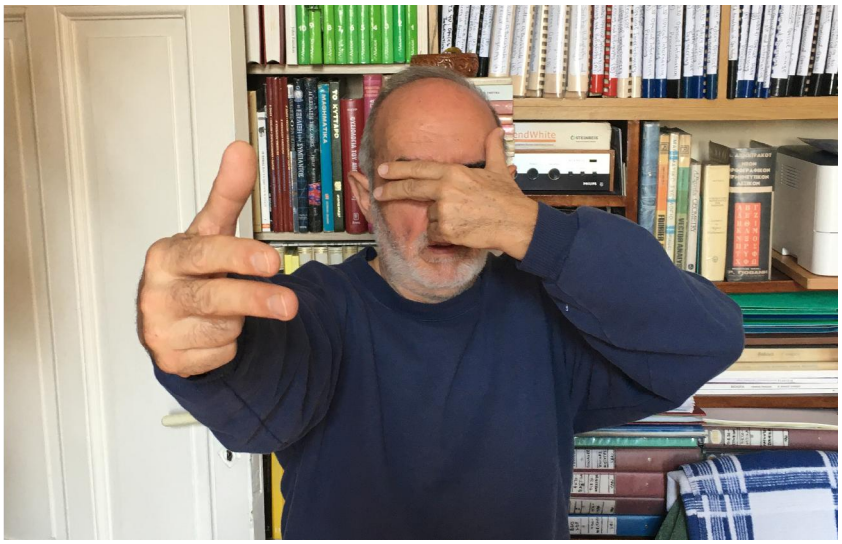
μεγέθους. Η επιτυχία της σύλληψης των μαύρων στόχων από τα πτηνά ήταν σχεδόν απόλυτη. Όμως είτε αποτύγχαναν να συλλάβουν τους ιριδίζοντες στόχους, είτε για να συμβεί θα έπρεπε να δοκιμάσουν πολλές φορές. Τα προαναφερόμενα αποτελούν παράδειγμα εξέλιξης των ειδών, προς την κατεύθυνση της εξασφάλισης της άμυνάς τους.

Τέλος στις (Εικ. 7.9.2.3) μπορούμε να δούμε τα ιριδίζοντα και ονομαζόμενα

πράσινα σκαθάρια του Ιούνη (green Jun beetles) που έχουν την ονομασία Cotinis nitida. Είναι αυτά, που αποκαλούμενα στην καθομιλούμενη ΄τζίνιες', τα συναντούμε σε αφθονία στα καλοκαιρινά λιβάδια της Ελλάδας.

7.9.3 *Περίθλαση του φωτός ανάμεσα από τις σχισμές των δακτύλων των χεριών μας*

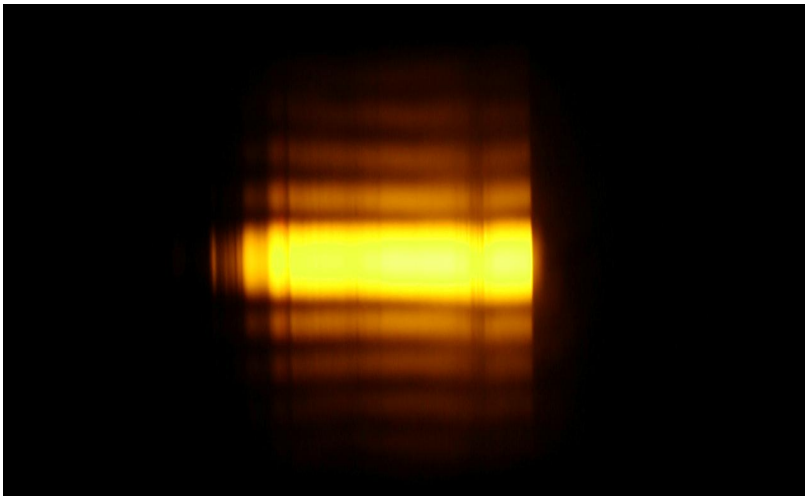
Η (Εικ. 7.9.3.1) μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε το φαινόμενο της περίθλασης από σχισμή με τη βοήθεια των δακτύλων των χεριών μας, αρκεί να διαθέτουμε μια πηγή φωτός. Η περιγραφή αυτού που βλέπουμε είναι η εξής: Σε επαφή σχεδόν με το δεξιό μας μάτι, φέρνουμε τον δείκτη και τον μέσο από τα δάκτυλα του αριστερού μας χεριού σε οριζόντια θέση, φροντί-



(Εικ. 7.9.3.1)

ζοντας ανάμεσά τους να αφήσουμε ένα πολύ μικρό διάστημα εν είδη σχισμής (περίπου μισό χιλιοστό). Κατόπιν τεντώνουμε το δεξί μας χέρι μέχρις εκεί που μπορούμε, φέρνοντας και πάλι το δείκτη και το μέσο παράλληλους και αφήνοντας και πάλι μεταξύ τους ένα διάστημα διπλάσιο σχεδόν με το προηγούμενο. Οπότε οι δύο 'σχισμές' που δημιουργήσαμε να είναι κατά το δυνατόν παράλληλες. Με αυτή τη διευθέτηση, το μάτι μας που βρίσκεται σχεδόν σε επαφή με την πρώτη σχισμή βλέπει δια μέσου τους μια πηγή φωτός, κατά προτίμηση αρκετά μεγάλης ισχύος και αρκετά μακριά από εμάς.(π.χ. μια λάμπα φωτισμού του δρόμου). Δηλ. τελικά το μάτι μας, η πρώτη σχισμή, η δεύτερη σχισμή και η πηγή του φωτός να βρίσκονται κατά το δυνατόν σε μία νοητή ευθεία. Τότε βλέποντας με προσοχή μέσω της πρώτης σχισμής (με το μάτι μας χαλαρό, προκειμένου να πετύχουμε συνθήκες παρατήρησης στο άπειρο), διακρίνουμε οι περιοχές πάνω και κάτω από τη δεύτερη σχισμή

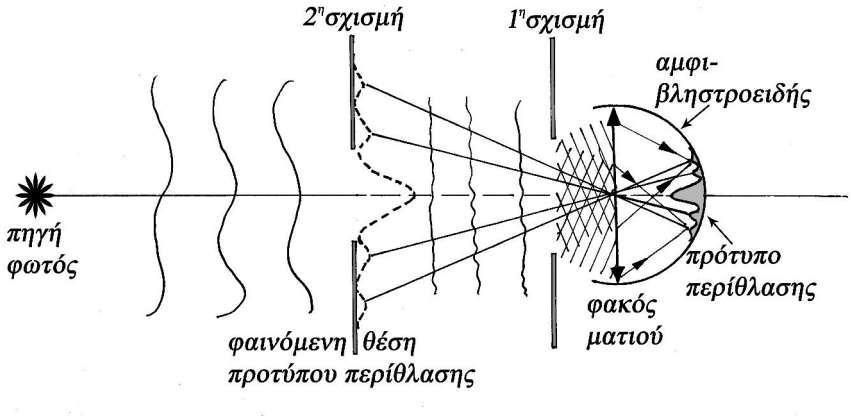
να καταλαμβάνονται από κροσσούς. Πρόκειται για κροσσούς περίθλασης, για το λόγο ότι αυξομειώνοντας – κατά το δυνατόν – το εύρος της σχισμής που βρίσκεται κοντά στο μάτι μας, παρατηρούμε αντίστοιχη αυξομείωση του πλάτους τους. Αν μάλιστα η πηγή είναι πολυχρωματική, μπορούμε να δούμε και ανάλυση του φωτός. Η (Εικ. 7.9.3.2) μας δείχνει το πρότυπο περίθλασης μέσω των δακτύλων μας, με



(Εικ. 7.9.3.2)

πηγή μια λυχνία φωτισμού Νατρίου του δρόμου.

Η ερμηνεία που αφορά την ανάδειξη του προτύπου περίθλασης που περιγράψαμε στα προηγούμενα, μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του (Σχ. 7.9.3.3). Στην



(Σχ. 7.9.3.3)

δεύτερη σχισμή προσπίπτει το μετ. κύματος που προέρχεται από την πηγή. Και το οποίο στην πράξη – αν μάλιστα η πηγή είναι κοντά – είναι αρκετά περίπλοκο. Το αναδυόμενο όμως από αυτή τη σχισμή, μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση κυ-

λινδρικό. Μετά τη διάδοσή του μέχρις τη σχισμή που είναι κοντά στο μάτι μας, μπορούμε να το εκλάβουμε σαν επίπεδο. Η περίθλαση του φωτός (ουσιαστικά περίθλαση Fraunhofer) γίνετε από αυτή τη σχισμή και όσον αφορά το πρότυπο περίθλασης, το τελευταίο σχηματίζεται στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας, το οποίο όπως ήδη αναφέραμε παρατηρεί στο άπειρο (ο αμφιβληστροειδής στην εστιακή απόσταση του κρυσταλλώδους φακού του ματιού). Όμως – κατά τα γνωστά – επειδή το μάτι μας 'βλέπει' κατά την προέκταση των ακτινών που συγκλίνουν στον αμφιβληστροειδή, αυτός είναι και ο λόγος που βλέπουμε το πρότυπο περίθλασης (της έντασης του φωτός) να προβάλλεται ένθεν και ένθεν της δεύτερης σχισμής. Αν βέβαια η πηγή φωτισμού βρίσκεται πολύ μακριά (ή αντίστοιχα το πλάτος της σχισμής είναι πάρα πολύ μικρό) η παρατήρηση του προτύπου περίθλασης μπορεί να γίνει αποφεύγοντας την δεύτερη σχισμή και κρατώντας αυτήν που έχουμε κοντά στο μάτι μας. Τότε το πρότυπο περίθλασης (φαινόμενη θέση) το βλέπουμε να προβάλλεται στο επίπεδο όπου βρίσκεται η πηγή.

Αν θέλουμε τέλος τα πρότυπα περίθλασης που παίρνουμε με τον προηγούμενο τρόπο να είναι πιο αξιόπιστα, μπορούμε τις σχισμές που δημιουργούμε με τα δάχτυλα των χεριών μας, να τις αντικαταστήσουμε με σχισμές χαραγμένες με ξυράφι πάνω σε κομμάτια από λεπτό χαρτόνι.

7.9.4 *Περίθλαση του φωτός με παρατήρηση διά μέσου μιας πυκνοϋφασμένης κουρτίνας*

Μια πλήρης περιγραφή αυτού του φαινομένου γίνεται στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Παραθέτουμε την (Εικ. 7.9.4.1) για μια επί πλέον επιβεβαίωση του τι α-

(Εικ. 7.9.4.1)

κριβώς μπορούμε να παρατηρήσουμε, βλέποντας μέσα από μια κουρτίνα του παραθύρου του σπιτιού μας τα φώτα του δρόμου. Η κουρτίνα πρέπει να έχει πολύ λεπτή ύφανση και να βρίσκεται σε στενή επαφή με το μάτι μας. Η κατανομή τη έντασης που βλέπουμε να περιβάλλει τα φώτα, είναι το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου από το ορθογώνιο δισδιάστατο φράγμα (πλέγμα) που δημιουργούν οι ίνες της ύφανσης της κουρτίνας. Τα πρότυπα αυτά σχηματίζονται στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας, όμως τα 'βλέπουμε' (φαινόμενη θέση τους) πέριξ της πηγής.

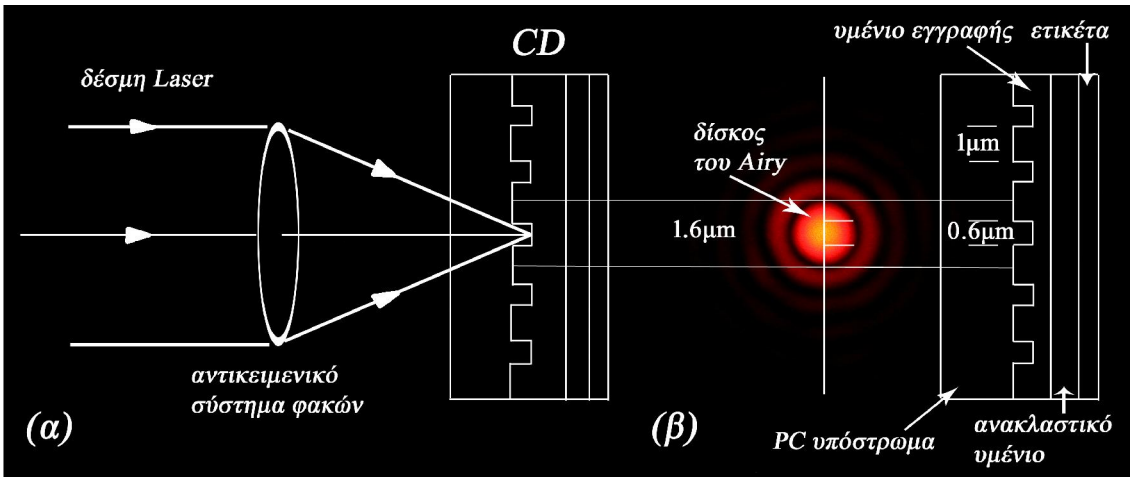
7.9.5 *Περίθλαση του φωτός από ένα δίσκο CD*

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου με τη βοήθεια ενός CD είναι δυνατόν ν' αναδειχθούν φαινόμενα περίθλασης του φωτός. Στα επόμενα στοιχειωδώς θα δούμε ότι πράγματι ένα τέτοιο σύστημα, συνιστά φράγμα περίθλασης και μάλιστα φράγμα ανάκλασης. Εξ ου και η πρόκληση φαινομένων περίθλασης όταν φως προσπίπτει στην επιφάνειά του. Ένας δίσκος CD, όπως και τα παρόμοια μ' αυτόν τεχνήματα: DVD, BR κλπ. συνιστούν ένα μέσο ψηφιακής εγγραφής και ανάγνωσης πληροφοριών μέσω των Η/Υ.

Συγκεκριμένα ένα CD συνίσταται από ένα δίσκο διαμέτρου περίπου 12cm και πάχους περίπου 1.2mm. Το υλικό υπόστρωμα αυτού του δίσκου (το μέγιστο πάχος του) συνίσταται από διαφανές πολυκαρβονικό πολυμερές, στην επιφάνεια του οποίου επιστρώνονται διάφορα υμένια. Και προκειμένου να κατασκευαστεί ένα 'άγραφο' CD (χωρίς δηλ. να έχει απάνω του αποθηκευμένες πληροφορίες), θα πρέπει κατ' αρχή στην επιφάνειά του υποστρώματος να 'αποτυπωθεί' με τη βοήθεια μιας μήτρας, μια ανάγλυφη υπέρπυκνη σπείρα με αρχή ένα σημείο κοντά στην περιφέρειά του και πέρας σε απόσταση περίπου 2.5cm από το κέντρο του. Η απόσταση ανάμεσα στα διάφορα επάλληλα τμήματα της σπείρας είναι $1.6\mu\text{m}$. Επομένως στο υπόστρωμα του δίσκου με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται εγχαράξεις (κανάλια) πλάτους $1.0\mu\text{m}$ και βάθους περίπου $0.6\mu\text{m}$ τα οποία διαχωρίζονται μεταξύ τους από υπερυψωμένο υλικό πλάτους $0.6\mu\text{m}$ (Σχ. 7.9.5.1β). Το ανάγλυφο αυτό στην – απλή του περιγραφή – καλύπτεται από ένα υμένιο διαφανούς χρωστικής, με την ιδιότητα να καθίσταται αδιαφανής (να 'καίγεται'), όταν προσβληθεί τοπικά από μια στενή δέσμη ακτινοβολίας ορισμένου μ.κ. και ορισμένης έντασης. Το επόμενο λεπτό υμένιο το οποίο καλύπτει τη χρωστική είναι από ανακλαστικό μέταλλο. Τέλος πάνω από αυτό επικαλύπτεται από ένα προστατευτικό υλικό που συνιστά και την ετικέτα του δίσκου (Σχ. 7.9.5.3,4).

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι από τη στιγμή που στο υπόστρωμα του πολυκαρβονικού πολυμερούς υλικού αποτυπωθεί το ανάγλυφο, το σύστημα αυτό (δηλ. χωρίς την επικάλυψη των υμενίων), μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ανακλα-

στικό φράγμα περίθλασης. Και αυτό λόγω των εγχαράξεων της επιφάνειάς του ορισμένης περιόδου. Με την ιδιομορφία βέβαια ότι στο CD οι 'γραμμές' του φράγματος είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους αλλά κυκλικά διευθετημένες. Μπορούμε



(Σχ. 7.9.5.1)

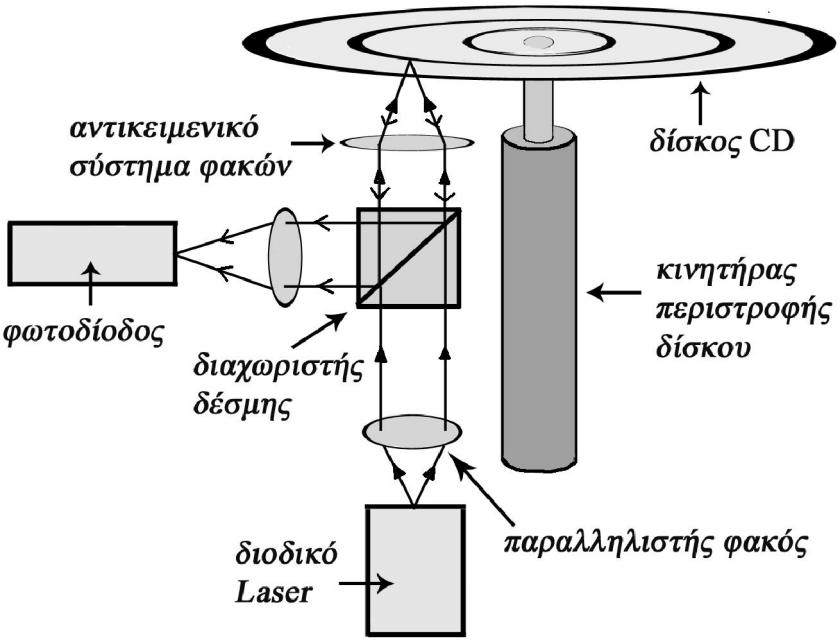
όμως να θεωρήσουμε ότι είναι ευθείες όταν περιοριστούμε σε μικρό τμήμα του. Το προαναφερόμενο CD (δηλ. μόνο της ανάγλυφης αποτύπωσης), εκτός του ότι μπορεί να λειτουργήσει σαν ανακλαστικό φράγμα περίθλασης, λόγω της διαφάνειάς του, μπορεί να λειτουργήσει και σαν φράγμα διερχομένου φωτός όχι όμως πλάτους αλλά φάσεως. Από τη στιγμή βέβαια που έχουν επιστρωθεί τα υμένια και η σχεδόν αδιαφανής ετικέτα, το CD συνιστά ανακλαστικό φράγμα περίθλασης. Και είναι αυτονόητο ότι αν στην επιφάνειά του προσπέσει ένα τυχαίο μετ. κύματος λευκού φωτός εκτός της περίθλασης θα έχουμε και ανάλυσή του (Σχ. 7.9.5.4β,5).

Θα μπορούσαμε να σταματήσουμε εδώ την περιγραφή της ανάδειξης φαινομένων περίθλασης του φωτός από CD λόγω των εγχαράξεών του σαν φράγματος ανάκλασης. Όμως φαινόμενα περίθλασης λαμβάνουν χώρα – και μάλιστα με ουσιαστικό τρόπο – κατά τη διαδικασία της εγγραφής και της ανάγνωσης σ' αυτό πληροφοριών, λόγω του χρησιμοποιούμενου για το σκοπό αυτό οπτικού συστήματος. Αυτός είναι ο λόγος που στα επόμενα – με στοιχειώδη τρόπο – θα περιγράψουμε αυτές τις διαδικασίες.

Αρχές εγγραφής πληροφοριών σε ένα CD

Ένα CD σε θέση εγγραφής σε Η/Υ, έχει τη δυνατότητα μέσω κινητήρα να περιστρέφεται περί άξονα που περνάει από το κέντρο του, όπως φαίνεται στο (Σχ. 7.9.5.2). Επίσης κατά μήκος της ακτίνας του δίσκου, είναι δυνατόν να μετακινείται ένα οπτικό σύστημα. Από την έξοδο του συστήματος προκύπτει μια συγκλίνουσα

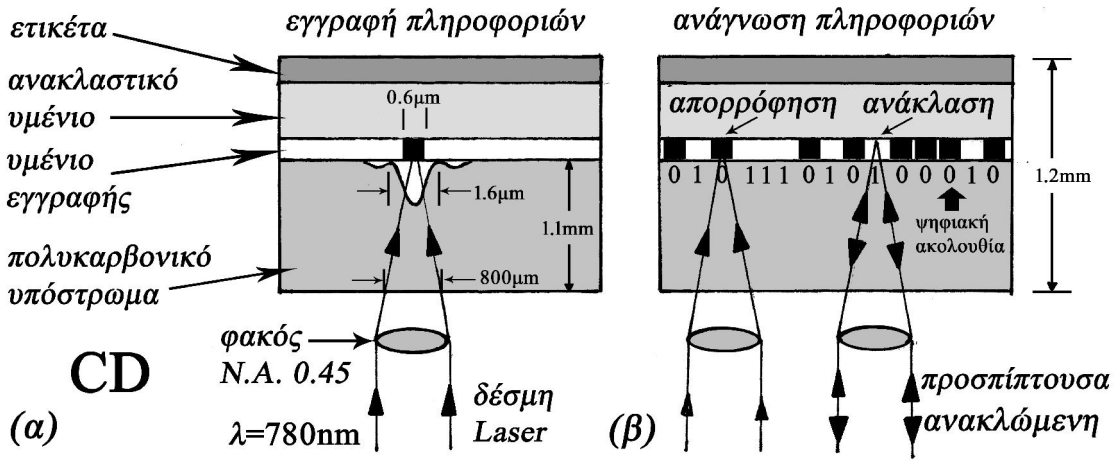
δέσμη, η οποία έχει τη δυνατότητα να σκοπεύει ελεγχόμενα ένα οποιοδήποτε σημείο, στο εσωτερικό ενός οποιουδήποτε τμήματος της σπείρας του εγχάρακτου CD. Η δέσμη αυτή προκύπτει από ένα διοδικό Laser το οποίο εκπέμπει στο υπέρυθρο σε μ.κ. $\lambda = 780\text{nm}$. Η αποκλίνουσα από το Laser δέσμη, μέσω ενός συστήματος παραλληλιστών φακών γίνεται παράλληλη και αφού περάσει από ένα διαχωριστή δέσμης, μέσω ενός αντικειμενικού συστήματος φακών, συγκλίνει στο προαναφερόμενο σημείο του CD. Η κατανομή όμως της έντασης του φωτός σ' αυτό το σημείο είναι μιας ορισμένης μορφολογίας. Πρόκειται για το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer από ένα κυκλικό άνοιγμα και το οποίο βλέπουμε στο (Σχ. 7.9.5.1β).



(Σχ. 7.9.5.2)

(Στην εικόνα τοποθετήσαμε την πρότυπο περίθλασης από το κόκκινο τμήμα του ορατού, επειδή για $\lambda = 780\text{nm}$ δεν είναι ορατό). Η περίθλαση προέρχεται από την κυκλικής μορφής κόρη εξόδου του αντικειμενικού συστήματος φακών. Η διάμετρος του δίσκου του Airy αυτού του προτύπου είναι $1.6\mu\text{m}$. Έστω τώρα ότι η δέσμη οδηγείται στο εσωτερικό του υπερυψωμένου υλικού (πλάτους $0.6\mu\text{m}$) μεταξύ των δύο βαθουλωμάτων (το καθένα από αυτά πλάτους $1.0\mu\text{m}$) του ανάγλυφου των τμημάτων της σπείρας (Σχ. 7.9.5.1α). Τότε η περιοχή αυτή φωτίζεται από το κεντρικό μέρος του δίσκου του Airy (περίπου το $1/3$ της διαμέτρου της) που είναι το ισχυρότερο σε ένταση. Και το κυριότερο είναι ότι έρχεται σε άμεση επίδραση με το υλικό του υμενίου εγγραφής. Που σημαίνει ότι αν η περιοχή εκτεθεί στην ακτινοβολία για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα θα αμαυρωθεί (θα 'καεί') (Σχ. 7.9.5.3α).

Μετακινούμενη λοιπόν η δέσμη από σημείο σε σημείο στο ίδιο τμήμα της σπείρας ή σε διαφορετικά τμήματά της (κατά την ελεγχόμενη περιστροφή του δίσκου), μπορεί να εγγράψει (αμαυρώσει) διάφορα σημεία ή να τα αφήσει ανέπαφα οπότε διατηρείται η διαφάνεια του υμενίου εγγραφής. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο (Σχ. 7.9.5.3β) όπου η συγκλίνουσα δέσμη του Laser αμαύρωσε (ή όχι) διάφορα σημεία ενός τμήματος της σπείρας του CD. Θα πρέπει να πούμε βέβαια ότι εκτός του κεντρικού τμήματος του δίσκου του Airy οι εντάσεις στις άλλες περιοχές του



(Σχ. 7.9.5.3)

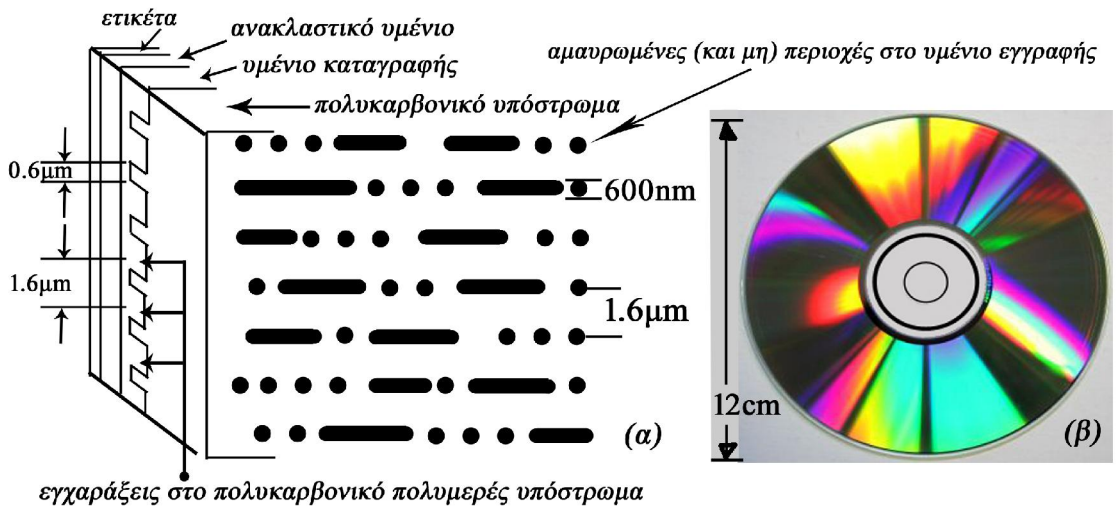
προτύπου είναι τόσο χαμηλές που δεν μπορούν να ενεργοποιήσουν (δηλ. να προκαλέσουν αμαύρωση) σε διπλανά τμήματα του υμενίου εγγραφής.

Αρχές ανάγνωσης πληροφοριών από ένα CD

Από τα προαναφερόμενα γίνεται κατανοητό ότι για ένα 'γραμμένο' CD σημαίνει ότι στο σύνολο της σπείρας (ή σε ένα τμήμα της), είναι καταγεγραμμένη μια ακολουθία από αμαυρωμένα (ή μη) τμήματα του υμενίου καταγραφής. Στο (Σχ. 7.9.5.4α) μπορούμε να δούμε μια περιοχή από γειτονικά τμήματα της σπείρας. Η ίδια συγκλίνουσα δέσμη που προκαλεί την εγγραφή, χρησιμοποιείται και για την ανάγνωση των πληροφοριών. Στο (Σχ. 7.9.5.3β) βλέπουμε τη συγκλίνουσα δέσμη να εστιάζει στο εσωτερικό ενός τμήματος της σπείρας του CD καθώς αυτό περιστρέφεται. Άρα το άκρο της δέσμης συναντάει σημεία αμαυρωμένα και μη. Και αν το άκρο της συναντήσει αμαύρωση, τότε η δέσμη αναρροφείται. Σε διαφορετική περίπτωση, συναντάει το υμένιο εγγραφής (το οποίο κατά τα γνωστά είναι διαφανές) και συνεχίζει προσπίπτοντας στο ανακλαστικό υμένιο. Τότε έχουμε οπισθοανάκλαση και διάδοση της ακτινοβολίας προς τη αντίθετη κατεύθυνση. Τμήμα αυτής της δέσμης – όπως βλέπουμε στο (Σχ. 7.9.5.2) – ανακλάται μέσω του διαχωριστή

δέσμης, και με τη βοήθεια συγκλίνοντος φακού προσπίπτει σε μια φωτοδίοδο. Η φωτοδίοδος με τη σειρά της μετατρέπει το οπτικό σήμα σε ηλεκτρικό. Τα σήματα βέβαια που δέχεται η φωτοδίοδος είναι δύο ειδών. 'Σκότος', που προέκυψε από την απορρόφηση της ακτινοβολίας κατά την πρόσπτωσή της σε αμαυρωμένη περιοχή. Το 'σκότος' αυτό το αντιστοιχούμε με το ψηφιακό μηδέν (0) και το 'φως' που προέκυψε από πρόσπτωση στο ανακλαστικό υμένιο με το ψηφιακό ένα (1). Στην περίπτωση του (Σχ. 7.9.5.3β), η φωτοδίοδος θα αναγνωρίσει την εξής ψηφιακή ακολουθία: 010111010100010.

Στο (Σχ. 7.9.5.4β) βλέπουμε την περίθλαση του φωτός που προκύπτει κατά την πρόσπτωση σε CD ενός τυχαίου μετ. κύματος λευκού φωτός. Επίσης στην



(Σχ. 7.9.5.4)

(Εικ. 7.9.5.5) εκτίθεται το κυκλικής συμμετρίας πρότυπο περίθλασης που εμφανίζεται όταν το CD φωτίζεται στην κεντρική του περιοχή από ένα κερί. Είναι εμφανής η

Σημείωση

Με βάση τα προαναφερόμενα (Σχ. 7.9.5.1β), η περίοδος των εγγεγραμμένων τμημάτων της σπείρας είναι $T = 1.6\mu\text{m} = 1.6\times10^{-3}\,\text{mm}$. Επομένως ο αριθμός των εγχαράξεων ανά χιλιοστό τοπικά στο CD θα είναι $N = (1/T) = 625\,\text{γρ.}/\text{mm}$.

διαδοχή των χρωμάτων της ίριδας από το ιώδες εσωτερικά μέχρις το κόκκινο εξωτερικά. Με τη βοήθεια του (Σχ. 7.9.5.6) δίνουμε μια προσεγγιστική ερμηνεία του

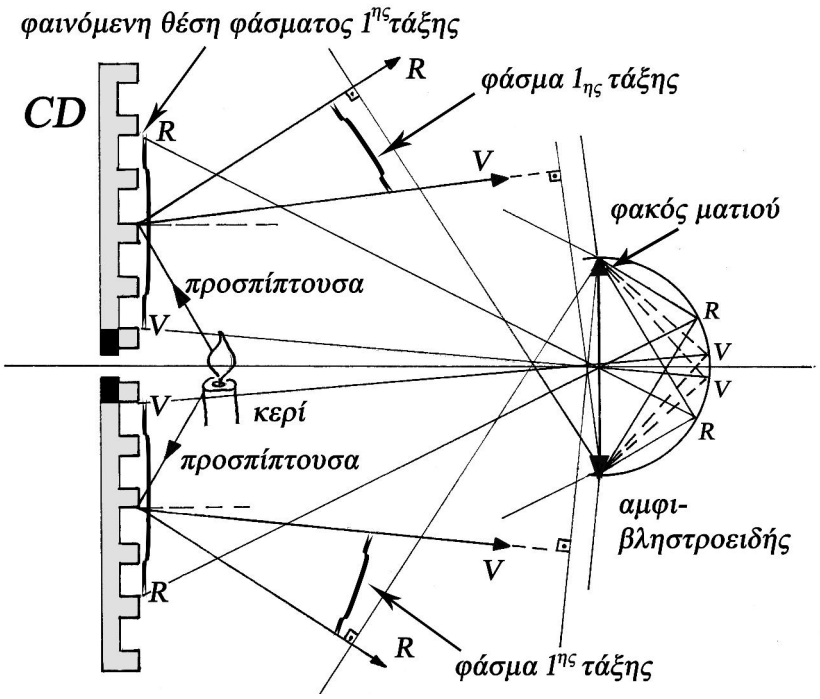
τρόπου εμφάνισης αυτού του φάσματος. Βλέπουμε ότι από την πηγή που φωτίζει το CD (τη φλόγα του κεριού), προέρχεται μια διαταραχή η οποία προσπίπτει στο πάνω μέρος της επιφάνειάς του (όπως και η συμμετρική της προς τα κάτω). Η πρόσπτωση γίνεται σε φράγμα ανάκλασης, οπότε θα αναδύονται από αυτό λόγω

(Εικ. 7.9.5.5)

περίθλασης: Η μηδενική τάξη και πέριξ αυτής οι τάξεις πρώτη, δεύτερη κλπ. Στο σχήμα μας (λόγω της συγκεκριμένης απόστασης του κεριού από το CD ($5-6\text{cm}$)) γίνεται εμφανής μόνο αυτή της πρώτης τάξης (βλ. και (Σχ. 7.9.2.2α)). Οι δεύτερης τάξης κλπ. είναι πολύ ασθενικές και δεν συμπεριλαμβάνονται. Για την πρώτης τάξης όμως περιθλώμενη λόγω της πολυχρωματικότητας του προσπίπτοντος φωτός, θα έχουμε ανάλυσή του από το κόκκινο (R) με την μεγαλύτερη απόκλιση, μέχρις το ιώδες (V) με τη μικρότερη.

Στο σχήμα φαίνονται τα συμμετρικά αναδυόμενα φάσματα πρώτης τάξης πάνω και κάτω από τον οπτικό άξονα της διάταξης. Όμως το φάσμα αυτό εκτός των άλλων έχει και κυκλική συμμετρία, επειδή οι εγχαράξεις που συγκροτούν τη σπείρα διαθέτουν την ίδια συμμετρία. Επομένως για να δούμε ποια θα είναι η μορφή του αναδυόμενου περιθλώμενου από το CD μετ. κύματος, θα πρέπει το ένα από τα φάσματα πρώτης τάξης, να το περιστρέψουμε κατά 360^0. Τα όρια $(R-V, V-R)$ των χωρικών συχνοτήτων στο επίπεδο του σχήματος, με τη μορφή επιπέδων μετ. κύματος εστιάζονται από τον κρυσταλλώδη φακό του ματιού (που

παρατηρεί στο άπειρο) στον αμφιβληστροειδή του σε αντίστοιχες θέσεις $(R-V, V-R)$ (με όλα τα άλλα χρώματα της ίριδας ενδιάμεσα). Και λόγω του ότι τελικά το μάτι μας 'βλέπει' κατά την προέκταση των προσπιπτουσών σ' αυτό, (ευ-



(Σχ. .7.9.5.6)

θείες από τα σημεία $(R-V, V-R)$ μέσω του κέντρου του κρυσταλλώδους φακού), τη φαινόμενη θέση του κυκλικής συμμετρίας φάσματος θα την εντοπίζουμε πάνω στο επίπεδο του δίσκου του CD, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην (Εικ. 7.9.5.5).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

1.1 *Κατά διεύθυνση παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης* ϕ
1.2 *Η ανάδειξη της δεύτερης σχέσης του Green*
1.3 *Η εξίσωση του Helmholtz*
1.4 *Βοηθητικοί υπολογισμοί*

1.1 *Κατά διεύθυνση παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης* ϕ*

Η κατά διεύθυνση παράγωγος $\partial\phi/\partial s$ ενός βαθμωτού πεδίου $\phi(x,y,z)$, σχετίζεται άμεσα με τη διανυσματική συνάρτηση της λεγόμενης κλίσης του $(grad\phi)$, η οποία από φυσική άποψη μας δίνει τη μέγιστη μεταβολή της ϕ κατά μέτρο και διεύθυνση σ' οποιοδήποτε σημείο του χώρου στον οποίο ορίζεται. Η συσχετισμός γίνεται με τη βοήθεια της παραμετρικής περιγραφής καμπυλών που απόδειξη στο χώρο όπου ορίζεται η συνάρτηση ϕ.

Καμπύλη (c) ***στο χώρο, που ορίζεται από παραμετρικές εξισώσεις ως προς μία παράμετρο*** t

Θεωρούμε αρχικά ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x,y,z)$(όπου η ϕ είναι συνεχής και διαφορίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$), το οποίο προσδιορίζεται σε σχέση με ένα τρισορθογώνιο σ.σ. x,y,z με αρχή το σημείο O (Σχ. 1.1.1). Σαν παράδειγμα η $\phi(x,y,z)$ μπορεί να παριστάνει το πεδίο των θερμοκρασιών $T(x,y,z)$. Ο ορισμός μιας καμπύλης (c) στο χώρο αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της διανυσματικής σχέσης:

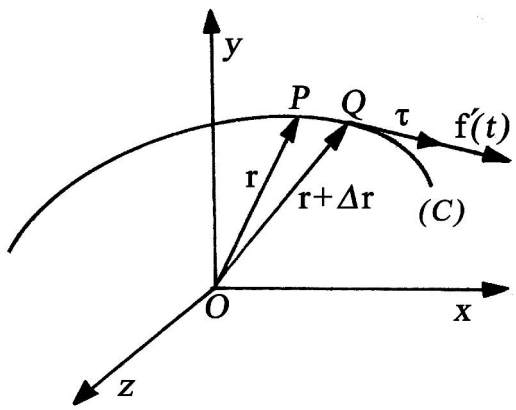
$$\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \qquad a\le t\le b \tag{1.1.1}$$

όπου $\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$ το διάνυσμα θέσης $\overline{OP}$ και $x(t),y(t),z(t)$ οι συνιστώσες του, συναρτήσει μιας παραμέτρου $t\in[a,b]$. Θέλουμε τώρα να ορίσουμε την παράγωγο της $\mathbf{r}=\mathbf{f}(t)$ στο σημείο P. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε πάνω στην καμπύλη και πολύ κοντά στο P ένα σημείο Q, του οποίου το διάνυσμα θέσης θα είναι το

* HWEI P. HSU: " Vector Analysis" . Simon and Schuster (TECH OUTLINES). N. Y. (1969).

$\overline{OQ} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{f}(t+\Delta t)$. Οπότε η παράγωγος $\mathbf{f}'(t)$ της $\mathbf{f}(t)$ στο P θα έχει τη διεύθυνση της εφαπτόμενης στο σημείο αυτό και θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\mathbf{f}'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{} \frac{\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t} \tag{1.1.2}$$



(Σχ. 1.1.1)

Οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ στο P θα είναι:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \tag{1.1.3}$$

Η καμπύλη (c) στο χώρο που ορίζεται τώρα από την παράμετρο s, που παριστάνει το μήκος επί αυτής της καμπύλης

Έστω τώρα ds το στοιχειώδες μήκος του τόξου PQ πάνω στην καμπύλη (c) (Σχ. 1.1.2). Θα έχουμε: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + d^2z$ και διαιρώντας τα μέλη της σχέσης αυτής με το dt^2 βρίσκουμε:

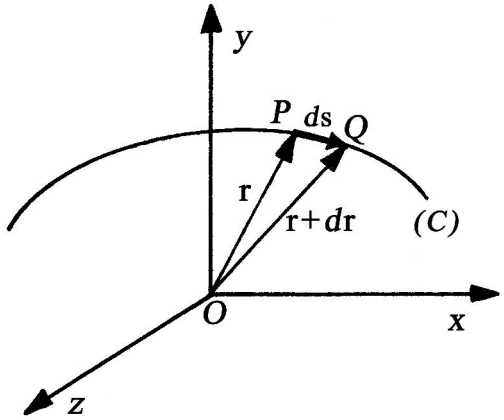
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{1.1.4}$$

Αλλά από τη (σχ. 1.1.1): $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ οπότε:

$\frac{dx}{dt} = f_x'(t)$, $\frac{dy}{dt} = f_y'(t)$, $\frac{dz}{dt} = f_z'(t)$ και η αντικατάστασή τους στη (σχ. 1.1.4) μας δίνει:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left[f_x'(t)\right]^2+\left[f_y'(t)\right]^2+\left[f_z'(t)\right]^2}=\left|\mathbf{f}'(t)\right| \tag{1.1.5}$$

Και άρα: $\frac{ds}{dt}=\left|\mathbf{f}'(t)\right|>0$. Οπότε με το δεδομένο ότι ισχύει η τελευταία σχέση, η s θα είναι μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) συνάρτηση της t. Άρα θα υπάρχει η



(Σχ. 1.1.2)

αντίστροφή της δηλ. η:

$$t=q(s) \quad \text{όταν} \quad a\le t\le b \quad \text{και} \quad 0\le s\le l \tag{1.1.6}$$

Επομένως: $\mathbf{f}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}=x\left[q(s)\right]\mathbf{i}+y\left[q(s)\right]\mathbf{j}+z\left[q(s)\right]\mathbf{k}=$
$=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}=\mathbf{g}(s)$. Δηλ. η:

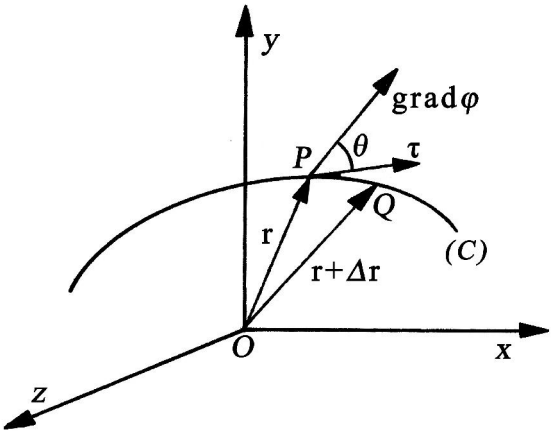
$$\mathbf{g}(s)=\mathbf{f}(t) \tag{1.1.7}$$

θα περιγράφει με τον ίδιο τρόπο την καμπύλη (c) στον χώρο ορισμού της $\phi(x,y,z)$ αλλά με παράμετρο το μήκος του τόξου της s. Θ' αποδείξουμε στα επόμενα ότι $\mathbf{g}'(s)=\boldsymbol{\tau}$ όπου από την (σχ. 1.1.3): $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{f}'(t)/\left|\mathbf{f}'(t)\right|$. Πράγματι: $\mathbf{g}'(s)=\frac{d\mathbf{g}(s)}{ds}=$
$=\frac{d\mathbf{g}(s)}{dt}\frac{dt}{ds}=\left(\frac{d\mathbf{g}(s)}{dt}\right)\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)=\left(\mathbf{g}(s)=\mathbf{f}(t)\right)=\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{\mathbf{f}'(t)}{\left|\mathbf{f}'(t)\right|}=\boldsymbol{\tau}$. Άρα:

$$\mathbf{g}'(s)=\boldsymbol{\tau} \tag{1.1.8}$$

Κατά διεύθυνση παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη για το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο σ.σ. x,y,z και ότι η καμπύλη (c) διαγράφεται σ' αυτό το χώρο (Σχ. 1.1.3). Έστω επίσης δύο σημεία P,Q πολύ κοντά μεταξύ τους που ορίζονται από τα διανύσματα θέσης: $\mathbf{r}:[\mathbf{f}(t)]$ και $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}:[\mathbf{f}(t+\Delta t)]$ Τότε



(Σχ. 1.1.3)

η κατά διεύθυνση παράγωγος στο σημείο P κατά μήκος του τόξου της καμπύλης (c) ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=\frac{\phi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\phi(x,y,z)}{\underset{PQ\to 0}{PQ}} \tag{1.1.9}$$

Και εφόσον οι συνιστώσες x,y,z του $\mathbf{r}$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του μήκους του τόξου s κατά μήκος της συγκεκριμένης καμπύλης, η $\partial\phi/\partial s$ μπορεί να δοθεί με τη μορφή:

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{1.1.10}$$

Ορίζουμε τώρα τη διανυσματική συνάρτηση $\text{grad}\phi$ όπου:

$$grad\phi\equiv\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \tag{1.1.11}$$

Και με δεδομένη τη (σχ. 1.1.8) δηλ. $\mathbf{g}'(s) = \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial x}{\partial s}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s}\mathbf{k}$ η (σχ. 1.1.10) γράφεται:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = grad\phi \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{1.1.12}$$

Και από τη (σχ. 1.1.12) θα έχουμε: $\frac{\partial \phi}{\partial s} = |grad\phi||\boldsymbol{\tau}|\cos\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{\tau}$ και gradϕ (Σχ. 1.1.3). Και προκειμένου να πάρουμε τη μέγιστη τιμή της κατά διεύθυνση παραγώγου στη θέση P, θα πρέπει να είναι: $\theta = 0^0$. (τότε $grad\phi \parallel \boldsymbol{\tau}$). Επομένως:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial s}\right|_{\max} = |grad\phi| \tag{1.1.13}$$

Από τις (σχ. 1.1.12,13) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: Από τις άπειρες θεωρητικά τον αριθμό καμπύλες (c) που διέρχονται από το σημείο P του βαθμωτού πεδίου που ορίζεται από τη συνάρτηση $\phi(x, y, z)$, υπάρχει μια κατά μήκος της οποίας η μεταβολή $\partial\phi/\partial s$ είναι η μέγιστη. Η διεύθυνση αυτή είναι αυτή του διανύσματος gradϕ και η τιμή της είναι η $|\text{grad}\phi|$.

1.2 *Η ανάδειξη της δεύτερης σχέσης του Green*

Θεωρούμε στο χώρο ένα τυχαίο όγκο V ο οποίος περιβάλλεται από την επιφάνεια S. Στον ίδιο χώρο ορίζονται και οι βαθμωτές συναρτήσεις $\Phi(x, y, z)$ και $G(x, y, z)$ που είναι συνεχείς, όπως και οι πρώτες και δεύτερες παράγωγές τους (στον όγκο V καθώς και στην επιφάνεια S). Τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε τη διανυσματική συνάρτηση:

$$\mathbf{u} = \Phi gradG - Ggrad\Phi \tag{1.2.1}$$

Οπότε με βάση το θεώρημα των Ostrogradsky-Gauss (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα (§ 2.1.1)) θα έχουμε:

$$\iiint_V div\mathbf{u}dV = \oiint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.2.2}$$

όπου $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$, με $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο, (με διεύθυνση προς το εξωτερικό του όγκου V) στη στοιχειώδη επιφάνεια ds. Οπότε με την αντικατάσταση της (σχ. 1.2.1) στη (σχ. 1.2.2) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}&\iiint_V div\left[\Phi gradG\right]dV - \iiint_V div\left[Ggrad\Phi\right]dV = \\ &= \oiint_S \Phi\left[gradG\right]\cdot d\mathbf{s} - \oiint_S G\left[grad\Phi\right]\cdot d\mathbf{s}\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Γνωρίζουμε όμως από το διανυσματικό διαφορικό λογισμό ότι αν q είναι μια βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{f}$ μια διανυσματική, τότε θα ισχύει η ιδιότητα:

$$div\left(q\mathbf{f}\right) = qdiv\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot gradq \tag{1.2.4}$$

Επίσης με βάση τον ορισμό της κατά διεύθυνση παραγώγου βαθμωτής συνάρτησης q (βλ. (σχ. 1.1.12) της προηγούμενης παραγράφου), αποδείξαμε ότι ισχύει η σχέση:

$$gradq\cdot\mathbf{n} = \partial q/\partial n \tag{1.2.5}$$

όπου εδώ η $\partial q/\partial n$ είναι η κατά διεύθυνση παράγωγος σε σχέση με το μήκος του τόξου που είναι παράλληλο με το $\mathbf{n}$, το κατά τα γνωστά μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια ds της S και η οποία περικλείει τον όγκο V. Οπότε με τη βοήθεια των δύο τελευταίων σχέσεων η (σχ. 1.2.3) γίνεται:

$$\begin{aligned}&\iiint_V\left[\Phi div\left(gradG\right) + gradG\cdot grad\Phi\right]dV - \iiint_V\left[Gdiv\left(grad\Phi\right) + grad\Phi\cdot gradG\right]dV = \\ &= \oiint_S \Phi\frac{\partial G}{\partial n}ds - \oiint_S G\frac{\partial \Phi}{\partial n}ds \;\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\iiint_V \Phi div\left(gradG\right)dV - \iiint_V Gdiv\left(grad\Phi\right)dV = \oiint_S\left[\Phi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right]ds \tag{1.2.6}$$

Αλλά αν Q είναι μια βαθμωτή συνάρτηση θα έχουμε:

$$\begin{aligned}&div\left(gradQ\right) = div\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 Q\end{aligned}$$

Και επομένως η (σχ. 1.2.6) τελικά παίρνει τη μορφή:

$$\iiint_V \left[\Phi\nabla^2 G - G\nabla^2\Phi\right]dV = \oiint_S \left[\Phi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right]ds \tag{1.2.7}$$

Η τελευταία ονομάζεται δεύτερη σχέση του Green.

1.3 *Η εξίσωση του Helmholtz*

Δεχόμαστε ότι τα περιθλώντα ανοίγματα είναι σε διαστάσεις πολύ μεγαλύτερα του μ.κ. της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας. Αυτό σημαίνει ότι αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την ύλη στην περιοχή των ορίων του διαφράγματος συμβαίνει σε πολύ μικρή περιοχή λίγων μηκών κύματος. Δηλ. τελικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σύζευξη μεταξύ συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι αμελητέα.* Επομένως μπορούμε να παραβλέψουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του και να υιοθετήσουμε τη βαθμωτή μορφή για το περιθλώνενο πεδίο. Και με δεδομένη τότε την ισοδυναμία μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, επιλέγουμε για τους υπολογισμούς μας το ηλεκτρικό.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι με τη βαθμωτή συνάρτηση $u(P,t)$ παριστάνουμε τη χωροχρονική εξάρτηση του ηλ. πεδίου σε μια θέση P του χώρου και σε χρόνο t, για μια ακτινοβολία που θεωρείται ψευδομονοχρωματική. Τότε η $u(P,t)$ σε μιγαδική μορφή μπορεί να γραφεί:

$$u(P,t) = A(P)e^{-i\left[\omega t + \Phi(P)\right]} \tag{1.3.1}$$

ή

$$u(P,t) = \Psi(P)e^{-i\omega t} \tag{1.3.2}$$

όπου:

$$\Psi(P) = A(P)e^{-i\Phi(P)} \tag{1.3.3}$$

με $A(P)$ και $\Phi(P)$ το πλάτος και η φάση της διαταραχής στο σημείο P του χώρου. Με την $\Psi(P)$ περιγράφουμε το λεγόμενο μιγαδικό πλάτος της διαταραχής και η $u(P,t)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης του Maxwell:

$$\nabla^2 u(P,t) - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3.4}$$

---

* J.W. Goodman: 'Introduction to Fourier Optics' Third Ed. B. Roberts & Co. Englewood Colorado (2005) (Ch. 3).

όπου υ η ταχύτητα διάδοσης. Η διαφορική αυτή εξίσωση ισχύει για διάδοση σε γραμμικό, ισότροπο ομογενές και μη μαγνητικό μέσο. Τότε αντικαθιστώντας τη (σχ. 1.3.2) στην (σχ. 1.3.4) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \Psi(P)}{\partial x^2}e^{-i\omega t},\quad \frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \Psi(P)}{\partial y^2}e^{-i\omega t},\quad \frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \Psi(P)}{\partial z^2}e^{-i\omega t} \tag{1.3.5}$$

και $$\frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial t^2}=(-i\omega)^2\Psi(P)e^{-i\omega t} \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial t^2}=-\omega^2\Psi(P)e^{-i\omega t} \tag{1.3.6}$$

Και με την αντικατάσταση των (σχ. 1.3.5,6) στη (σχ. 1.3.4) θα έχουμε:
$\left[\frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial z^2}\right]e^{-i\omega t}=-\frac{1}{\upsilon^2}\left[-\omega^2\Psi(P)\right]e^{-i\omega t}$. Και τελικά:

$$\nabla^2\Psi(P)+k^2\Psi(P)=0 \tag{1.3.7}$$

όπου $k=(\omega/\upsilon)=(2\pi/\lambda)$ είναι το μέτρο του κυματάριθμου. Η (σχ. 1.3.7) ονομάζεται εξίσωση του Helmholtz. Άρα το μιγαδικό πλάτος κάθε μονοχρωματικής διαταραχής (λύσης της διαφορικής εξίσωσης του Maxwell) που διαδίδεται στο κενό ή σε ομογενές, ισότροπο και μη μαγνητικό υλικό, υπακούει σ' αυτή την εξίσωση.

1.4 *Βοηθητικοί υπολογισμοί που χρησιμοποιούνται για την ανάδειξη του θεωρήματος των Helmholtz- Kirchhoff*

1) Ν΄ αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{\partial G}{\partial n}=\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01})\left(ik-\frac{1}{r_{01}}\right)G,\quad \left[G=\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right]$

υπεράνω μιας επιφάνειας S.

- Θα έχουμε: $\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r_{01}}\left(\frac{\partial r_{01}}{\partial n}\right)$ (όπου το άκρο του $\mathbf{r}_{01}$, επί της επιφάνειας S).

α) $$\frac{\partial G}{\partial r_{01}}=\frac{\partial}{\partial r_{01}}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right)=\frac{\left(e^{ikr_{01}}\right)'_{r_{01}}r_{01}-e^{ikr_{01}}\left(r_{01}\right)'}{{r_{01}}^2}$$

$\left(e^{ikr_{01}}\right)'_{r_{01}}=e^{ikr_{01}}\frac{d(ikr_{01})}{dr_{01}}=ike^{ikr_{01}}$ οπότε: $\frac{\partial G}{\partial r_{01}}=\frac{ike^{ikr_{01}}r_{01}-e^{ikr_{01}}}{{r_{01}}^2}=\frac{ike^{ikr_{01}}-\left(e^{ikr_{01}}/r_{01}\right)}{r_{01}}\Rightarrow$

$$\frac{\partial G}{\partial r_{01}} = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right) = \left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)G$$

β) $\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = grad\, r_{01} \cdot \mathbf{n}$ (κατά διεύθυνση παράγωγος της συνάρτησης: $r_{01} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ κατά μήκος μιας καμπύλης εφαπτομενικό της οποίας είναι το $\mathbf{n}$).

$grad\, r_{01} = grad\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv \nabla\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \nabla u^{1/2} = \frac{\partial u^{1/2}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u^{1/2}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u^{1/2}}{\partial z}\mathbf{k}$ όπου $u = x^2 + y^2 + z^2$ και επειδή:

$\left(u^n\right)'_x = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{\partial u^{1/2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Με τον ίδιο τρόπο: $\frac{\partial u^{1/2}}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ και $\frac{\partial u^{1/2}}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Επομένως:

$grad\, r_{01} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}}$ επειδή:

$\mathbf{r}_{01} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r_{01} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Και άρα:

$\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = grad\, r_{01} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}} \cdot \mathbf{n} = \frac{r_{01}\hat{\mathbf{r}}_{01}}{r_{01}} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}_{01} \cdot \mathbf{n} = \cos\left(\hat{\mathbf{r}}_{01}, \mathbf{n}\right)$ ($\hat{\mathbf{r}}_{01}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\mathbf{r}_{01}$ και $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια S).

Επομένως αν στη σχέση: $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r_{01}}\left(\frac{\partial r_{01}}{\partial n}\right)$ αντικαταστήσουμε: Τα της παραγράφου (α): $\frac{\partial G}{\partial r_{01}} = \left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)G$ καθώς και τα της (β): $\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = \cos\left(\hat{\mathbf{r}}_{01}, \mathbf{n}\right)$ βρίσκουμε τελικά την προς απόδειξη σχέση: $\frac{\partial G}{\partial n} = \cos\left(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}\right)\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)G$.

2) Ν' αποδειχθεί η σχέση: $\frac{\partial G}{\partial n} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)G$ όπου ε το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\varepsilon}$ (με διεύθυνση προς το εσωτερικό της επιφάνειας S_ε). Θα έχουμε: $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right)$.

α) Με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως (§ 1α), αποδεικνύεται ότι: $\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = \left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right)G$.

β) Και $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = grad\,\varepsilon \cdot \mathbf{n}$. Αλλά $grad\,\varepsilon = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\varepsilon}$ οπότε:

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = grad\,\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} = -1$. Και το τελευταίο επειδή για τη σφαίρα ακτίνας ε τα $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\mathbf{n}$ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 180^0 (δηλ. είναι αντίθετης κατεύθυνσης). Επομένως αν στη σχέση $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right)$ αντικαταστήσουμε: Τα της παραγράφου (α): $\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = \left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right)G$ καθώς και τα της (β): $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = -1$ βρίσκουμε τελικά την προς απόδειξη σχέση: $\frac{\partial G}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right)G \cdot (-1) = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)G$.

3) Ν' αποδειχθεί η σχέση: $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right) = \left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$ υπεράνω της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r_{01}.

Θα έχουμε: $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right) = \frac{\partial}{\partial r_{01}}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right)\frac{\partial r_{01}}{\partial n}$.

α) Από την αποδεικτική διαδικασία της (§ 1α) βρήκαμε ότι:

$\frac{\partial}{\partial r_{01}}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right) = \left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$.

β) Επίσης από την (§ 1β) βρήκαμε: $\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = gradr_{01} \cdot \mathbf{n}$ και $gradr_{01} = \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}}$. Οπότε:

$\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}} \cdot \mathbf{n} = \frac{r_{01}}{r_{01}}\hat{\mathbf{r}}_{01} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}_{01} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \frac{\partial r_{01}}{\partial n} = 1$, επειδή τα $\hat{\mathbf{r}}_{01}, \mathbf{n}$ είναι μοναδιαία και παράλληλα στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r_{01}. Και τελικά:

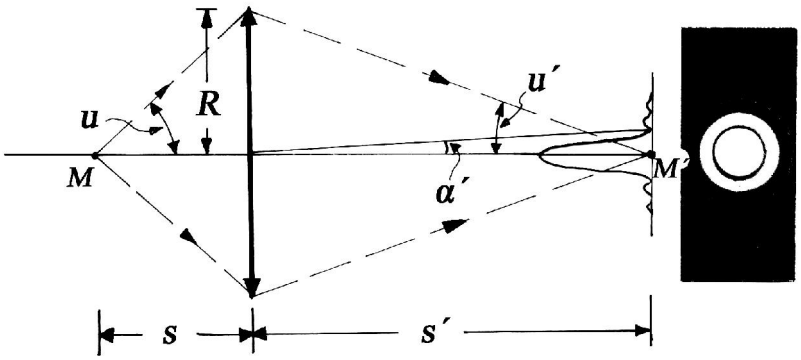
$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right) = \frac{\partial}{\partial r_{01}}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right)\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Διακριτική ικανότητα φακού.
Διακριτική ικανότητα του ανθρώπινου ματιού

Διακριτική ικανότητα φακού

Είναι γνωστό από τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής ότι ένα σημειακό αντικείμενο M απεικονίζεται μέσω ενός φακού σε ένα σημειακό είδωλο M' (Σχ. 2.1). Και αν ο φακός θεωρηθεί λεπτός η σχέση μεταξύ των s, s' και f που είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις αντικειμένου και ειδώλου από το φακό καθώς και η εστια-



(Σχ. 2.1)

κή του απόσταση, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \tag{2.1}$$

Στην πραγματικότητα όμως αν με ένα ισχυρό μεγεθυντικό σύστημα παρατηρήσουμε στην περιοχή του υποτιθέμενου σημειακού ειδώλου M', αυτό το οποίο θα δούμε είναι αντί μιας φωτεινής κηλίδας, μια κατανομή έντασης του φωτός που όπως αποδεικνύεται μορφολογικά και από άποψη διαστάσεων είναι πανομοιότυπη με το πρότυπο περίθλασης ενός κυκλικού ανοίγματος, που η διάμετρός του είναι ίση με αυτή του απεικονίζοντος φακού. Δηλ. θα δούμε το δίσκο του Airy να τον περιβάλλουν μικρός αριθμός δακτυλίων όπως φαίνεται στην ένθετη εικόνα του (Σχ. 2.1). Το γεγονός αυτό κατά τα γνωστά οφείλεται στην κυματική φύση του φωτός το οποίο δεν διαδίδεται ανεμπόδιστα από το φακό, αλλά τελικά περιθλάται από τα όριά του.

Οπότε σαν 'σημειακό' είδωλο στη θέση M', θα θεωρούμε το δίσκο του Airy, αγνοώντας τους δευτερεύοντες φωτεινούς δακτυλίους των οποίων η ένταση είναι αμελητέα. Και όπως γνωρίζουμε (βλ. § 7.5.1) οι διαστάσεις του δίσκου εξαρτώνται από παραμέτρους όπως: Το μ.κ. της φωτίζουσας το φακό ακτινοβολίας λ , τη διάμετρο του φακού $2R$ καθώς και την απόσταση s' φακού – ειδώλου. Όσον αφορά την ακτίνα ρ αυτού του δίσκου δίνεται από τη (σχ. 7.5.1.11):

$$\rho = \frac{1.22\lambda s'}{2R} \tag{2.2}$$

Σημείωση

Στον τύπο που μας δίνει η (σχ. 2.2) μπορούμε ν' αναγνωρίσουμε μια φαινομενική αυθαιρεσία, δεδομένου ότι έχουμε αντικαταστήσει την εστιακή απόσταση f του μετασχηματιστή φακού της (σχ. 7.5.1.11): ($\rho = 1.22\lambda f/2R$) (περίθλαση Fraunhofer με τη βοήθεια φακού), με την απόσταση s' φακού αντικειμένου στο σύστημα απεικόνισης του (Σχ. 2.1). Η αλλαγή αυτή δεν είναι αυθαίρετη αλλά ισχύει όπως περιγράφεται στη θεωρία της Οπτικής Fourier. Πράγματι* εκεί αποδεικνύεται ότι το ηλ. πεδίο στο σημείο σύγκλισης του σφαιρικού μετ. κύματος (σε απόσταση s' από αυτόν), το οποίο εγκαταλείπει τα όρια του απεικονιστή φακού, δίνεται από το μετασχηματισμό Fourier της κόρης του φακού. Η κόρη του φακού αφορά τα όριά του και είναι: $P(x, y) = 1$ στο εσωτερικό του και μηδέν αλλού. Επομένως η ακτίνα ρ του δίσκου του Airy θα δίνεται από τη (σχ. 2.2) όπου $2R$ η διάμετρος του απεικονιστή φακού και s' η απόσταση φακού – ειδώλου.

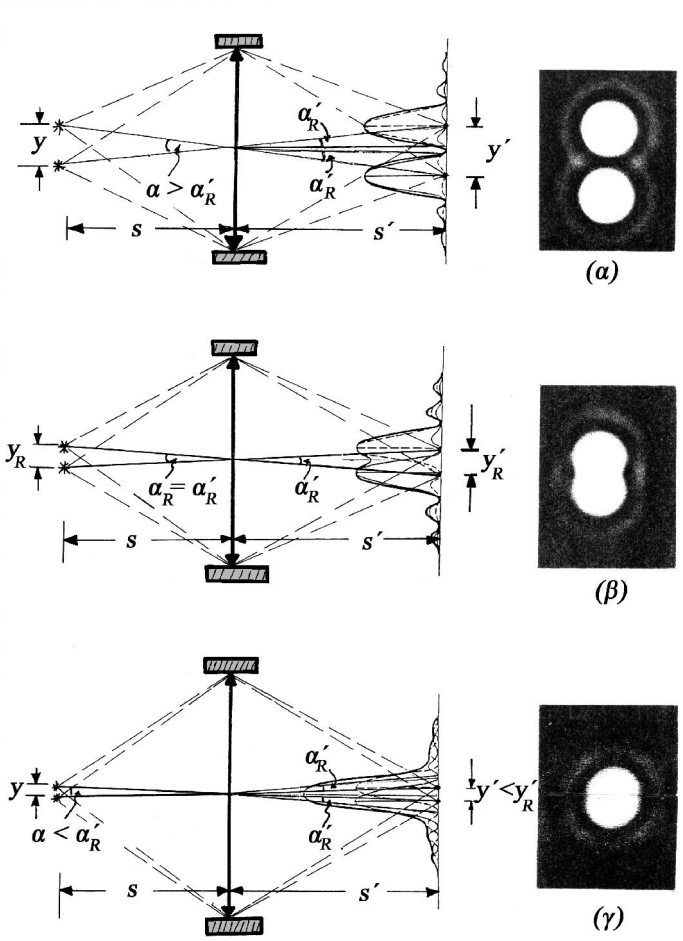
Από πρακτική άποψη οι δίσκοι του Airy που αντικαθιστούν τα 'σημειακά' είδωλα είναι πολύ μικρών διαστάσεων. Πράγματι αν $\overline{\lambda} = 0.55 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ το μέσο μ.κ. του χρησιμοποιούμενου κατά την απεικόνιση φωτός , $2R = 50\text{mm}$ η διάμετρος του φακού και $s' = 150\text{mm}$ η απόσταση φακού ειδώλου, τότε βρίσκουμε: $\rho = 0.002\text{mm}$. δηλ. περίπου το ένα τρίτο του μ.κ. του φωτός. Υποδεκαπλασιάζοντας την διάμετρο του φακού, δεκαπλασιάζουμε την ακτίνα του δίσκου του Airy. Που σημαίνει με μια πρώτη ματιά ότι: Για να είναι ευκρινές το είδωλο ενός αντικειμένου, θα πρέπει οι δίσκοι του Airy να μην συγχέονται μεταξύ τους αλλά να είναι διακριτοί. Και το τελευταίο θα επιτευχθεί όπως είναι επόμενο, με απεικονιστές φακούς μεγάλης διαμέτρου. Οι φακοί αυτοί βέβαια θα πρέπει να είναι διορθωμένοι από σφάλματα, επειδή τα τελευταία έχουν άμεσο δυσμενές αποτέλεσμα στη μορφή και τις διαστάσεις των

---

* J.W. Goodman: 'Introduction to Fourier Optics' McGraw-Hill Book Co. N.Y. (1968) (Ch. 5).

δίσκων του Airy. Τέλος θα πρέπει να πούμε ότι η ακτίνα των δίσκων του Airy επηρεάζεται αναλογικά και από το μ.κ. της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας όπου για την ορατή περιοχή οι τιμές του είναι περίπου μεταξύ 400 και 700nm.

Από όσα αναφέραμε, γίνεται σαφές ότι το φαινόμενο της περίθλασης του φωτός επηρεάζει με συγκεκριμένο τρόπο την ποιότητα απεικόνισης μέσω ενός φακού και κατά προέκταση μέσω ενός περισσότερο περίπλοκου οπτικού συστήματος. Το γεγονός σχετίζεται με αυτό που ονομάζουμε ***διακριτική ικανότητα (resolving power)*** φακού ή οπτικού συστήματος που σε πρώτη προσέγγιση θα τα θεωρήσουμε απαλλαγμένα σφαλμάτων. Για ένα φακό λοιπόν, θα μελετήσουμε τη δυνατότητα του να διακρίνει σαν ξεχωριστά πάνω σ' ένα επίπεδο απεικόνισης δύο σημεία, τα οποία στο επίπεδο του αντικειμένου βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση. Στο (Σχ. 2.2α) στο επίπεδο του αντικειμένου βλέπουμε δύο σημεία (λαμβάνονται σαν



(Σχ. 2.2)

σημειακές πηγές φωτός), τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση y. Τα τελευταία θ' απεικονιστούν μέσω ενός φακού στο επίπεδο του ειδώλου, με τη γνωστή μορφή

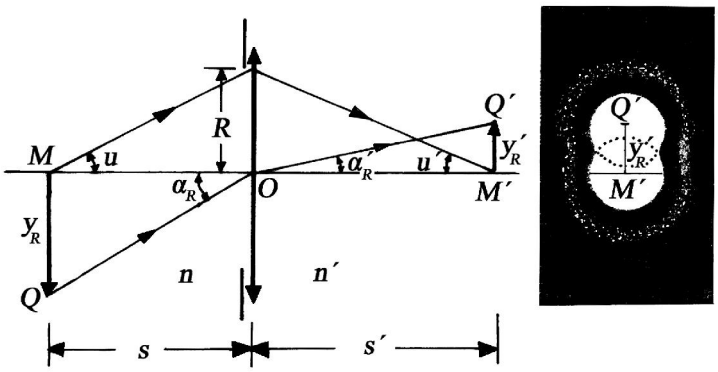
των κατανομών έντασης (τις βλέπουμε τη μια με διακεκομμένη και την άλλη με συνεχή γραμμή). Και επειδή οι πηγές στο αντικείμενο εκπέμπουν μεταξύ τους με ασύμφωνο τρόπο, οι εντάσεις στο επίπεδο του ειδώλου θα προστεθούν, δίνοντας την τελική κατανομή της έντασης (συνεχής γραμμή). Και στην προκειμένη περίπτωση – η απόσταση μεταξύ των πηγών στο αντικείμενο είναι τέτοια – έτσι ώστε να βλέπουμε ότι η συνολική κατανομή της έντασης του φωτός, συνίσταται από δύο σαφώς διαχωριζόμενα μέγιστα με ένα μηδενικό ελάχιστο μεταξύ τους.

Θεωρούμε τώρα ότι τα δύο σημεία στο επίπεδο του αντικειμένου πλησιάζουν μεταξύ τους σε μια συγκεκριμένη απόσταση $y = y_R$ έτσι ώστε για τις δύο κατανομές της έντασης τους στο επίπεδο απεικόνισης να ισχύει το εξής: Το κύριο μέγιστο της πρώτης κατανομής να συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο της δεύτερης. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα, η συνολική ένταση (συνεχής γραμμή) να εμφανίζει και πάλι μεταξύ των μεγίστων ένα ελάχιστο αν και όχι μηδενικό. Το τι ακριβώς βλέπουμε στην περίπτωση αυτή φαίνεται στο (Σχ. 2.2β). Μπορούμε δηλ. ν' αντιληφθούμε ότι στην περιοχή αυτή έχουν απεικονιστεί σαφώς δύο σημεία. Αυτή η 'οριακή' μορφή διακριτικότητας, ενέχει τη μορφή κριτηρίου κατά τη διαδικασία της απεικόνισης. Ονομάζεται ***κριτήριο Rayleigh (Rayleigh criterion)***. Αν και δεν είναι το μόνο που προτάθηκε, επεκράτησε των άλλων σαν κανόνας που αφορά τη διακριτική ικανότητα των φακών και των πιο σύνθετων οπτικών συστημάτων όπως είναι τα διαφορά οπτικά όργανα.

Αν τέλος –όπως μπορούμε να δούμε στο (Σχ. 2.2γ) – τα δύο σημεία στο επίπεδο του αντικειμένου πλησιάσουν ακόμη περισσότερο μεταξύ τους έτσι ώστε $y < y_R$, οι κατανομές έντασής τους στο επίπεδο απεικόνισης προστιθέμενες, θα οδηγήσουν σε μια συνολική κατανομή με ένα μόνο διακριτό μέγιστο. Στην προκειμένη περίπτωση είναι αδύνατον ν' αντιληφθούμε ότι η κατανομή αυτή προέρχεται από δύο διακριτά σημεία στο επίπεδο του αντικειμένου. Δηλ. η λεπτομέρεια αυτή δεν μπορεί να καταγραφεί στο επίπεδο του ειδώλου. Βλέπουμε τελικά ότι η περίθλαση του φωτός από τα όρια του φακού, θέτει εντελώς συγκεκριμένα όρια όσον αφορά τη δυνατότητα διάκρισης των λεπτομερειών ενός αντικειμένου μέσω της διαδικασίας της απεικόνισης. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για όλα τα οπτικά όργανα όπως το τηλεσκόπιο, το μικροσκόπιο μη εξαιρουμένου και του ανθρώπινου ματιού.

Θεωρώντας στα επόμενα σαν κριτήριο για τη διακριτική ικανότητα ενός φακού αυτό του Rayleigh, με τη βοήθεια της γεωμετρικής οπτικής και της θεωρίας της περίθλασης του φωτός θ' αποδείξουμε ορισμένες χρήσιμες σχέσεις. Από το (Σχ. 2.3) στο επίπεδο του αντικειμένου βλέπουμε δύο σημεία M, Q τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά y_R. Τα τελευταία μέσω του θετικού φακού ακτίνας R απεικονίζονται στα σημεία M', Q' του επιπέδου του ειδώλου. Η απόσταση μεταξύ των

M',Q' είναι y'_R. Στη γενικότερη περίπτωση στο χώρο του αντικειμένου ο δ.δ. του μέσου είναι n ενώ στο χώρο του ειδώλου n'. Υποθέτουμε ότι τα σημεία M',Q' είναι μόλις διακριτά, υπακούοντας στο κριτήριο του Rayleigh. Δηλ. το πρώτο ελάχισ-



(Σχ. 2.3)

το της κατάνομής της έντασης του φωτός με κέντρο το Q', θα συμπίπτει με το μέγιστο της κατανομής με κέντρο το M'. Άρα η απόσταση $M'Q' = y'_R$ μεταξύ των κέντρων των κατανομών, είναι συγχρόνως και η ακτίνα του δίσκου του Airy της μιας από αυτές. Με βάση τα πορίσματα της θεωρίας της περίθλασης (σχ. 2.2), η γωνία a'_R με την οποία υποτείνεται η ακτίνα αυτή από το κέντρο του φακού, δίνεται από τη σχέση:

$$\sin a'_R \simeq \tan a'_R \simeq a'_R = \frac{1.22\lambda'}{2R} = \frac{0.61\lambda'}{R} \tag{2.3}$$

όπου λ' το μ.κ. του φωτός στο μέσο με δ.δ. n'. Και επειδή $n' = \lambda_0/\lambda'$ θα έχουμε:

$$\sin a'_R \simeq \tan a'_R \simeq a'_R = \frac{0.61\lambda_0}{n'R} \tag{2.4}$$

όπου λ_0 το μ.κ. του φωτός στο κενό. Κατόπιν θεωρούμε την όδευση (διάθλαση) της ακτίνας QOQ' από το κέντρο του φακού O. Και επειδή στην περιοχή του κέντρου του φακού οι επιφάνειές του είναι σχεδόν παράλληλες, θα ισχύει ο νόμος του Snell, οπότε:

$$n \sin a_R = n' \sin a'_R \tag{2.5}$$

Τότε από τις (σχ. 2.4,5) θα έχουμε:

$$\sin a_R \simeq \tan a_R \simeq a_R = \frac{0.61\lambda_0}{nR} \tag{2.6}$$

Μας ενδιαφέρει επίσης σε περίπτωση ισχύος του κριτηρίου του Rayleigh, να υπολογίσουμε τις γραμμικές αποστάσεις y_R, y'_R. Η y'_R αντιστοιχεί στην απόσταση μεταξύ δύο μόλις διακριτών κατανομών έντασης στο επίπεδο του ειδώλου η οποία σχετίζεται άμεσα με την απόσταση y_R μεταξύ δύο μόλις διακριτών σημείων στο επίπεδο του αντικειμένου. Και με τη βοήθεια του (Σχ. 2.3) θα έχουμε:

$$y'_R = s' \tan a'_R \tag{2.7}$$

όπου s' η απόσταση φακού ειδώλου. Επίσης για τις περισσότερες των περιπτώσεων με πρακτικό ενδιαφέρον, η γωνία u' με την οποία φαίνεται η ακτίνα του φακού από το σημείο M' πάνω στον οπτικό άξονα, είναι πολύ μικρή (στο (Σχ. 2.3) για εποπτικούς λόγους τα σημεία M, Q και M', Q' απέχουν πολύ μεταξύ τους σε σχέση με την πραγματικότητα). Οπότε θα έχουμε:

$$\sin u' \simeq \tan u' = R/s' \tag{2.8}$$

Τότε από τις (σχ. 2.4,7,8) βρίσκουμε:

$$y'_R = \frac{0.61\lambda_0}{n' \sin u'} \tag{2.9}$$

Και για τον υπολογισμό της y_R θα χρησιμοποιήσουμε την ημιτονική συνθήκη του Abbe (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (Άσκ. 10: Λυμένη)). Η τελευταία εκφράζεται ως εξής:

$$m = \frac{y'_R}{y_R} = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} \tag{2.10}$$

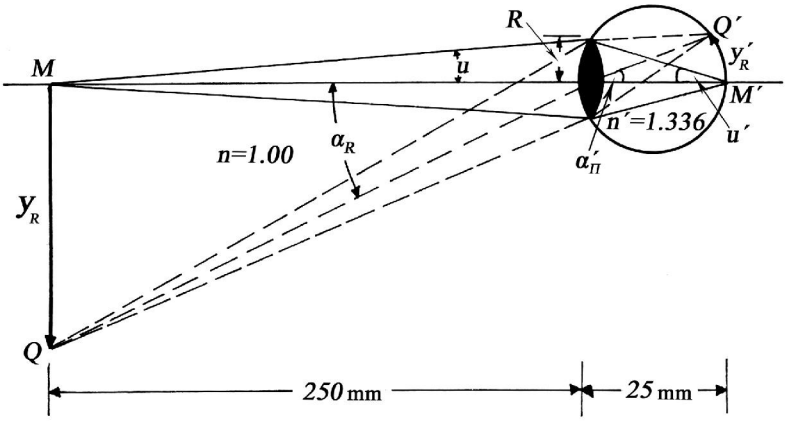
όπου m η μεγέθυνση του φακού και u η γωνία με την οποία φαίνεται η ακτίνα του από το σημείο M. Ο συνδυασμός των (σχ. 2.9,10) μας δίνει τελικά:

$$y_R = \frac{0.61\lambda_0}{n \sin u} \tag{2.11}$$

Από τη (σχ. 2.11) διαπιστώνουμε τελικά ότι: Η ελάχιστη απόσταση στην οποία πρέπει να βρίσκονται δύο σημεία στο επίπεδο του αντικειμένου προκειμένου να είναι μόλις διακριτά μεταξύ τους μέσω του φακού στο επίπεδο απεικόνισης, είναι αντιστρόφως ανάλογη του γινομένου $n \sin u$. Το γινόμενο αυτό ονομάζεται ***αριθμητικό άνοιγμα (N.A.) (numerical aperture)***. Βλέπουμε δηλ. ότι: Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του αριθμητικού ανοίγματος, τόσο μικρότερη θα είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων στο επίπεδο του αντικειμένου τα οποία με βάση το κριτήριο του Rayleigh μπορούν να διακριθούν στο επίπεδο του ειδώλου.

*Διακριτική ικανότητα του ανθρώπινου ματιού**

Προκειμένου να μελετήσουμε την περίπτωση αυτή, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την απλοποιημένη μορφή του ανθρώπινου ματιού. Εκεί η διάθλαση των ακτινών πραγματοποιείται μόνον στον κρυσταλλώδη φακό του και το υαλώδες σώμα (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (Σχ. 3.7.1.2)) παραλείποντας τον κερατοειδή χιτώνα και την περιοχή με το υδατώδες υγρό σαν δίοπτρα με μικρότερη ισχύ. Με βάση αυτή την υπόθεση, αριστερά του κρυσταλλώδους φακού (Σχ. 2.4) υπάρχει



(Σχ. 2.4)

αέρας με δ.δ. $n = 1.00$ και δεξιά του το υαλώδες σώμα με δ.δ. $n' = 1.336$. Η διάμετρος του βολβού του ματιού λαμβάνεται περίπου ίση με 25mm και η διάμετρος της κόρης $2R = 2\text{mm}$. Είναι γνωστό βέβαια και από την άμεση εμπειρία μας, ότι η διάμετρος της κόρης του ματιού αυξομειώνεται (από $0 \to 8\text{mm}$) ανάλογα με τις φωτιστικές συνθήκες. Για τον υπολογισμό της διακριτικής ικανότητας του ανθρώπινου ματιού συνήθως υιοθετείται η διάμετρος των 2mm, επειδή για μεγαλύτερη από αυτή εμφανίζονται σφάλματα.

* F.W. Sears 'Optics'. Addison - Wesley, Reading Mass. (1949).

Υποθέτουμε ότι στη θέση της ελάχιστης απόστασης ευκρινούς όρασης (250mm από τον κρυσταλλώδη φακό) βρίσκονται δύο σημεία M, Q (π.χ. σημειακές πηγές φωτός), τα οποία είναι μόλις διακριτά με βάση το κριτήριο του Rayleigh. Το τελευταίο σημαίνει ότι η απόσταση $y'_R = M'Q'$ των ειδώλων στον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού, θα είναι ίση με την ακτίνα του δίσκου του Airy των δύο κατανομών έντασης, λόγω της περίθλασης του φωτός από τα όρια της κόρης του ματιού ακτίνας $R = 1\text{mm}$. Με τη βοήθεια της (σχ. 2.11) θα έχουμε:

$$y_R = \frac{0.61\lambda_0}{n\sin u} = \frac{0.61\lambda_0 \times 250}{nR} = 0.0839\text{mm} \simeq \frac{1}{10}\text{mm} \tag{2.12}$$

όπου $\lambda_0 = 0.55\times10^{-3}\text{mm}$ το μ.κ. του φωτός που αντιστοιχεί στη μέγιστη ευαισθησία του ματιού, για φωτοπτικές συνθήκες όρασης. Από το τελευταίο αποτέλεσμα βλέπουμε ότι ένα κανονικό αβοήθητο (γυμνό) μάτι χωρίς σφάλματα, μπορεί να διακρίνει στην ελάχιστη απόσταση ευκρινούς όρασης δύο σημεία, που απέχουν μεταξύ τους περίπου 0.1mm.

Από τη (σχ. 2.9) μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση y'_R μεταξύ των κέντρων των κατανομών που αντιστοιχούν στα είδωλα M', Q' των μόλις διακριτών σημείων στο επίπεδο του ειδώλου (στον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού):

$$y'_R = \frac{0.61\lambda_0}{n'\sin u'} = \frac{0.61\times0.55\times10^{-3}}{1.366\times(1/25)} = 0.006278\text{mm} \simeq \frac{1}{100}\text{mm} \tag{2.13}$$

Την ίδια περίπου απόσταση $(1/100)\text{mm}$ απέχουν μεταξύ τους τα κωνία στην περιοχή της ωχράς κηλίδας (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.7.1)). Αυτό σημαίνει ότι η δομή της φωτοευαίσθητης περιοχής του ματιού, επιτρέπει τη διάκριση των δύο κατανομών στα σημεία M', Q' που αντιστοιχούν στα μόλις διακριτά σημεία M, Q στο επίπεδο του αντικειμένου στη θέση της ελάχιστης απόστασης ευκρινούς όρασης. Αν τα κωνία ήταν πιο αραιά μεταξύ τους, τότε δεν θα μπορούσε να γίνει αντιληπτό αυτό το όριο. Αντίθετα αν τα κωνία ήταν πιο πυκνά, αυτό δεν θα επηρέαζε ευνοϊκότερα προκειμένου να βελτιωθεί η διακριτική ικανότητα του ματιού, που ούτως ή άλλως την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο κατανομών στον αμφιβληστροειδή, την καθορίζει η περίθλαση από την κόρη του ματιού.

Τέλος υπολογίζουμε με τη βοήθεια της (σχ. 2.6) τη γωνία με την οποία φαίνονται από το κέντρο του ματιού δύο μόλις διακριτά σημεία στο επίπεδο του αντικειμένου:

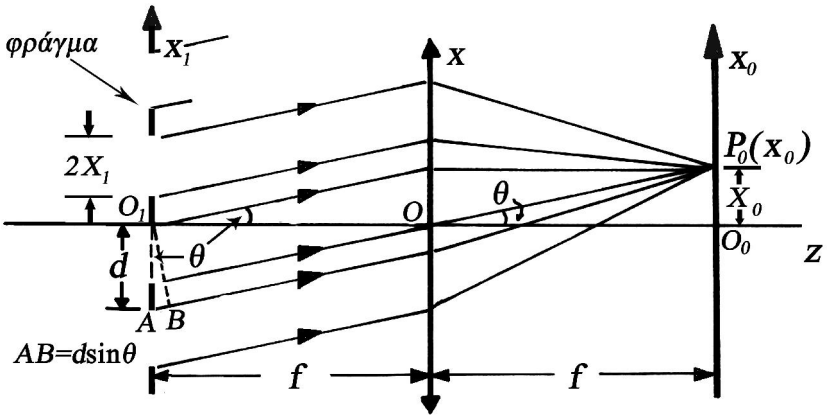
$$a_R \simeq \tan a_R = \frac{0.61\lambda_0}{nR} = \frac{0.61 \times 0.55 \times 10^{-3}}{1.00 \times 1} = 0.000355\text{rad} \simeq 1.15' \qquad (2.14)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το αβοήθητο μάτι μπορεί σε απόσταση περίπου 30m να διακρίνει δύο σημειακές πηγές φωτός που απέχουν μεταξύ τους κατά 1cm. Πράγματι: $a_R \simeq \tan a_R = (1/3000) \simeq 0.00033\text{rad}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Προσδιορισμός των ακραίων τιμών της συνάρτησης του παράγοντα συμβολής, του προτύπου περίθλασης από φράγμα πλάτους διερχομένου φωτός N σχισμών

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή της κανονικοποιημένης έντασης του φωτός I που προέρχεται από την περίθλαση φράγματος πλάτους N σχισμών διερχομένου φωτός (§ 7.6.1), δίνεται από τη (σχ. 7.6.1.3): $I = \frac{\sin^2 ku'X_1}{\left(ku'X_1\right)^2}\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}$. Η οποία όπως βλέπουμε συνίσταται από δύο παράγοντες: α) Τον παράγοντα της περίθλασης: $\frac{\sin^2 ku'X_1}{\left(ku'X_1\right)^2}$ με $ku'X_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{x_0}{f}X_1 = \frac{\pi\left(2X_1\right)\sin\theta}{\lambda}$. Όπου $2X_1$ το πλάτος των διαπερατών σχισμών του φράγματος, θ η γωνία με την οποία φαίνεται ένα σημείο του προτύπου με $\left(x_0/f\right) \simeq \tan\theta \simeq \theta$ (βλ. Σχ. 7.6.1.3)(Σχ. 3.1) και λ το μ.κ. του προσπίπτοντος επιπέδου μετ. κύματος στο φράγμα. β) Τον παράγοντα της συμβολής:



(Σχ. 3.1)

$\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}$ με $\delta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$. Όπου d η περίοδος του φράγματος και N ο αριθμός των περιόδων του φράγματος. Και κατά τα γνωστά, ο παράγοντα της περίθλασης, διαμορφώνει αυτόν της συμβολής.

Στα επόμενα, μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τις ακραίες τιμές της συνάρτησης: $U(\delta) = \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}$ δηλ. του παράγοντα της συμβολής. Για το λόγο αυτό κατ' αρχή παραγωγίζουμε την $U(\delta)$ ως προς δ:

$$U'(\delta)=\left(\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}\right)'=\frac{\left(\sin^2 N\delta\right)'\sin^2\delta-\sin^2 N\delta\left(\sin^2\delta\right)'}{\sin^4\delta}=$$
$$=\frac{2N\sin N\delta\sin\delta\cos N\delta-2\sin^2 N\delta\cos\delta}{\sin^3\delta}$$

Οπότε θα έχουμε ακραίες τιμές της $U(\delta)$ για τις τιμές του δ που επαληθεύουν την $U'(\delta)=0$. Δηλ.:

$N\sin N\delta\sin\delta\cos N\delta-\sin^2 N\delta\cos\delta=0$ ή

$\sin N\delta\left(N\sin\delta\cos N\delta-\sin N\delta\cos\delta\right)=0$. Οπότε θα πρέπει να είναι ή:

$$\sin N\delta=0 \tag{3.1}$$

ή $N\sin\delta\cos N\delta-\sin N\delta\cos\delta=0$ η οποία μετασχηματίζεται στην:

$$N\tan\delta=\tan N\delta \tag{3.2}$$

α) Περίπτωση sinNδ = 0

Για να διαπιστώσουμε τι είδους ακρότατα έχουμε για τις τιμές του δ που επαληθεύουν την $\sin N\delta=0$ οι οποίες είναι:

$$\sin N\delta=0=\sin n\pi \quad \text{όπου} \quad n=\pm1,\pm2,\cdots,\pm(N-1)$$

δηλ. για $\delta=\pi\frac{n}{N}$, πρέπει να εξετάσουμε αν η δεύτερη παράγωγος της $U(\delta)$ για τις τιμές αυτές είναι θετική ή αρνητική.

$$U''(\delta)=\left(\frac{2N\sin N\delta\sin\delta\cos N\delta}{\sin^3\delta}\right)'-\left(\frac{2\sin^2 N\delta\cos\delta}{\sin^3\delta}\right)'=$$
$$=\frac{2N^2\sin^2\delta\cos^2 N\delta-2N^2\sin^2 N\delta\sin^2\delta-4N\sin N\delta\cos N\delta\sin\delta\cos\delta}{\sin^4\delta}-$$
$$-\frac{4N^3\sin N\delta\cos N\delta\cos\delta\sin^3\delta+2N^2\sin^2 N\delta\sin^4\delta+6N^2\sin^2 N\delta\cos^2\delta\sin^2\delta}{N^2\sin^6\delta}$$

Η οποία για $\delta=\pi\frac{n}{N}$ γίνεται: $U''\left(\pi\frac{n}{N}\right)=\frac{2}{\sin^2\frac{\pi n}{N}}$. Οπότε διαπιστώνουμε ότι για $n=\pm1,\pm2,\cdots,\pm(N-1)$ η $U''(\delta)$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Άρα για τις θέσεις

με $\delta = \pi \frac{n}{N}$ όπου $n = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1)$ θα έχουμε ελάχιστα. Τα ελάχιστα αυτά μεταξύ δύο διαδοχικών κυρίων μεγίστων τάξης m και $m+1$ θα είναι $N-1$ τον αριθμό. Από τη σχέση επίσης:

$$\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} = \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 = \left(\frac{\sin N\frac{n\pi}{N}}{\sin \frac{n\pi}{N}}\right)^2 = \left(\frac{\sin n\pi}{\sin \frac{\pi n}{N}}\right)^2 = \frac{0}{\sin \frac{\pi n}{N}} = 0 \quad \left[n = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1)\right]$$

βλέπουμε ότι τα ελάχιστα αυτά είναι μηδενικά.

Για $n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$ δηλ. για $\delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ (επειδή $\delta = \pi \frac{n}{N}$) θα έχουμε τα κύρια μέγιστα του προτύπου συμβολής (τάξεις συμβολής $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$). Πράγματι για $\delta \to 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ με τη βοήθεια του κανόνα του L' Hospital θα έχουμε:

$$\frac{\sin^2 N\delta}{\underset{\delta\to 0}{\sin^2 \delta}} = \frac{0}{0} = \frac{\left(\sin^2 N\delta\right)'}{\left(\sin^2 \delta\right)'} = N\frac{\sin N\delta \cos N\delta}{\underset{\delta\to 0}{\sin \delta \cos \delta}} = \frac{0}{0} = N\frac{\left(\sin N\delta \cos N\delta\right)'}{\left(\sin \delta \cos \delta\right)'} =$$

$$= N^2 \frac{\cos^2 N\delta - \sin^2 N\delta}{\cos^2 \delta - \sin^2 \delta} = N^2 \frac{\cos 2N\delta}{\underset{\delta\to 0}{\cos 2\delta}} = N^2, \quad \text{δηλ. μέγιστο.}$$

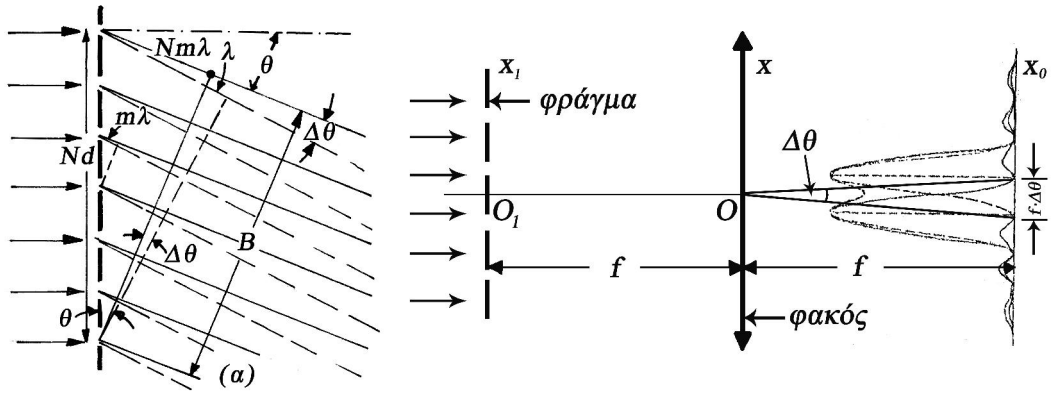
Υπολογισμός του γωνιακού ανοίγματος $\Delta\theta$ μεταξύ ενός κυρίου μεγίστου τάξης m και του πρώτου ελαχίστου προς αυτό

Έχουμε αποδείξει προηγουμένως ότι αν: $\delta = m\pi$ $\left(\text{ή } 2\delta = 2m\pi\right)$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ παίρνουμε τα κύρια μέγιστα συμβολής, όπου επειδή: $\delta = \pi d \sin\theta / \lambda$ θα είναι:

$$2\delta = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) d \sin\theta = kd \sin\theta$$

Αλλά – όπως μπορούμε να δούμε από το (Σχ. 3.1) – το γινόμενο $AB = d\sin\theta$ αντιστοιχεί στη διαφορά οπτικού δρόμου (δ.δ.) από διπλανές σχισμές του φράγματος που απέχουν μεταξύ τους κατά d, όση δηλ. η περίοδος του φράγματος. Οπότε το γινόμενο $2\delta = kd\sin\theta$ θα είναι η αντίστοιχη διαφορά φάσης (δ.φ.) μεταξύ τους. Έστω τώρα ότι η γωνία θ αντιστοιχεί στο κύριο μέγιστο m τάξης. Και επειδή όπως προαναφέραμε η (δ.φ.) των διαταραχών μεταξύ δύο διπλανών σχισμών είναι $2\delta = 2m\pi$ θα συνεπάγεται ότι η (δ.δ.) μεταξύ τους θα είναι ίση με $m\lambda$. Αν τώρα το

φράγμα διαθέτει N σχισμές (ή ακριβέστερα $N+1$), τότε όπως φαίνεται από το (Σχ. 3.2α) η (δ.δ.) μεταξύ των συνεισφορών των ακραίων σχισμών θα είναι $Nm\lambda$.



(Σχ. 3.2)

Έστω τώρα ότι μεταβάλλουμε τη γωνία περίθλασης κατά $\Delta\theta$ (από το μέγιστο τάξης m που βρίσκεται στη γωνία θ), με διεύθυνση το πρώτο ελάχιστο έντασης που συναντούμε. Θέλουμε να δούμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της επαλληλίας των συνεισφορών στη θέση αυτή από τις N σχισμές. Έχουμε όμως αποδείξει ότι για τη θέση αυτή θα ισχύει η σχέση:

$$\delta = m\pi \pm \frac{\pi}{N} \quad ή \quad 2\delta = 2m\pi \pm \frac{2\pi}{N}$$

όπου 2δ η (δ.φ.) μεταξύ δύο διαδοχικών συνεισφορών. Αυτό σημαίνει ότι η επιπλέον (δ.δ.) μεταξύ δύο διαδοχικών συνεισφορών θα είναι λ/N και η συνολική μεταξύ των δύο ακραίων σχισμών του φράγματος $N(\lambda/N)=\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι αν αυξηθεί η συνολική (δ.δ.) από $Nm\lambda$ σε $Nm\lambda+\lambda$, τότε η επαλληλία των συνεισφορών από τις N σχισμές του φράγματος στη νέα θέση $(\theta+\Delta\theta)$ θα ίση με μηδέν. Πράγματι αν θεωρήσουμε τη συμβολή μεταξύ των συνεισφορών της τελευταίας πάνω σχισμής του φράγματος (N) με αυτήν της μεσαίας $(N/2)$ τότε η (δ.δ) μεταξύ τους θα είναι:

$$\left(Nm\lambda + N\frac{\lambda}{N}\right) - \left(Nm\lambda + \frac{N}{2}N\right) = \frac{\lambda}{2}$$

Δηλ. θα συμβάλλουν με αντίθεση φάσης και το συνολικό τους πλάτος θα είναι μηδέν. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με όλα τα υπόλοιπα ζεύγη συνεισφορών από τις

σχισμές: $\left(N-1,\frac{N}{2}-1\right),\left(N-2,\frac{N}{2}-2\right)$ κ.ο.κ. Άρα το συνολικό πλάτος της διαταραχής (το πεδίο) στη θέση με κατεύθυνση $(\theta+\Delta\theta)$ θα έχει τιμή μηδέν (θέση του πρώτου ελάχιστου, από το m τάξης μέγιστο συμβολής). Και ο υπολογισμός της γωνίας $\Delta\theta$ γίνεται με τη βοήθεια του (Σχ. 3.2α) ως εξής. Θα έχουμε: $\lambda = B\Delta\theta$ και $\cos\theta = B/Nd$. Οπότε τελικά:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν ο αριθμός των γραμμών του φράγματος γίνει πολύ μεγάλος $(N \gg)$, τότε το γωνιακό άνοιγμα $2\Delta\theta$ με το οποίο φαίνεται το κύριο μέγιστο συμβολής γίνεται πολύ μικρό $(2\Delta\theta \ll)$. Που σημαίνει ότι οι κατανομές της έντασης των κυρίων μεγίστων οξύνονται ισχυρά.

Για το λόγο αυτό είναι επόμενο η σχέση που μας δίνει την $\Delta\theta$ να χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της διακριτικότητας μεταξύ δύο κατανομών φωτός (π.χ. φασματικών γραμμών), που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και διαφέρουν κατά $\Delta\lambda$ (Σχ. 3.2β). Πράγματι με βάση το κριτήριο του Rayleigh οι δύο κατανομές θα είναι μόλις διαχωρίσιμες, όταν το μέγιστο της μιας συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο της άλλης. Τότε οι δύο αυτές θέσεις θα φαίνονται με γωνία $\Delta\theta$ την οποία υπολογίσαμε προηγουμένως. Στο (Σχ. 3.2β) βλέπουμε τις δύο κατανομές των εντάσεων καθώς και το άθροισμά τους με εμφανές το κοίλωμα μεταξύ τους, που συνιστά την αιτία της διάκρισής τους.

β) Περίπτωση Ntanδ = tanNδ

Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των σχέσεων: $y = N\tan\delta$ και $y = \tan N\delta$, μπορούμε να προσδιορίσουμε γραφικά τα δ (και κατά προέκταση τις γωνίες θ) για τα οποία συναντούμε τις θέσεις των δευτερευόντων μεγίστων, που βρίσκονται μεταξύ των κυρίων μεγίστων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Τα ολοκληρώματα Fresnel

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Fresnel (σχ. 7.8.8.9):

$$C(q)=\int_0^q \cos\frac{\pi q^2}{2}dq \quad (4.1) \qquad S(q)=\int_0^q \sin\frac{\pi q^2}{2}dq \qquad (4.2)$$

για $-\infty \le q \le \infty$, γίνεται* μέσω της ανάπτυξής τους σε συγκλίνουσες σειρές. Και μάλιστα: α) Σε σειρές δυνάμεων του q και β) Σε σειρές αντιστρόφων δυνάμεων του q.

α) Αν στις σχέσεις που μας δίνουν τα $C(q), S(q)$ αναπτύξουμε σε σειρές τα συνημίτονα και τα ημίτονα και ολοκληρώσουμε τους επί μέρους όρους των σειρών, τότε βρίσκουμε:

$$C(q)=q\left[1-\frac{1}{2!5}\left(\frac{\pi}{2}q^2\right)^2+\frac{1}{4!9}\left(\frac{\pi}{2}q^2\right)^4-\cdots\right] \qquad (4.3)$$

$$S(q)=q\left[\frac{1}{1!3}\left(\frac{\pi}{2}q^2\right)-\frac{1}{3!7}\left(\frac{\pi}{2}q^2\right)^3+\frac{1}{5!11}\left(\frac{\pi}{2}q^2\right)^5-\cdots\right] \qquad (4.4)$$

Οι σειρές αυτές είναι συγκλίνουσες, για τον υπολογισμό των $C(q), S(q)$ αλλά μόνον όταν τα q είναι μικρά.

β) Όταν οι τιμές των q είναι μεγάλες, τότε αναπτύσσουμε τα $C(q), S(q)$ από τις (σχ. 4.1,2) σε σειρές αντιστρόφων δυνάμεων του q. Η διαδικασία είναι η εξής: Το ολοκλήρωμα της (σχ. 4.1) μπορεί να πάρει τη μορφή της διαφοράς δύο ολοκληρωμάτων. Πράγματι:

$$C(q)=\int_0^\infty \cos\frac{\pi q^2}{2}dq=\int_0^q \cos\frac{\pi q^2}{2}dq+\int_q^\infty \cos\frac{\pi q^2}{2}dq \qquad (4.5)$$

Αλλά: $\int_q^\infty \cos\frac{\pi q^2}{2}dq=\int_q^\infty \frac{1}{\pi q}d\left(\sin\frac{\pi q^2}{2}\right)$. Επίσης

---

* Ι.Ε. Σπυριδέλη: 'Θέματα Οπτικής' Τεύχος Β' (Έκδοση Α.Π.Θ.). Θεσσαλονίκη (1979).
A. K. Ghatak and K. Thyagarajan: 'Contemporary Optics' Plenum Press N.Y. (1978) (Ch. 4).

$\int_0^\infty \cos ax^2 dx = \int_0^\infty \sin ax^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$. Και για $a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \cos\frac{\pi x^2}{2} dx = C(x) = \frac{1}{2}$ όπως και $\int_0^\infty \sin\frac{\pi x^2}{2} dx = S(x) = \frac{1}{2}$. Δηλ. $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$. Επομένως η (σχ. 4.5) γίνεται:

$$C(q) = \frac{1}{2} - \int_q^\infty \frac{1}{\pi q} d\left(\sin\frac{\pi q^2}{2}\right) \tag{4.6}$$

Κατόπιν τη (σχ. 4.6) την ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες $\left\{\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du\right\}$ οπότε βρίσκουμε:

$$C(q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi q}\sin\left(\frac{\pi q^2}{2}\right) + \int_q^\infty \frac{1}{\pi^2 q^3} d\left(\cos\frac{\pi q^2}{2}\right) \tag{4.7}$$

Σε επόμενο στάδιο, συνεχίζουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση για τη (σχ. 4.7) κ.ο.κ. και τελικά βρίσκουμε:

$$C(q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi q}\left[P(q)\cos\left(\frac{\pi q^2}{2}\right) - Q(q)\sin\left(\frac{\pi q^2}{2}\right)\right] \tag{4.8}$$

όπου:
$$P(q) = \frac{1}{\pi q^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{\left(\pi q^2\right)^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{\left(\pi q^2\right)^5} - \cdots \tag{4.9}$$

και
$$Q(q) = 1 - \frac{1\cdot 3}{\left(\pi q^2\right)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{\left(\pi q^2\right)^4} - \cdots \tag{4.10}$$

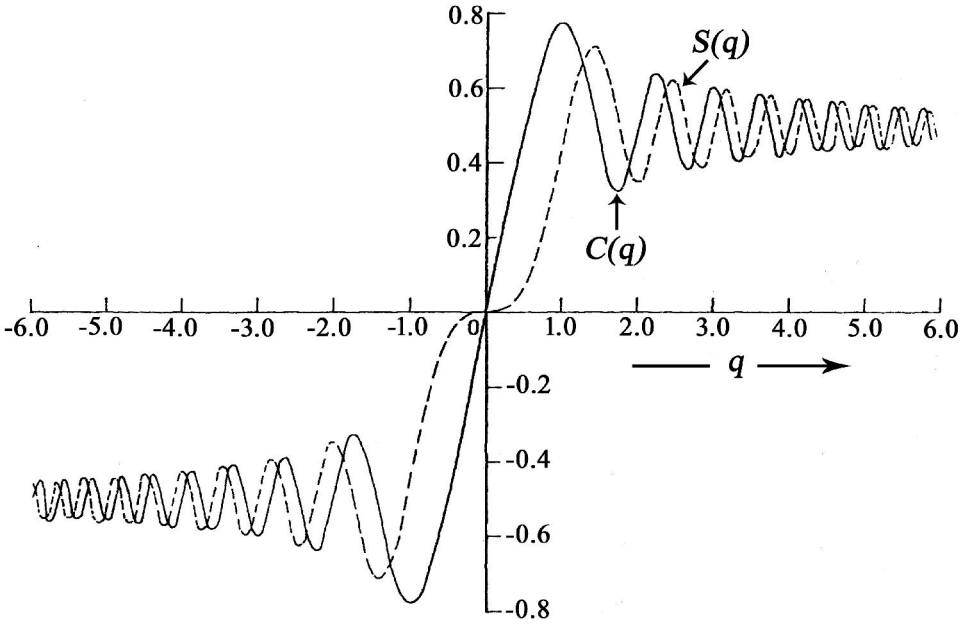
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για το ολοκλήρωμα $S(q)$ βρίσκουμε:

$$S(q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi q}\left[P(q)\sin\left(\frac{\pi q^2}{2}\right) - Q(q)\cos\left(\frac{\pi q^2}{2}\right)\right] \tag{4.11}$$

όπου οι $P(q), Q(q)$ δίνονται από τις (σχ. 4.9,10) αντίστοιχα.

Οι σειρές αντιστρόφων δυνάμεων του q που εκφράζονται από τις (σχ. 4.8,11) είναι συγκλίνουσες. Χρησιμοποιούνται για τον αριθμητικό υπολογισμό των

ολοκληρωμάτων $C(q), S(q)$ με πολύ καλή προσέγγιση ακόμη και αν λάβουμε υπόψη μας μικρό αριθμό όρων. Οι τιμές που συμπεριλαμβάνονται στον (Πίν. 7.8.8.2)



(Σχ. 4.1)

υπολογιστήκαν με αυτόν τον τρόπο στο διάστημα $0 \le q \le 6.95$. Στο (Σχ. 4.1) βλέπουμε τη γραφική παράσταση των $C(q), S(q)$ συναρτήσει του q. Είναι φανερό ότι για $q \to \pm\infty$ τα ολοκληρώματα $C(q), S(q) \to \pm 1/2$ αντίστοιχα. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι για τιμές του $q < -6.95$ και $q > 6.95$, ήδη τα ολοκληρώματα $C(q), S(q)$ έχουν προσεγγίσει στην τιμή του $\pm 1/2$.

ΘΕΜΑ 1

Η βαθμωτή θεωρία της περίθλασης του φωτός (Προσέγγιση Kirchhoff) *

Μια από τις πρώτες αυστηρές μαθηματικές θεμελιώσεις της αρχής των Huygens-Fresnel είναι αυτή του G.R. Kirchhoff. Πρόκειται για την επίλυση του προβλήματος του υπολογισμού περιθλώμενων πεδίων με βάση τα πορίσματα της Η/Μ θεωρίας του Maxwell για το φως. Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, η κυματική βάση αυτής της θεωρίας όχι μόνο κατέληξε σε εξαιρετικά ακριβή αποτελέσματα υπολογισμών, τους οποίους χρησιμοποιούμε κατά κόρο και σήμερα, αλλά δικαιολόγησε πλήρως και τις υποθέσεις τις οποίες είχε κάνει ο Fresnel (για τα πλάτη και τις φάσεις των κυματιδίων (wavelets)), προκειμένου ν' αναπτύξει τους δικούς του υπολογισμούς.

Ο Kirchhoff βάσισε τη θεωρία του στο λεγόμενο δεύτερο τύπο του Green. Πρόκειται για μια σχέση μεταξύ δύο βαθμωτών συναρτήσεων του χώρου Ψ, G που ορίζονται σ' ένα όγκο V και στην επιφάνεια S που αυτός οριοθετεί. Ο τύπος προκύπτει από το θεώρημα των Ostrogadsky-Gauss:

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{A}dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{1.1}$$

όπου το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}$ επιλέγεται να έχει τη μορφή:

$$\mathbf{A} = \Psi \mathrm{grad} G - G \mathrm{grad}\Psi \tag{1.2}$$

Τότε αποδεικνύεται (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 § 1.2) ότι ισχύει η σχέση:

$$\iiint_V \left(\Psi\nabla^2 G - G\nabla^2\Psi\right)dV = \oiint_s \left(\Psi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)dS \tag{1.3}$$

Οι συναρτήσεις $\Psi(P), G(P)$ θα πρέπει να είναι συνεχείς καθώς και οι πρώτες και δεύτερες παράγωγές τους στον όγκο V και στην επιφάνεια S.

Το θεώρημα των Helmholtz-Kirchhoff

---

* A.N. Matveev: 'Optics' Mir Pub. Moscow (1988).
J. W. Goodman: 'Introduction to Fourier Optics' McGraw-Hill Book Co. N.Y. (1968).

Το πρώτο βήμα προς την επίλυση του προβλήματος της περίθλασης, ήταν η επιλογή της συνάρτησης $\Psi(r)$ από την περιγραφή ενός μονοχρωματικού διαδιδόμενου στο χώρο μετ. κύματος $\Psi'(r,t)$ όπου:

$$\Psi'(r,t) = \Psi(r)e^{-i\omega t} \tag{1.4}$$

με
$$\Psi(r) = A(r)e^{-i\phi(r)} \tag{1.5}$$

να είναι το μιγαδικό του πλάτος. Όπου: $A(r)$ το πλάτος και $\phi(r)$ η φάση του. Η $\Psi'(r,t)$ συνιστά λύση της διαφορικής εξίσωσης κύματος:

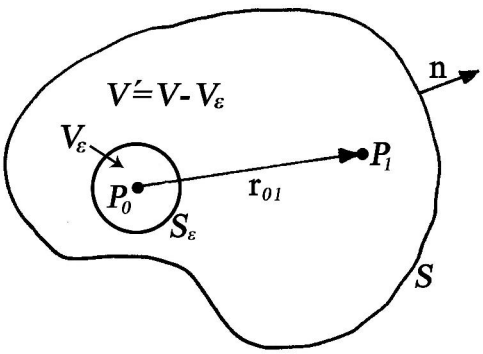
$$\nabla^2\Psi'(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi'(r,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.6}$$

Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα με βάση την εξίσωση του Helmholtz (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 § 1.3), το μιγαδικό πλάτος $\Psi(r)$ να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση:

$$\nabla^2\Psi(r) + k^2\Psi(r) = 0 \tag{1.7}$$

με $k = 2\pi/\lambda$ τον κυματάριθμο και λ το μ.κ. της διαταραχής.

Στο (Σχ. 1.1) μπορούμε να δούμε τον όγκο V που περικλείεται από την επιφάνεια S, για τα οποία η $\Psi(r)$ (σχ. 1.5) είναι συνεχής. Όπου η τελευταία συνιστά



(Σχ. 1.1)

τη χωρική εξάρτηση μιας Η/Μ διαταραχής. Το P_0 αντιπροσωπεύει ένα σημείο αναφοράς στο εσωτερικό του όγκου V. Και το σημείο P_1, οποιοδήποτε άλλο σημείο

στον ίδιο όγκο, που καθορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}_{01}$. Όσον αφορά δε τη συνάρτηση G αυτή επιλέγεται να είναι η:

$$G(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \tag{1.8}$$

η οποία ικανοποιεί τη εξίσωση της (σχ. 1.7) του Helmholtz, εκτός βέβαια του σημείου P_0, με την παραγώγιση να γίνεται για τις συντεταγμένες του σημείου P_1. Όπως βλέπουμε από τη (σχ. 1.8) για $P_1 \to P_0$ η συνάρτηση $G(P_1)$ τείνει στο άπειρο και η παράγωγός της υπόκειται σε ασυνέχεια. Με συνέπεια να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Green (σχ. 1.3) σε ολόκληρο τον όγκο V. Για το λόγο αυτό περικλείουμε το σημείο P_0 με μια μικρή σφαιρική επιφάνεια S_ε όγκου V_ε και ακτίνας ε. Που σημαίνει τώρα ότι η συνάρτηση $G(P_1)$ που ορίζεται από τον όγκο $V' = V - V_\varepsilon$ ικανοποιεί τη (σχ. 1.3). Άρα επειδή $\nabla^2\Psi = -k^2\Psi$ και $\nabla^2 G = -k^2 G$, με την αντικατάστασή τους στο πρώτο μέλος της (σχ. 1.3) για $V' = V - V_\varepsilon$ θα είναι:

$$\iiint_{V-V_\varepsilon} \left(\Psi\nabla^2 G - G\nabla^2\Psi\right)dV = \iiint_{V-V_\varepsilon} \left(-k^2\Psi G + k^2\Psi G\right)dV = 0 \tag{1.9}$$

Οπότε και πάλι από τη (σχ. 1.3) βρίσκουμε:

$$\oiint_{S+S_\varepsilon} \left(\Psi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)dS = 0 \tag{1.10}$$

με την κάθετη $\mathbf{n}$ στην επιφάνεια της S_ε σφαίρας να κατευθύνεται προς το εσωτερικό του όγκου V_ε. Τότε από τη (σχ. 1.10) θα έχουμε:

$$-\oiint_{S_\varepsilon} \left(\Psi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)dS = \oiint_{S} \left(\Psi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)dS \tag{1.11}$$

Θέλουμε στα επόμενα να δούμε που συγκλίνει το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (σχ. 1.11) όταν $\varepsilon \to 0$. Για το λόγο αυτό κατ' αρχή θα πρέπει να δούμε πως εκφράζεται η συνάρτηση $\partial G/\partial n$. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 1 (§ 1.4/1)). Εκεί αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)G(P_1) \tag{1.12}$$

Με $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})$ το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{n}$ και $\mathbf{r}_{01}$. Όπου στην περίπτωση αυτή το άκρο του διανύσματος $\mathbf{r}_{01}$ (δηλ. το σημείο P_1) βρίσκεται στην επιφάνεια S. Με παρόμοιο τρόπο (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (§ 1.4/2)) όταν το P_1 βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια S_ε θα έχουμε:

$$G(P_1) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \quad \text{και} \quad \frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)G(P_1) \tag{1.13}$$

και δεδομένου ότι η συνάρτηση Ψ και οι παράγωγές της είναι συνεχείς όταν το $\varepsilon \to 0$, τότε ο υπολογισμός του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος επί της σφαίρας εμβαδού $\Delta S = 4\pi\varepsilon^2$ από το πρώτο μέλος της (σχ. 1.11) θα μας δώσει:

$$-\oiint_{S_\varepsilon \to 0}\left(\Psi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)dS \simeq -\Psi\frac{\partial G}{\partial n}\Delta S + G\frac{\partial \Psi}{\partial n}\Delta S =$$

$$= -\Psi\frac{\partial G}{\partial n}4\pi\varepsilon^2 + G\frac{\partial \Psi}{\partial n}4\pi\varepsilon^2 = -\Psi\left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right]4\pi\varepsilon^2 + \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial \Psi}{\partial n}4\pi\varepsilon^2 =$$

$$= -4\pi\Psi\underset{\varepsilon\to 0}{e^{ik\varepsilon}} + ik\Psi\underset{\varepsilon\to 0}{4\pi\varepsilon e^{ik\varepsilon}} + \underset{\varepsilon\to 0}{e^{ik\varepsilon}\frac{\partial \Psi}{\partial n}4\pi\varepsilon} = -4\pi\Psi = -4\pi\Psi(P_0) \ \left(\text{για } \varepsilon \to 0,\ P \to P_0\right).$$

Οπότε αντικαθιστώντας την τελευταία στη (σχ. 1.11) βρίσκουμε τελικά:

$$\Psi(P_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_S\left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right)\right]dS \tag{1.14}$$

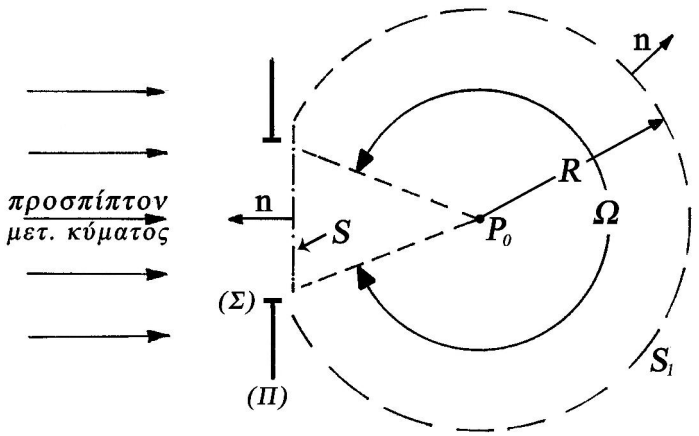
Όπου στο δεύτερο μέλος της (σχ. 1.11) αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση G με αυτή από τη (σχ. 1.8) (με το P_1 στην επιφάνεια S). Η (σχ. 1.14) ονομάζεται ολοκληρωτικό θεώρημα των Helmholtz - Kirchhoff.

Από μια πρώτη ανάγνωση μπορούμε να πούμε ότι η σχέση αυτή, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης Ψ. Που ας μην ξεχνάμε ότι από φυσική άποψη – όπως την έχουμε επιλέξει – αντιπροσωπεύει μια διαδιδόμενη στο χώρο που περικλείεται εδώ από τον όγκο V Η/Μ διαταραχή και πιο συγκεκριμένα τη χωρική εξάρτηση του ηλ. πεδίου. Η τιμή λοιπόν της Ψ στο σημείο P_0 δηλ. η $\Psi(P_0)$ υπολογίζεται όταν μας είναι γνωστές οι τιμές της καθώς και αυτών των κατά

διεύθυνση παραγώγων της σ' όλη την επιφάνεια S. Το γεγονός βέβαια αυτό είναι απατηλό από την άποψη ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο, δεδομένου ότι η (σχ. 1.14) συνιστά μια ολοκληρωτική εξίσωση. Θα μπορούσαμε όμως να πούμε ότι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο σε κάθε σημείο P_0, εκφραζόμενο με όρους 'οριακών τιμών' της κυματικής διαταραχής πάνω σε κάθε κλειστή επιφάνεια που περικλείει αυτό το σημείο. Τελικά μπορούμε να πούμε ότι το ολοκλήρωμα των Helmholtz - Kirchhoff δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά ανοίγει ένα μονοπάτι (δηλ. παίζει οργανικό ρόλο) για την περαιτέρω ανάπτυξη της βαθμωτής θεωρίας της περίθλασης του φωτός όπως θα δούμε αμέσως μετά. Και η επιλογή όμως της συνάρτησης $G = e^{ikr_{01}}/r_{01}$ έχει φυσική σημασία. Δεδομένου ότι συνιστά τη χωρική εξάρτηση ενός σφαιρικού μετ. κύματος (βλ. Κεφ.1: Κύματα (§ 8)) μοναδιαίου πλάτους, το οποίο εκπέμπεται (αποκλίνει) από το σημείο P_1.

Συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

Στα επόμενα θα προχωρήσουμε, με το να εξειδικεύσουμε το πρόβλημα της περίθλασης του φωτός στηριζόμενοι στο θεώρημα των Helmholtz - Kirchhoff. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε (Σχ. 1.2) ένα επίπεδο πέτασμα (Π) απείρων διαστάσεων,



(Σχ. 1.2)

το οποίο διαθέτει ένα άνοιγμα (Σ) τυχαίου σχήματος. Στο άνοιγμα προσπίπτει ένα τυχαίο μετ. κύματος φωτός και περιθλάται. Θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το εξής πρόβλημα: Το να υπολογίσουμε την ένταση του ηλ. πεδίου του περιθλώμενου φωτός σε οποιοδήποτε σημείο P_0 στο χώρο δεξιά του ανοίγματος. Το πεδίο θα είναι το $\Psi(P_0)$ και θα εκφράζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος των Helmholtz -

Kirchhoff από το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.14). Θα δίνεται σαν το άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων υπεράνω των επιφανειών S και S_1. Θα δούμε ότι όπως τίθεται το πρόβλημα, το ολοκλήρωμα υπεράνω της σφαιρικής επιφάνειας S_1 για $R \to \infty$ είναι μηδενικό. Που σημαίνει τελικά ότι το περιθλώμενο πεδίο θα υπολογίζεται μόνο από την προσφορά της επίπεδης επιφάνειας S η οποία είναι απείρων διαστάσεων και η οποία περιλαμβάνει το περιθλόν άνοιγμα.

Πράγματι το ολοκλήρωμα:

$$Q = \iint_{S_1} \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) \right] dS = \frac{e^{ikR}}{R} \iint_{S_1} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right] dS \qquad (1.15)$$

επειδή (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (§ 1.4/3)): $\frac{\partial}{\partial r_{01}} \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) = \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$ η οποία για $r_{01} \to R$ γίνεται: $\frac{\partial}{\partial r_{01}} \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R}$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι Ω είναι η στερεά γωνία με την οποία φαίνεται η επιφάνεια S_1 από το σημείο P_0 θα έχουμε: $\Omega = S/R^2$ οπότε: $dS = R^2 d\Omega$. Και αν την αντικαταστήσουμε στη (σχ. 1.15) θα έχουμε:

$$Q = e^{ikR} \iint_{S_1} R \left[\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \left(ik - \frac{1}{R} \right) \Psi \right] d\Omega \qquad (1.16)$$

Τότε θα είναι $Q = 0$ για $R \to \infty$, όταν η υπό ολοκλήρωση ποσότητα:

$$\lim_{R \to \infty} R \left[\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \left(ik - \frac{1}{R} \right) \Psi \right] = 0 \qquad (1.17)$$

Η απαίτηση αυτή είναι γνωστή σαν συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και ισχύει όταν η συνάρτηση Ψ μηδενίζεται τόσο γρήγορα όπως τα αποκλίνοντα σφαιρικά κύματα. Οι διαταραχές βέβαια που προσπίπτουν στο περιθλόν άνοιγμα συνήθως είναι σφαιρικά μετ. κύματος. Αλλά και ένα περίπλοκο μετ. κύματος συνίσταται από ένα γραμμικό συνδυασμό σφαιρικών μετώπων. Τότε μπορούμε να πεισθούμε ότι η συνθήκη ακτινοβολίας στην πράξη ικανοποιείται. Π.χ. αν $\Psi = e^{ikR}/R$ (σφαιρικό αποκλίνον μετ. κύματος) τότε (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (§ 1.4/3)) θα έχουμε: $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \Psi$, η οποία αν αντικατασταθεί στη (σχ. 1.17) την επιβεβαιώνει. Που σημαίνει τελικά ότι στο θεώρημα των Helmholtz - Kirchhoff η επιφάνεια ολοκλή-

ρωσης ανάγεται στο απείρων διαστάσεων επίπεδο πέτασμα, στο οποίο βρίσκεται το περιθλόν άνοιγμα.

Οι οριακές συνθήκες του Kirchhoff

Στα προηγούμενα θεωρήσαμε ότι το επίπεδο πέτασμα S είναι αδιαφανές εκτός του ανοίγματος που θα το συμβολίσουμε με S_0. Και είναι αυτονόητο να υποθέσει κανείς ότι η μεγαλύτερη συνεισφορά στον υπολογισμό της $\Psi(P_0)$ από το ολοκλήρωμα των Helmholtz - Kirchhoff:

$$\Psi(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) \right] dS \qquad (1.18)$$

(όπου S η επιφάνεια του επιπέδου), θα προέρχεται από τα σημεία που βρίσκονται στην επιφάνεια S_0 του ανοίγματος. Με βάση αυτό το σκεπτικό ο Kirchhoff έκανε τις εξής υποθέσεις:

1) Για την επιφάνεια S_0 η συνάρτηση Ψ καθώς και η παράγωγός της $\partial\Psi/\partial n$ έχουν τιμές ίδιες, σαν αυτές που θα είχαν με την απουσία του πετάσματος.
2) Για τα αδιαφανή τμήματα του πετάσματος θα ισχύει:
   $\Psi = 0$ και $(\partial\Psi/\partial n) = 0$.

Πρόκειται για τις λεγόμενες οριακές συνθήκες του Kirchhoff. Η πρώτη από αυτές αποκλείει την επίδραση των ορίων του πετάσματος σε μια προσπίπτουσα στο άνοιγμα διαταραχή. Και η δεύτερη αποκλείει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της (σχ. 1.18), συνεισφορές που θα μπορούσαν να προέρχονται από τα αδιαφανή τμήματα του επιπέδου πετάσματος. Κάτω από αυτέ στις συνθήκες η (σχ. 1,18) μπορεί να γραφεί:

$$\Psi(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_0} \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) \right] dS \qquad (1.19)$$

Με βάση όμως ορισμένες παρατηρήσεις τις οποίες αναφέραμε σε προηγούμενες παραγράφους, οι οριακές συνθήκες του Kirchhoff δεν θα μπορούσαν να ισχύουν ακριβώς όπως διατυπώνονται. Και αυτό όχι μόνο λόγω της υπάρχουσας σύζευξης μεταξύ των ηλεκτρικών και των μαγνητικών πεδίων, καθώς και της μη ύπαρξης απότομης γεωμετρικής σκιάς σε περιοχή λίγων μηκών κύματος περί τα όρια του ανοίγματος. Αλλά λόγω μαθηματικής ασυνέπειας μεταξύ της ταυτόχρονης ισχύος μεταξύ των σχέσεων $\Psi = 0$ και $(\partial\Psi/\partial n) = 0$ σε περιοχές εκτός του ανοίγμα-

τος. Το πρόβλημα της παράκαμψης αυτής της ασυνέπειας, επιλύθηκε σε επόμενες εργασίες άλλων ερευνητών, γεγονός με το οποίο δεν πρόκειται ν' ασχοληθούμε εδώ. Αλλά όπως ήδη αναφέραμε, για περιπτώσεις μεγάλων ανοιγμάτων σε σχέση με το μ.κ. της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας, οι οριακές συνθήκες του Kirchhoff ισχύουν. Οι τελευταίες, μας επιτρέπουν ακριβείς υπολογισμούς στην πράξη περιθλώμενων πεδίων με τη βοήθεια της (σχ. 1.19).

Ο τύπος περίθλασης Fresnel - Kirchhoff
και η αρχή των Huygens - Fresnel

Στο (ΠΑΡ/ΜΑ 1 (§ 1.4/1)) αποδείξαμε ότι για τη βαθμωτή συνάρτηση G ισχύει η σχέση: $\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)G$ από την οποία για $G = e^{ikr_{01}}/r_{01}$ θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \tag{1.20}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος για την οποία $\lambda = \overline{\lambda} = 550\text{nm}$, τότε μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{r_{01}} \ll k \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{1.21}$$

Οπότε η (σχ. 1.20) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})\, ik\, \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \tag{1.22}$$

Επομένως αν αντικαταστήσουμε τη (σχ. 1.22) στο ολοκλήρωμα της (σχ. 1.19) βρίσκουμε:

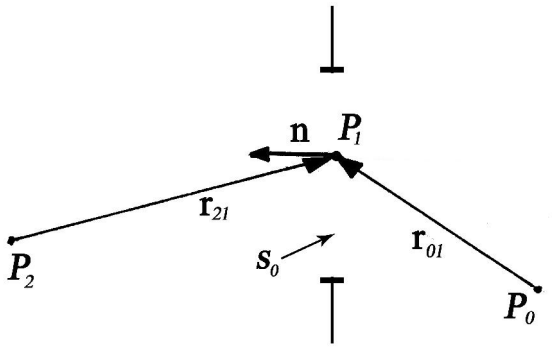
$$\Psi(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_0} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n} - ik\Psi\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})\right]dS \tag{1.23}$$

Θεωρούμε τώρα ότι στο πέτασμα που βρίσκεται το άνοιγμα S_0 (Σχ.1.3) από αριστερά του, προσπίπτει ένα σφαιρικό μετ. κύματος. Τότε η τιμή της συνάρτησης

Ψ στη θέση P_1 πάνω στο άνοιγμα, θα δίνεται από τη γνωστή σχέση (η χωρική της μορφή):

$$\Psi\left(P_1\right)=\frac{Ae^{ikr_{12}}}{r_{12}} \tag{1.24}$$

Επίσης με βάση τα δεδομένα του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 1 (§ 1.4/1β)) θα έχουμε:



(Σχ. 1.3)

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial n}=grad\, r_{12}\cdot\mathbf{n}=-\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{12}\right)=\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{21}\right) \tag{1.25}$$

Οπότε η τιμή της $\partial\Psi/\partial n$ στην οπτική της προσέγγιση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}=-Aik\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{12}\right)\frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}} \tag{1.26}$$

Και το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.23) παίρνει τη μορφή:

$\Psi\left(P_0\right)=-A\frac{ik}{4\pi}\iint_{S_0}\frac{e^{ik\left(r_{01}+r_{12}\right)}}{r_{01}r_{12}}\left[\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}\right)+\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{12}\right)\right]dS$ ή με διαφορετική μορφή:

$$\Psi\left(P_0\right)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{S_0}A\frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}}\left[\frac{\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}\right)+\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{r}_{12}\right)}{2}\right]\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}dS \tag{1.27}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται επί της επιφάνειας S_0, δεδομένου ότι η τιμή του σ' όλη την υπόλοιπη έκταση του πετάσματος είναι μηδενική. Το αποτέλεσμα αυτό προέκυψε για την περίπτωση που το περιθλόν άνοιγμα φωτίζεται από ένα σφαιρικό μετ. κύματος, που προερχόταν από μια σημειακή πηγή στη θέση P_2 (Σχ. 1.3). Ονομάζεται ***τύπος της περίθλασης Fresnel - Kirchhoff (Fresnel - Kirchhoff diffraction***

formula). Και με τη βοήθεια αυτού του τύπου, μπορούμε πλέον να υπολογίζουμε την ένταση των περιθλώμενων ηλ. πεδίων σ' ένα οποιοδήποτε σημείο P_0 μετά από ένα περιθλόν άνοιγμα.

Το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.27) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\Psi(P_0) = \iint_{S_0} \Psi'(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dS \tag{1.28}$$

όπου:
$$\Psi'(P_1) = \frac{1}{i\lambda}\left[\frac{Ae^{ikr_{12}}}{r_{12}}\right]\left[\frac{\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{21})}{2}\right] \tag{1.29}$$

Και η ανάγνωση της (σχ. 1.28) μας λέει το εξής: Ότι η τιμή του περιθλώμενου πεδίου στο σημείο P_0 προέρχεται από την επαλληλία (και κατά προέκταση από τη συμβολή) ενός απείρου τον αριθμό σφαιρικών κυμάτων (τα κυματίδια κατά τον Huygens), που εκκινούν από αντίστοιχες φανταστικές σημειακές πηγές, οι οποίες καταλαμβάνουν το άνοιγμα S_0. Το πλάτος $\Psi'(P_1)$ του κύματος που προέρχεται από τη σημειακή πηγή P_1 είναι προφανώς ανάλογο του προσπίπτοντος σφαιρικού κύματος $Ae^{ikr_{12}}/r_{12}$. Αλλά ως προς αυτό διαφέρει στα εξής: α) Κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα πλάτους $1/\lambda$. β) Επίσης κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα πλάτους: $\frac{\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{21})}{2} = \frac{\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}) + \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{12})}{2}$ που ονομάζεται ***παράγοντας κλίσης (obliquity factor)*** , ο οποίος ποτέ δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερος της μονάδας ούτε μικρότερος από το μηδέν. Δηλ. το πλάτος του κύματος που εκπέμπεται από τη στοιχειώδη πηγή στο P_1, επηρεάζεται από αυτόν τον κατευθυντικό παράγοντα. Και γ) Η φάση του κύματος που εκπέμπεται από την κάθε σημειακή πηγή προπορεύεται του προσπίπτοντος κύματος κατά $(\pi/2)\,\mathrm{rad}$ $\left[(1/i) = e^{i(-\pi/2)}\right]$.

Τα ούτως ή άλλως χωρίς φυσική υπόσταση σφαιρικά κυματίδια με τις προαναφερόμενες παράξενες ιδιότητες, τα αναδυόμενα από κάθε σημείο του περιθλώντος ανοίγματος, αν μη τι άλλο παρουσιάζουν μια ιδιαίτερη ιστορική σημασία. Και συγκεκριμένα μας μεταφέρουν στην εποχή που ο J.A. Fresnel (περί το 1818), ο οποίος πρότεινε τη σύζευξη μεταξύ της αρχής του Ch.Huygens (που αφορούσε τον τρόπο διάδοσης των μετ. κύματος, με τη βοήθεια των κυματιδίων), καθώς και της δυνατότητας αυτά να συμβάλλουν (κατά τις απόψεις του Th.Young) σε μια ορισμένη απόσταση ερχόμενα σε επαλληλία. Η διαδικασία αυτή – που μας είναι γνωστή σαν αρχή του Huygens - Fresnel – είχε σαν αποτέλεσμα ο δεύτερος, να επιτύχει τον υπολογισμό για πρώτη φορά με ακρίβεια πρότυπα περίθλασης από διάφορα πε-

ριθλώντα στοιχεία. Όμως όλα αυτά με την αυθαίρετη υπόθεση από μέρους του, ότι θα ίσχυαν οι τρείς ιδιότητες τις οποίες μόλις περιγράψαμε προηγουμένως και που αφορούν τα κυματίδια τ' αναδυόμενα από τα περιθλώντα ανοίγματα. Βλέπουμε δηλ. εδώ τελικά, ότι οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν αβίαστα σαν συνέπεια της εφαρμογής των πορισμάτων της Η/Μ θεωρίας του J.C. Maxwell, τις οποίες εφήρμοσε ο J.R. Kirchhoff προκειμένου ν' αναπτύξει τη βαθμωτή θεωρία της περίθλασης του φωτός, με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε επίσης ότι η διαδικασία της ανάδειξης της αρχής των Huygens-Fresnel έγινε με την προϋπόθεση ότι το προσπίπτον στο περιθλόν άνοιγμα μετ. κύματος ήταν σφαιρικό αποκλίνον. Αυτό που δίνεται από τη (σχ. 1.24). Γνωρίζουμε όμως ότι η κυματική διαφορική εξίσωση διέπεται από γραμμικότητα. Την ιδιότητα αυτή μπορούμε να επικαλεστούμε προκειμένου ο φωτισμός του περιθλώντος ανοίγματος να μπορεί να γίνεται και μέσω μιας εκτεταμένης πηγής. Πράγματι η τελευταία θα μπορούσε ν' αναλυθεί σ' ένα σύνολο σημειακών πηγών. Που σημαίνει ότι η αρχή των Huygens-Fresnel θα μπορούσε να εφαρμοστεί για κάθε μια ξεχωριστά.

Προσεγγίσεις στο ολοκλήρωμα περίθλασης των Fresnel - Kirchhoff

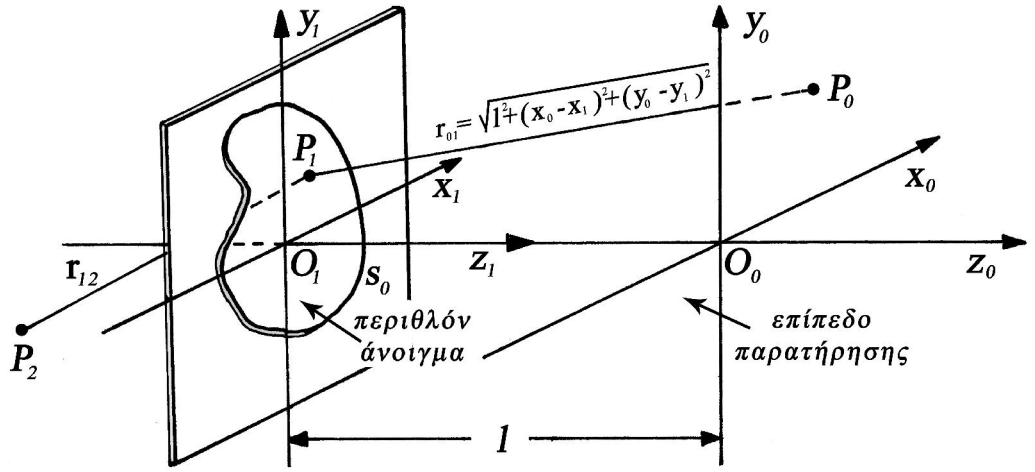
Στις πλείστες των περιπτώσεων η επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται το περιθλόν άνοιγμα είναι επίπεδη. Όπως επίπεδο είναι και το πέτασμα πάνω στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το πρότυπο περίθλασης, κατ' αρχή την κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου. Στις δύο αυτές επιφάνειες προσαρτούμε τα καρτεσιανά ορθογώνια σ.σ. x_1, y_1, z_1 και x_0, y_0, z_0 (Σχ. 1.4) με τους άξονες των x, y να είναι παράλληλοι και των z να ταυτίζονται. Θεωρούμε επίσης ότι η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων είναι l. Τότε η απόσταση μεταξύ των σημείων P_0, P_1 θα δίνεται από τη σχέση:

$$r_{01} = \sqrt{l^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \tag{1.30}$$

1. *Προσέγγιση στον παράγοντα κλίσης*

Για τις περιπτώσεις που τα πρότυπα περίθλασης εντοπίζονται σε μικρή περιοχή γύρω από το O_0 τότε ο παράγοντας κλίσης $\dfrac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{12})}{2}$ στο εσωτερικό του ολοκληρώματος της (σχ. 1.27) μεταβάλλεται συναρτησιακά πολύ αργά σε σχέση με τον παράγοντα ταλάντωσης $e^{ikr_{01}}$. Που σημαίνει ότι επηρεάζει ελάχιστα

τη συμβολή των κυματιδίων που έρχονται σε επαλληλία στο εκάστοτε σημείο P_0. Άρα από πρακτική άποψη προκαλεί μια πολύ μικρή διακύμανση της λαμπρότητας από σημείο σε σημείο στο επίπεδο x_0, y_0. Δηλ. τον παράγοντα αυτό μπορούμε



(Σχ. 1.4)

να τον αντικαταστήσουμε με μια μέση τιμή του. Επομένως από πρακτική άποψη οι γωνίες $\widehat{\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}}$ και $\widehat{\mathbf{n},\mathbf{r}_{12}}$ έχουν σχεδόν μηδενική τιμή. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{01}) = 1 \quad \text{και} \quad \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}_{12}) = 1 \tag{1.31}$$

με συνέπεια το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.27) να πάρει τη μορφή:

$$\Psi(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_0} \Psi(x_1, y_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx_1 dy_1 \tag{1.32}$$

όπου η συνάρτηση $\Psi(x_1, y_1)$ δίνεται από τη (σχ. 1.24): $\Psi(P_1) = \Psi(x_1, y_1) = \dfrac{Ae^{ikr_{12}}}{r_{12}}$ και θέσαμε: $dS = dx_1 dy_1$ με $r_{01} = \sqrt{l^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$ κατά τα γνωστά.

2. *Προσέγγιση Fresnel (ή προσέγγιση κοντινού πεδίου)*

Αυτού του είδους η προσέγγιση στο ολοκλήρωμα της (σχ. 1.32) μπορεί να γίνει με την προϋπόθεση ότι:

$$\frac{|x_0 - x_1|}{l} \ll 1 \quad \text{και} \quad \frac{|y_0 - y_1|}{l} \ll 1 \tag{1.33}$$

Τότε με τη βοήθεια της διωνυμικής ανάλυσης:

$$\sqrt{1+q} = 1 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{8}q^2 + \cdots \qquad |q| \ll 1 \tag{1.34}$$

λαμβάνοντας υπόψη μας τους δύο πρώτους όρους της, η (σχ. 1.30) για το r_{01} γίνεται:

$$r_{01} = l\sqrt{1 + (x_0 - x_1)^2 / l^2 + (y_0 - y_1)^2 / l^2} \simeq l + \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{2l} \tag{1.35}$$

Τότε το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.32) παίρνει τη μορφή:

$$\Psi(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda}\frac{e^{ikl}}{l}\iint_{S_0} \Psi(x_1, y_1) e^{\frac{ik\left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\right]}{2l}} dx_1 dy_1 \tag{1.36}$$

Στην προκειμένη βέβαια περίπτωση επειδή ο παρονομαστής του κλάσματος $e^{ikr_{01}}/r_{01}$ είναι μια βραδύτατα μεταβαλλόμενη συνάρτηση σε αντίθεση με τον ταχύτατα μεταβαλλόμενο αριθμητή, θέσαμε: $r_{01} \simeq l$. Η αντικατάσταση αυτή δεν επηρεάζει την ευκρίνεια του προτύπου κατά τη συμβολή των διαταραχών στο επίπεδο x_0, y_0. Προκαλεί μόνο μια μικρή μεταβολή της λαμπρότητάς του.

Μια αυστηρή οριοθέτηση της προσέγγισης Fresnel προκύπτει από τη (σχ. 1.34), για την οποία θα πρέπει να δεχτούμε ότι ο τρίτος όρος (άρα και οι επόμενοι) της διωνυμικής σειράς που αναπτύχθηκε, προκαλεί μεταβολές στη φάση του όρου $e^{ikr_{01}}$ (του ολοκληρώματος της (σχ. 1.32)) πολύ μικρότερες από 1rad. Δηλ. $k\left(\frac{1}{8}q^2\right) \ll 1\text{rad}$. Από την οποία βρίσκουμε τελικά:

$$l^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}\left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\right]_{\max}^2 \tag{1.37}$$

Αναπτύσσουμε κατόπιν τον όρο $\left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\right]$ στο ολοκλήρωμα της (σχ. 1.36). Επίσης λαμβάνουμε τα όρια του ολοκληρώματος από $-\infty \to \infty$ με δεδομένο

ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση έχει τιμές μόνο στο εσωτερικό της επιφάνειας S_0 (του περιθλώντος ανοίγματος). Τότε η (σχ. 1.36) γράφεται:

$$\Psi\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{i\lambda}\frac{e^{ikl}}{l} e^{\frac{ik\left(x_0^2+y_0^2\right)}{2l}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(x_1, y_1\right) e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}} e^{-\frac{-i2\pi}{\lambda l}\left(x_0 x_1 + y_0 y_1\right)} dx_1 dy_1 \qquad (1.38)$$

που σημαίνει ότι ανεξάρτητα από τους τρεις παράγοντες φάσης – τους πολλαπλασιαστικούς του ολοκληρώματος – η συνάρτηση $\Psi\left(x_0, y_0\right)$ δηλ. η κατανομή του περιθλώμενου ηλ. πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0 μπορεί να βρεθεί από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης: $\Psi\left(x_1, y_1\right) e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}}$ για τις χωρικές συχνότητες: $f_x = x_0/\lambda f$ και $f_y = y_0/\lambda f$. Και όσον αφορά τους παράγοντες φάσης: Δεδομένου ότι αυτό που βλέπουμε ή καταγράφουμε με κοινούς ανιχνευτές στο επίπεδο παρατήρησης είναι η κατανομή της έντασης του φωτός και όχι το πλάτος της έντασης του περιθλώμενου ηλ. πεδίου, υπολογίζουμε τελικά τη συνάρτηση: $I\left(x_0, y_0\right) \sim \left|\Psi\left(x_0, y_0\right)\right|^2 = \Psi\left(x_0, y_0\right) \cdot \Psi^*\left(x_0, y_0\right)$ (όπου Ψ^* η συζυγής της Ψ). Επομένως οι εκθετικοί όροι, οι πολλαπλασιαστικοί του ολοκληρώματος της (σχ. 1.38) έχουν τιμή ίση με τη μονάδα.

3. *Προσέγγιση Fraunhofer (ή προσέγγιση μακρινού πεδίου)*

Για την περίπτωση γενικά που οι διαστάσεις του περιθλώντος ανοίγματος είναι αρκετά μικρές και η απόσταση ανοίγματος επιπέδου παρατήρησης είναι πολύ μεγάλη, τότε ο παράγοντας $e^{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)/2l}$ στο ολοκλήρωμα της (σχ. 1.38) τείνει προς τη μονάδα οπότε αυτό παίρνει τη μορφή:

$$\Psi\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{i\lambda}\frac{e^{ikl}}{l} e^{\frac{ik\left(x_0^2+y_0^2\right)}{2l}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(x_1, y_1\right) e^{-\frac{-i2\pi}{\lambda l}\left(x_0 x_1 + y_0 y_1\right)} dx_1 dy_1 \qquad (1.39)$$

από την οποία πλέον βλέπουμε ότι η $\Psi\left(x_0, y_0\right)$ είναι ανάλογη του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης $\Psi\left(x_1, y_1\right)$. Λέμε τότε ότι βρισκόμαστε στην περιοχή της περίθλασης Fraunhofer. Όμως στην προκειμένη περίπτωση θα πρέπει να οριοθετήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια αυτήν την περιοχή. Δηλ. να γνωρίζουμε ποια είναι η απόσταση $l = l_{\min}$ πάνω από την οποία θα ισχύει αυτή η προσέγγιση. Και αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Ο παράγοντας $e^{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)/2l}$ επειδή $x_1^2 + y_1^2 > 0$ δεν μπορεί να

'ταλαντωθεί'. Δηλ. δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή του $\pi/2$. Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε ένα κριτήριο προκειμένου η τιμή του $\cos\left[k\left(x_1^2+y_1^2\right)/2l\right]$ να τείνει στη μονάδα. Και σαν τέτοια μπορούμε να πάρουμε το: $\frac{k\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}=\frac{k\rho^2}{2l}<\frac{\pi}{4}$. Από την οποία βρίσκουμε ότι θα πρέπει να ισχύει: $l=l_{\min}=\left(4\rho^2/\lambda\right)=d^2/\lambda$ όπου d μέγιστη διάμετρος του περιθλώντος ανοίγματος. Επομένως θα βρισκόμαστε στην περιοχή της περίθλασης Fraunhofer όταν ισχύει η σχέση:

$$l>d^2/\lambda \tag{1.40}$$

Ο υπολογισμός των προτύπων περίθλασης Fraunhofer και η συνάρτηση διαφάνειας

Αν από το ολοκλήρωμα περίθλασης Fraunhofer της (σχ. 1.39) παραλείψουμε τους πολλαπλασιαστικούς όρους της φάσης – για τους λόγους που ήδη αναφέραμε – καθώς και τον παράγοντα πλάτους $1/\lambda l$, τότε θα οδηγηθούμε στο ολοκλήρωμα:

$$\Psi\left(x_0,y_0\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi\left(x_1,y_1\right)e^{-\frac{-i2\pi}{\lambda l}\left(x_0x_1+y_0y_1\right)}dx_1dy_1 \tag{1.41}$$

Και με βάση αυτό το ολοκλήρωμα, μπορούμε πλέον να υπολογίζουμε τις κατανομές των σχετικών προτύπων περίθλασης (λόγω παράληψης των όρων των φάσεων και του πλάτους). Όπου η συνάρτηση $\Psi\left(x_0,y_0\right)$ αφορά την κατανομή του πλάτους του περιθλώμενου πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης x_0,y_0. Και η συνάρτηση $\Psi\left(x_1,y_1\right)$ περιγράφει την κατανομή του πλάτους του μετ. κύματος, του προσπίπτοντος στο περιθλόν άνοιγμα του επιπέδου x_1,y_1. Μέχρις εδώ στην ανάλυσή μας το μέτωπο αυτό το θεωρήσαμε σφαιρικό. Όμως αν η σημειακή πηγή στη θέση P_2 (Σχ. 1.4) από την οποία αναδύεται υποθέσουμε ότι απομακρύνεται από το άνοιγμα πολύ, τότε το σφαιρικό εκφυλίζεται σε επίπεδο μετ. κύματος, του οποίου το πλάτος θεωρείται σταθερό σ' όλο το εύρος του ανοίγματος. οπότε η συνάρτηση $\Psi\left(x_1,y_1\right)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Psi\left(x_1,y_1\right)=\begin{cases}A=\text{σταθ. στη θέση του ανοίγματος}\\0\quad\text{αλλού}\end{cases} \tag{1.42}$$

Είναι όμως δυνατόν το άνοιγμα να καταλαμβάνεται π.χ. από ένα υλικό το οποίο να προκαλεί από σημείο σε σημείο μεταβολή (για το προσπίπτον μετ. κύματος) του πλάτους του, της φάσης ή ακόμη και των δύο. Αν το γεγονός αυτό το περιγράψουμε με μια μιγαδική εν γένει συνάρτηση $t(x_1, y_1)$, τότε αυτή μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$t(x_1, y_1) = \frac{\Psi_t(x_1, y_1)}{\Psi_i(x_1, y_1)} \tag{1.43}$$

όπου $\Psi_i(x_1, y_1)$ η προσπίπτουσα στο άνοιγμα κατανομή της διαταραχής και $\Psi_t(x_1, y_1)$ η κατανομή της ακριβώς μετά το άνοιγμα διερχόμενης. Η $t(x_1, y_1)$ ονομάζεται ***συνάρτηση διαφάνειας (transmission function)***. Τότε η $\Psi_t(x_1, y_1)$ θα εκφράζεται από τη σχέση: $\Psi_t(x_1, y_1) = t(x_1, y_1) \cdot \Psi_i(x_1, y_1)$ οπότε το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.41) θα έχει τη μορφή:

$$\Psi(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \cdot \Psi_i(x_1, y_1) e^{-\frac{-i2\pi}{\lambda l}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \tag{1.44}$$

Και αν τελικά το προσπίπτον μετ. κύματος είναι επίπεδο μοναδιαίου πλάτους δηλ. $\Psi_i(x_1, y_1) = 1$ σ' όλο το εύρος του ανοίγματος, τότε το ολοκλήρωμα της (σχ. 1.44) θα έχει τη μορφή:

$$\Psi(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{-\frac{-i2\pi}{\lambda l}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \tag{1.45}$$

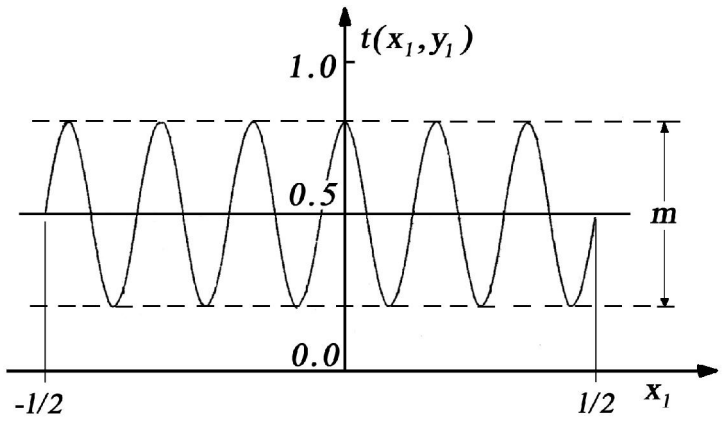
Στα επόμενα θα δώσουμε δύο παραδείγματα συναρτήσεων διαφάνειας.

1. *Συνημιτονική συνάρτηση διαφάνειας πλάτους*

Αν π.χ. το περιθλόν άνοιγμα είναι τετραγωνικό πλάτους l και καλύπτεται από ένα φωτογραφικό φιλμ του οποίου η αμαύρωση κατά μήκος του άξονα x_1 είναι συνημιτονική, τότε η συνάρτηση διαφάνειας θα είναι πραγματική. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι από σημείο σε σημείο το προσπίπτον μετ. κύματος υπόκειται σε απορρόφηση. Δηλ. μεταβάλλεται μόνο το πλάτος, όχι όμως η φάση του. Τότε η συνάρτηση διαφάνειας μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$t(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi u_0 x_1)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right) \tag{1.46}$$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο (Σχ. 1.5). Όπου m το πλάτος της διακύμανσής της αμαύρωσης και u_0 η χωρική συχνότητα της συνημιτονοειδούς δια-



(Σχ. 1.5)

κύμανσης της (το αντίστροφο της περιόδου της). Όσον αφορά μάλιστα τη συνάρτηση $\mathrm{rect}(\ )$, αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{z}{l}\right) = \begin{cases} 1 & \text{για } -\frac{l}{2} \le z \le \frac{l}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1.47}$$

Τα πρότυπα περίθλασης Fraunhofer (κατανομές πλάτους του ηλ. πεδίου και έντασης του φωτός) για περιθλόν στοιχείο που η συνάρτηση διαφάνειας πλάτους $t(x_1, y_1)$ δίνεται από τη (σχ. 1.46), προσδιορίζεται αναλυτικά στην (Άσκ. 12: Λυμένη). Στην ίδια άσκηση γίνεται και ο υπολογισμός, όταν το φράγμα είναι απείρων διαστάσεων.

2. *Ημιτονική συνάρτηση διαφάνειας φάσης*

Έστω τώρα ότι το τετράγωνο πλευράς l περιθλόν άνοιγμα, καλύπτεται από ένα διαφανές γυαλί, του οποίου το πάχος από σημείο σε σημείο κατά μήκος του άξονα x_1 είναι διαμορφωμένο ημιτονικά με πλάτος διακύμανσης από κορυφή σε κορυφή m. Επομένως η συνάρτηση διαφάνειας αυτού του περιθλώντος ανοίγματος είναι φανταστική και θα δίνεται από τη σχέση:

$$t(x_1, y_1) = \left[e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi u_0 x_1)} \right] \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{l} \right) \tag{1.48}$$

όπου u_0 τη χωρική της συχνότητα (το αντίστροφο της περιόδου της) και η συνάρτηση $\mathrm{rect}(\ )$ δίνεται από τη (σχ. 1.47). Τότε ο υπολογισμός του προτύπου περίθλασης Fraunhofer (κατανομές πλάτους του ηλ. πεδίου και της έντασης του φωτός) για περιθλόν στοιχείο που η συνάρτηση διαφάνειας $t(x_1, y_1)$ δίνεται από τη (σχ. 1.48), θα έχει ως εξής:

Κατ' αρχή δεχόμαστε ότι η περίοδος του φράγματος, είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του l. Επομένως οι γραμμές μπορούν να εκληφθούν σαν απείρου μήκους. Άρα και το φράγμα (όπως και το προς επίλυση πρόβλημα) μπορεί να θεωρηθεί σαν μονοδιάστατο. Στη συνέχεια από τη θεωρία των συναρτήσεων Bessel γνωρίζουμε ότι:

$$e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi u_0 x_1)} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) e^{i2\pi q u_0 x_1} \tag{1.49}$$

όπου J_q η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξης q. Και ο μετ. Fourier αυτής της σχέσης μας δίνει:

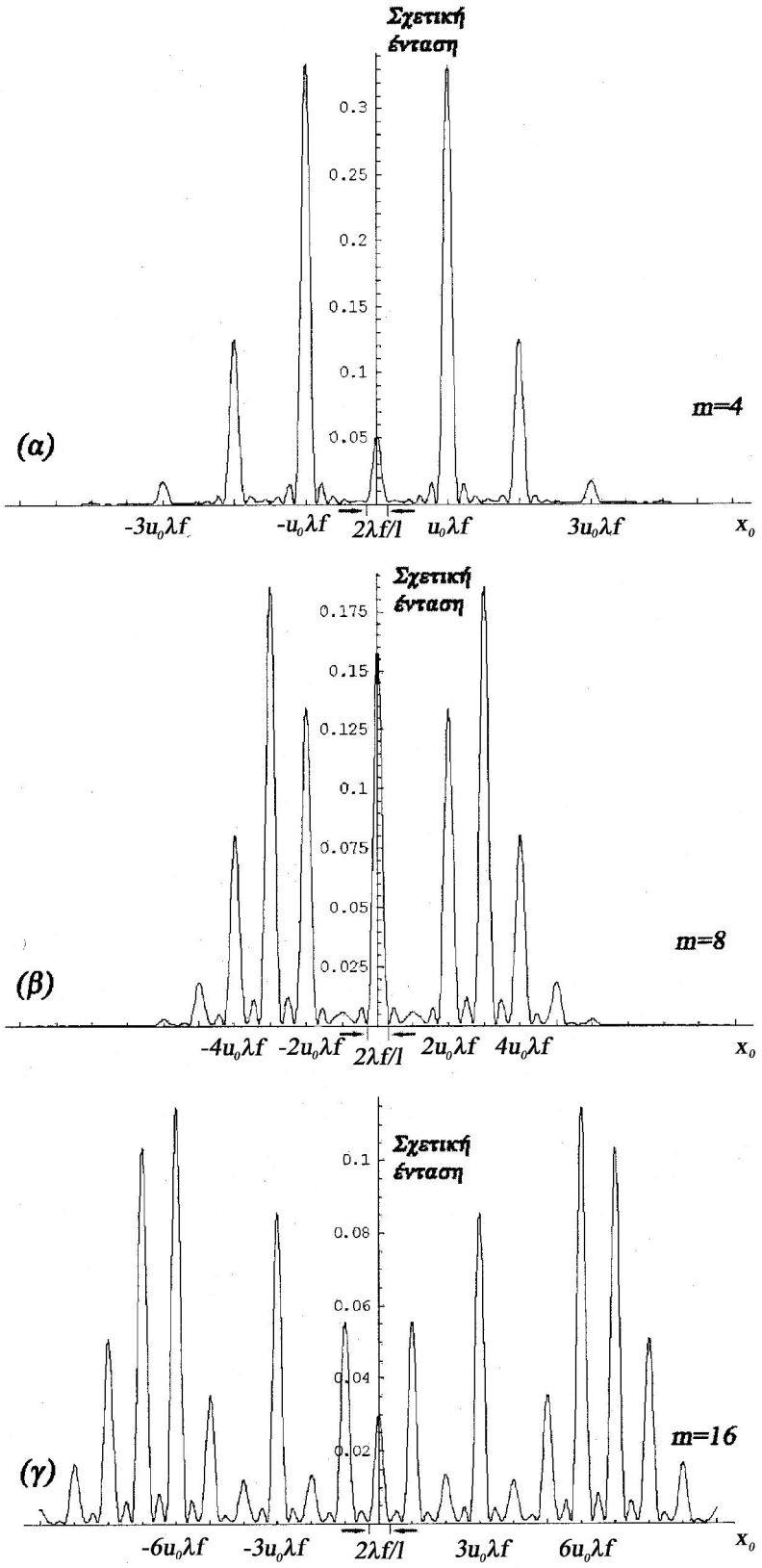
$$\mathcal{F}\left\{ e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi u_0 x_1)} \right\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \delta\left(\frac{u'}{\lambda} - q u_0 \right) \tag{1.50}$$

Όπου $u' = x_0 / f$ το συνημίτονο κατεύθυνσης, x_0 η χωρική διάσταση στο επίπεδο Fourier και f η εστιακή απόσταση του μετασχηματιστή φακού. $\delta(\psi)$ η ονομαζόμενη ***δέλτα συνάρτηση (delta function)***, η οποία κατά τα γνωστά ορίζεται από τη σχέση:

$$\delta(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad \psi \neq 0 \\ \infty & \text{αν} \quad \psi = 0 \end{cases} \tag{1.51}$$

Τότε η κατανομή του πλάτους του πεδίου στο επίπεδο Fourier (αν παραλείψουμε ορισμένες σταθερές και ένα παράγοντα φάσης), θα δίνεται από το μετ. Fourier της συνάρτησης διαφάνειας $t(x_1, y_1)$ της (σχ. 1.48). Δηλ.

$$\mathcal{F}\left\{ t(x_1, y_1) \right\} = \mathcal{F}\left\{ e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi u_0 x_1)} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{l} \right) \right\} = \mathcal{F}\left\{ e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi u_0 x_1)} \right\} \otimes \mathcal{F}\left\{ \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{l} \right) \right\} \tag{1.52}$$


Σχετική ένταση
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
m=4
(α)
-3u0λf
-u0λf
2λf/l
u0λf
3u0λf
x0
Σχετική ένταση
0.175
0.15
0.125
0.1
0.075
0.05
0.025
m=8
(β)
-4u0λf
-2u0λf
2λf/l
2u0λf
4u0λf
x0
Σχετική ένταση
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
m=16
(γ)
-6u0λf
-3u0λf
2λf/l
3u0λf
6u0λf
x0

(Σχ. 1.6)

όπου το σύμβολο $\otimes$ δηλώνει τη ***δίπλωση (convolution)*** μεταξύ των δύο συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας κατόπιν το ***θεώρημα της παράθεσης (array theorem)***: $f_1(x)\otimes\sum_m \delta(x-x_m)=\sum_m f_1(x-x_m)$, καθώς και το ***θεώρημα της χωρικής συχνοτικής δίπλωσης (space frequency convolution theorem)*** για δύο συναρτήσεις: $\mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\}=\mathcal{F}\{f_1(x)\}\otimes\mathcal{F}\{f_2(x)\}=F_1(u)\otimes F_2(u)$ βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{F}\{t(x_1,y_1)\}&=\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\delta\left(\frac{u'}{\lambda}-qu_0\right)\otimes l\,\mathrm{sinc}\left(\frac{lu}{\lambda}\right)=\\&=l\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}\,l\left(\frac{u'}{\lambda}-qu_0\right)=l\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}\left[\frac{l}{\lambda f}(x_0-qu_0\lambda f)\right]\end{aligned}\right\}\qquad(1.53)$$

Από φυσική άποψη η (σχ. 1.53) (μετ. Fourier της συνάρτησης διαφάνειας $t(x_1,y_1)$) μας δίνει τις διάφορες τάξεις περίθλασης q του προτύπου στο επίπεδο Fourier, με λ το μ.κ. του προσπίπτοντος στο φράγμα επιπέδου μετ. κύματος.

Αν η περίοδος $1/u_0$ του φράγματος – όπως έχουμε προαναφέρει – είναι πολύ μικρή σε σχέση με το εύρος του l δηλ. $u_0 \gg l$, τότε μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η επικάλυψη μεταξύ των διαφόρων τάξεων περίθλασης θα είναι αμελητέα. Οπότε η κατανομή της έντασης του φωτός στο επίπεδο Fourier θα δίνεται από τη σχέση:

$$I(x_0)\sim\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q^2\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda f}(x_0-qu_0\lambda f)\right]\qquad(1.54)$$

Στα (Σχ. 1.6) μπορούμε να δούμε τις γραφικές παραστάσεις της κατανομής της σχετικής έντασης του φωτός (πρότυπα περίθλασης) συναρτήσει του x_0 στο επίπεδο Fourier, για τις περιπτώσεις για τις οποίες ο παράγοντας της διακύμανσης του πλάτους του φράγματος από κορυφή σε κορυφή είναι κατά σειρά: $m=4,8,16$.

ΘΕΜΑ 2

Στοιχεία Ολογραφίας

Εισαγωγή

Οι απαρχές της ***ολογραφίας (Holography)*** σαν ιδιαίτερου κλάδου της οπτικής, λάνθαναν μεταξύ των θεωριών της συμβολής και της περίθλασης του φωτός. Η σύνθεσή τους όμως – με αποτέλεσμα την ανάδειξη των αρχών της – οφείλεται στον D.Gabor*, ο οποίος σε δύο δημοσιεύσεις του μεταξύ 1949 - 1951 την εδραίωσε και θεωρητικά. Και όσον αφορά την πειραματική επιβεβαίωσή της – δεδομένου ότι απαιτούνταν η χρήση συμφώνου φωτός – ελλείψει Laser χρησιμοποιήθηκε το κίτρινο ψευδομονοχρωματικό φως που παραγόταν από τις λυχνίες του Νατρίου.

Η ολογραφία στην πραγματικότητα είναι μια μέθοδος απεικόνισης. Όμως σε αντίθεση με τα απεικονίζοντα συστήματα φακών και κατόπτρων κάθε είδους, όπου τα είδωλά τους λαμβάνονται σε δύο διαστάσεις (σε επίπεδο ως επί το πλείστον), τα είδωλα των αντικειμένων μέσω της ολογραφικής μεθόδου, απεικονίζονται στο χώρο των τριών διαστάσεων.

Σημείωση

Το ότι βέβαια βλέπουμε τ' αντικείμενα στο χώρο, οφείλεται στη λεγόμενη στερεοσκοπική όραση που διαθέτει ο άνθρωπος. Σ' αυτήν συμμετέχουν και τα δύο του μάτια και επιτελείται σε γενικές γραμμές με το εξής τρόπο: Το κάθε μάτι βλέπει το προς απεικόνιση αντικείμενο, από μια σχετικά διαφορετική θέση λόγω της απόστασης που τα χωρίζει μεταξύ τους. Επομένως το καθένα προσλαμβάνει μερικά διαφορετικό τμήμα του μετ. κύματος που προέρχεται από αυτό. Άρα στον αμφιβληστροειδή του κάθε ματιού σχηματίζονται μερικά διαφορετικές εικόνες (είδωλα), οι οποίες τοπικά διεγείρουν τα φωτοευαίσθητα κύτταρα των κωνίων και ραβδίων. Τα αποτελέσματα των διεγέρσεων (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική οπτική (§ 3.7): Οπτικά όργανα), μέσω των οπτικών οδών, των κέντρων όρασης και των αναδράσεων στα διάφορα κέντρα του εγκεφάλου, αφικνούνται στα τμήματα του οπτικού φλοιού. Είναι σ' αυτές τις περιοχές που δημιουργείται η αίσθηση του χώρου. Δηλ. του ότι βλέπουμε τ' αντικείμενα τρισδιάστατα.

Άρα απαραίτητη προϋπόθεση του ν' απεικονιστούν τ' αντικείμενα στο χώρο και να τα δούμε είναι: α) Με κάποιο τρόπο θα πρέπει να καταγραφούν οι πληροφο-

---

* D.Gabor, 'Microscopy by reconstructed wavefronts', II, Proc. Roy. Soc. **A197,** 454-487 (1949).

ρίες που αφορούν το συγκεκριμένο μετ. κύματος και β) Με κάποιο άλλο τρόπο, με τη βοήθεια των ήδη καταχωρημένων πληροφοριών, ν' αναπαραχθεί αυτό το μέτ. κύματος και να διαδοθεί στο χώρο προκειμένου να το 'δούμε' με τον τρόπο που προαναφέραμε. Επομένως από τις δύο αυτές απαιτήσεις μπορεί να γίνει κατανοητό ότι η ολογραφική απεικόνιση συντελείται σε δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο της καταγραφής των πληροφοριών που προέρχονται από το αντικείμενο, γίνεται με τη βοήθεια του φαινομένου της συμβολής του φωτός και ενός μέσου καταγραφής (π.χ. ενός φωτογραφικού φιλμ). Στο δεύτερο στάδιο (της αναπαραγωγής του αρχικού μετ. κύματος) γίνεται μέσω του φαινομένου της περίθλασης του φωτός μετά από κατάλληλο φωτισμό της καταγεγραμμένης διαφάνειας του φωτ. φιλμ.

Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα ο τρόπος γραφής της χωρικής κατανομής του πλάτους της Η/Μ διαταραχής ενός μετ. κύματος σ' ένα επίπεδο x, y σε διάφορες θέσεις του χώρου κατά τη διάδοσή του. Μια τέτοια κατανομή περιγράφεται κατά τα γνωστά από μια μιγαδική συνάρτηση των x, y της μορφής:

$$V(x,y) = a(x,y)e^{i\phi(x.y)} \tag{2.1}$$

Όπου $a(x,y)$ είναι το πλάτος της διαταραχής από σημείο σε σημείο και $\phi(x,y)$ η φάση της στ' αντίστοιχα σημεία. Αν τώρα θέλουμε ν' ανιχνεύσουμε την κατανομή αυτού του πεδίου μ' ένα συνήθη ανιχνευτή (το μάτι μας, ένα φωτ. φιλμ, μια CCD κάμερα κλπ.) αυτό που θ' ανιχνεύσουμε θα είναι η κατανομή της έντασης του φωτός. Δηλ. το μέγεθος:

$$I(x,y) \sim V(x,y)V^*(x,y) \tag{2.2}$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την $V(x,y)$ από τη (σχ. 2.1) όπως και τη συζυγή της θα βρούμε κατά τα γνωστά:

$$I(x,y) \sim a^2(x,y) \tag{2.3}$$

Δηλ. μπορούμε να συμπεράνουνε ότι είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε μόνο την κατανομή του πλάτους, αλλά οι πληροφορίες που αφορούν την κατανομή των φάσεων από σημείο σε σημείο πάνω στο επίπεδο, έχουν εξαλειφθεί. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το ερώτημα είναι αν είναι δυνατόν μόνο με τις πληροφορίες που αφορούν την κατανομή του πλάτους, ν' αναπαράγουμε κατά κάποιο τρόπο την κατανομή του μετ. κύματος $V(x,y)$ ακριβώς μετά το επίπεδο x, y που σημαίνει κατά

προέκταση το ίδιο το διαδιδόμενο μετ. κύματος. Η απάντηση βέβαια είναι αρνητική, εφόσον χρησιμοποιούμε συμβατικά μέσα ανίχνευσης (καταγραφής).

Πράγματι έστω ότι φωτογραφίζουμε ένα αντικείμενο στο χώρο με τη βοήθεια ενός φακού, πάνω σ' ένα φωτογραφικό φιλμ. Αν το τελευταίο υποστεί τη διαδικασία της εμφάνισης, τότε προκύπτει μια διαφάνεια στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε τα χαρακτηριστικά του φωτογραφούμενου αντικειμένου (αρνητικού και κατόπιν αν θέλουμε θετικού). Η εικόνα όμως αυτή, ανεξάρτητα αν τη δούμε φωτιζόμενη στο ανακλώμενο ή στο διερχόμενο φως, μας δίνει μια και μοναδική όψη του αντικειμένου. Που σημαίνει ότι αν βλέποντάς την μετακινήσουμε το κεφάλι μας αριστερά – δεξιά δεν πρόκειται να δούμε διαφορετικές όψεις του αντικειμένου. Δηλ. τελικά από τη φωτιζόμενη αυτή εικόνα δεν αναπαράγεται το μετ. κύματος που θα προερχόταν, από το φωτιζόμενο αντικείμενο στο χώρο.

Σημείωση

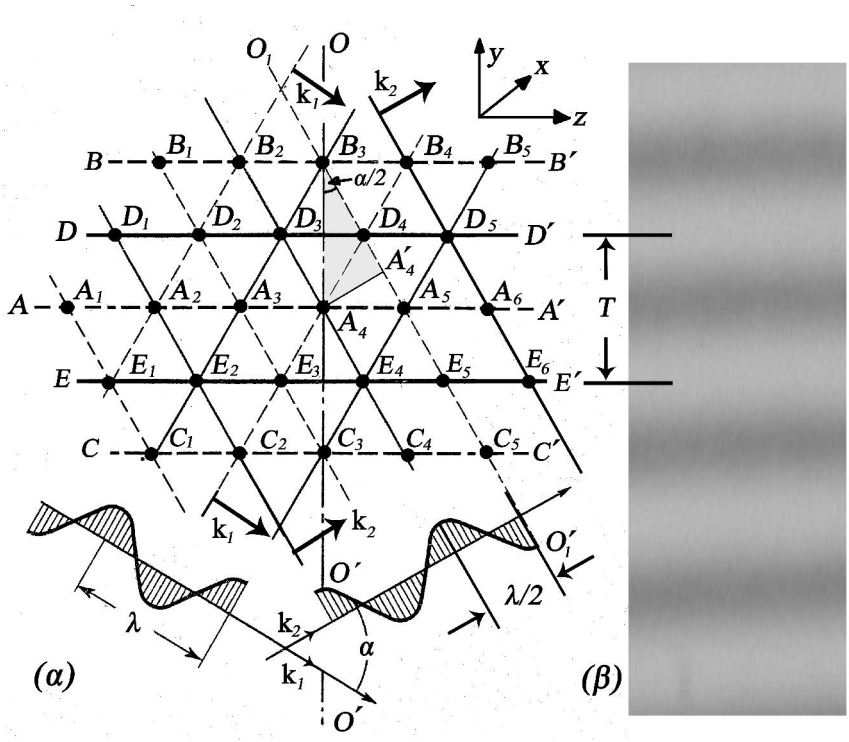
Από την άποψη της στερεοσκοπικής όρασης για την περίπτωση αυτή, το κάθε μας μάτι βλέπει την ίδια και την αυτή εικόνα. Δηλ. την ίδια ακριβώς διαφάνεια που απεικονίζει το αντικείμενο. Με συνέπεια στον οπτικό φλοιό να μην μπορεί να δημιουργηθεί η αίσθηση του χώρου των τριών διαστάσεων.

Άρα για ν' απεικονίσουμε αντικείμενα στο χώρο, θα πρέπει να βρούμε ένα τρόπο καταγραφής και αναπαραγωγής των μετ. κύματος που προέρχονται από αυτά. Και δεδομένου ότι ο συμβατικός τρόπος απεικόνισης των αντικειμένων μας οδηγεί σε εξάλειψη των πληροφοριών που αφορούν τις κατανομές $\phi(x,y)$ των φάσεων, θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος δέσμευσης αυτών των πληροφοριών. Τη δυνατότητα αυτή μας την προσφέρει το φαινόμενο της συμβολής του φωτός με τη βοήθεια ενός μέσου καταγραφής όπως ένα φωτ. φιλμ, αν και δεν είναι το μόνο μέσο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όπως θα δούμε στα επόμενα.

Το φαινόμενο της συμβολής του φωτός, σαν δυνατότητα καταγραφής των πληροφοριών που αφορούν τις κατανομές των πλατών και των φάσεων

Από τα όσα γνωρίζουμε μέχρι τώρα (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός), η διαδικασία αυτή προϋποθέτει την σύμφωνη επαλληλία (συσχετισμό) δύο ή περισσότερων μετ. κύματος. Και στην απλούστερη των περιπτώσεων, θ' αναφερθούμε και πάλι στη συμβολή του φωτός στο χώρο μεταξύ δύο επιπέδων συμφώνων (μονοχρωματικών) μετ. κύματος, που τα κυματοδιανύσματά τους σχηματίζουν μεταξύ

τους γωνία a (Σχ. 2.1α). Σ' αυτό βλέπουμε μια τομή του χώρου διάδοσής τους, με τα κυματοδιανύσματα $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ $\left(|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = 2\pi/\lambda\right)$ να βρίσκονται πάνω σ' αυτό το επίπεδο (το επίπεδο της σελίδας). Οι λεπτού πάχους στικτές γραμμές μας δίνουν τα ελάχιστα των τιμών των πλατών των κυματικών διαταραχών των δύο ηλ. πεδίων, ενώ οι συνεχείς αντίστοιχα τα μέγιστα.



(Σχ. 2.1)

Για ένα στιγμιότυπο $(t = \text{σταθ.})$ (χωρική δομή) των διαταραχών των πλατών, μπορούμε να δούμε ότι στις ευθείες $BB', AA', CC', \cdots$ τα $B_i, A_i, C_i, \cdots$ αντιστοιχούν στα σημεία όπου το μέγιστο πλάτος του ενός μετ. κύματος αντιστοιχεί στο ελάχιστο του άλλου. Δηλ. έχουμε την επαλληλία διαταραχών που συμβάλλουν με διαφορά φάσης 180^0. Οπότε κατά τα γνωστά θα έχουμε μηδενική τιμή πλάτους και κατά προέκταση μηδενική τιμή της έντασης του φωτός. Δηλ. ελάχιστα. Επίσης κατά μήκος των ευθειών $DD', EE', \cdots$ τα $D_i, E_i, \cdots$ αντιστοιχούν σε σημεία όπου το ελάχιστο πλάτος του ενός μετ. κύματος αντιστοιχεί στο ελάχιστο του άλλου. Δηλ. το συνολικό πλάτος στις θέσεις αυτές είναι $-2A$. Ή όπου το μέγιστο πλάτος του ενός μετ. κύματος αντιστοιχεί στο μέγιστο του άλλου με συνολικό πλάτος $2A$. Δηλ. θα έχουμε την επαλληλία διαταραχών που συμβάλλουν – και για τις δύο περιπτώσεις – με διαφορά φάσης 0^0. Κατά προέκταση θα έχουμε και μέγιστη τιμή για την ένταση του φωτός $I = 4A^2$. Στις ευθείες γραμμές ενδιάμεσες αυτών που αναφέρθηκαν ήδη, θα έχουμε τις διαταραχές να συμβάλλουν μεταξύ τους με διαφορές φάσης μεταξύ

$0^0 - 180^0$. Τότε οι τιμές των αθροισμάτων των πλατών θα είναι μεταξύ $0 \pm 2A$. Οπότε οι εντάσεις του φωτός μεταξύ $0 - 4A^2$. Θα πρόκειται δηλ. για μια περιοδική αυξομείωση της έντασης του φωτός με μια περίοδο T (Σχ. 2.1β), με τους κροσσούς συμβολής παράλληλους μεταξύ τους (κατά μήκος του άξονα OO') και κάθετους στη σελίδα του σχήματος αυτού.

Σημείωση

Αν τώρα αντί του στιγμιότυπου θεωρήσουμε τη χωρο−χρονική διάδοση των μετ. κύματος, τότε τα 'σημεία' $B_i, A_i, C_i, \cdots$ μετατοπίζονται κατά μήκος των ευθειών $BB', AA', CC', \cdots$ πάντα όμως με τα πλάτη των διαταραχών σε αντίθεση φάσης. Και αυτό βέβαια για όσο χρόνο διαρκεί η διάδοση. Το ίδιο ακριβώς θα συμβαίνει και για τα σημεία $D_i, E_i, \cdots$ τα οποία θα μετατοπίζονται πάνω στις ευθείες $DD', EE', \cdots$ αλλά με τα πλάτη των διαταραχών πάντα σε φάση. Παρόμοια διαδικασία θα είναι σε ισχύ, και για τις ενδιάμεσες θέσεις μεταξύ των προαναφερόμενων ευθειών.

Επομένως στο χώρο αλληλεπίδρασης (εδώ του συμφώνου συσχετισμού) των δύο μετ. κύματος, δημιουργείται μια 'μόνιμη' (αν και όπως περιγράψαμε προηγούμενα δυναμικά μόνιμη) δομή με τη μορφή των κροσσών συμβολής. Η δομή αυτή αναπτύσσεται στο χώρο συσχετισμού, λόγω της ενεργειακής ανακατανομής των κατά τα άλλα συνεχών ενεργειακών ροών των δύο μετ. κύματος ξεχωριστά. Οι υπάρχουσες περιοχές μηδενικής έντασης δεν παραβιάζουν την αρχή της διατήρησης της ενέργειας, επειδή η μέση χωρική τιμή της έντασης του φωτός στο χώρο που σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής είναι σταθερή και ίση με το άθροισμα των επί μέρους εντάσεων $\left(\langle I \rangle = I_1 + I_2\right)$, των δύο επί μέρους μετ. κύματος (βλ. Κεφ. 6: συμβολή του φωτός (§ 6.4.1) − Παράδειγμα 2).

Έστω τώρα ότι φέρουμε την ευθεία OO' η οποία περνάει από τα σημεία B_3, A_4, C_3. Επειδή αυτά είναι αντίστοιχα σημεία διαδοχικών κροσσών (ελάχιστων), θα είναι κάθετη στους κροσσούς συμβολής. Επίσης φέρουμε την A_4A_4' που είναι κάθετη στο μετ. κύματος στη θέση O_1O_1'. Τότε για το ορθογώνιο τρίγωνο $B_3A_4A_4'$ η γωνία $\widehat{A_4B_3A_4'} = a/2$ και $A_4A_4' = \lambda/2$. Επομένως: $\sin\dfrac{a}{2} = \dfrac{A_4A_4'}{B_3A_4} = \dfrac{\lambda/2}{T}$ όπου T η περίοδος των δημιουργούμενων κροσσών συμβολής. Επομένως:

$$T = \frac{\lambda}{2\sin\left(a/2\right)} \tag{2.4}$$

Και τα όρια της περιόδου T των κροσσών συμβολής για διάδοση των μετ. κύματος μεταξύ $0^0 \le a \le 180^0$ θα είναι: $\infty \le T \le \lambda/2$. Δηλ. η μικρότερη οριακή περίοδος των κροσσών συμβολής έχει την τιμή: $T = \lambda/2$. Π.χ. για $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ (Laser He-Ne) θα έχουμε: $T = 0.0003164\text{mm}$. 'Η $f \simeq 3160\,\text{γραμμ./mm}$, όπου $f = 1/T$ η οριακή χωρική συχνότητα των δημιουργούμενων κροσσών συμβολής. Για $a = 60^0$ θα έχουμε: $T = \lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ και $f \simeq 1580\,\text{γραμμ./mm}$. Και επειδή τα μετ. κύματος διαδίδονται στο χώρο, τότε και οι κροσσοί συμβολής θα έχουν χωρική δομή και θα είναι κάθετοι στο επίπεδο του (σχ. 2.1α). Δηλ. θα έχουμε ανάπτυξη κροσσών κατ' όγκο στον χώρο διάδοσης των δύο (εδώ) επιπέδων μετ. κύματος. Θα πρέπει επίσης ν' αναφέρουμε ότι η γεωμετρία των ευθύγραμμων κροσσών συμβολής, προέκυψε από το γεγονός ότι τα συσχετιζόμενα μετ. κύματος ήταν επίπεδα. Όταν όμως τα τελευταία είναι τυχαίας μορφής, η γεωμετρία των κροσσών συμβολής στο χώρο μπορεί να είναι εξαιρετικά περίπλοκη (βλ. (Εικ. 2.20)).

Από τα όσα έχουν ειπωθεί μέχρις εδώ προκύπτει το συμπέρασμα ότι η σύμφωνη επαλληλία (δύο ή και περισσότερων) μετ. κύματος σ' ένα χώρο οδηγεί σ' ένα συμβολογράφημα, του οποίου η δημιουργία από σημείο σε σημείο σχετίζεται άμεσα με τα πλάτη τους καθώς και τις διαφορές φάσης τους εκεί, με τη μορφή της αυξομείωσης της έντασης του φωτός. Και τα ερωτήματα που προκύπτουν άμεσα είναι τα εξής: α) Αν είναι δυνατόν να καταγραφούν (πλάτη και φάσεις) μόνιμα (ή όχι) σ' ένα μέσο καταγραφής πάνω σ' ένα επίπεδο ή κατ' όγκο. β) Με ποια μορφή μπορεί να γίνει η καταγραφή και γ) Τι είδους πληροφορίες κομίζουν τελικά αυτού του είδους οι εγγραφές. Όσον αφορά τα μέσα καταγραφής, έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι σήμερα αρκετά όπως είναι: Τα μαγνητικά, τα φωτοχρωμικά, τα θερμοπλαστικά, τα φωτοπολυμερή, τα φωτ. φιλμ ακόμη και κρυσταλλικά υλικά (φωτοδιαθλαστικά). Βασική ιδιότητα αυτών των μέσων είναι ότι το καθένα με διαφορετικούς φυσικούς μηχανισμούς μετασχηματίζουν τις διακυμάνσεις της έντασης του προσπίπτοντος σ' αυτά φωτός σε κάποιου είδους 'αλλοίωσης' (μόνιμης ή μη) του υλικού, από σημείο σε σημείο στην έκταση μιας επίπεδης επιφάνειας στην οποία έχει εναποτεθεί ή κατ' όγκο. Αυτά βέβαια που χρησιμοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται ακόμη σε ολογραφικές εφαρμογές, είναι ειδικά φωτογραφικά φιλμ. Τα συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα σαν μέσα καταγραφής και για το λόγο αυτό θα περιγράψουμε στοιχειωδώς τις ιδιότητές τους.

Ανεξάρτητα λοιπόν του καταγραφικού υλικού και των διαδικασιών καταγραφής, το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι θα έχουμε τη δημιουργία δομών που δεν είναι τίποτα άλλο παρά φράγματα. Δηλ. φράγματα περίθλασης. Και θ' ασχοληθούμε από εδώ και στο εξής με φράγματα που είναι καταγεγραμμένα σε επίπεδες επιφάνειες (φιλμ ή γυάλινες πλάκες) καλυμμένες με φωτοευπαθή υλικά με βάση τον AgBr και που το πάχος τους είναι σχετικά λεπτό (π.χ. $\simeq 5\mu\text{m}$). Επίσης για τη διαδι-

κασία της καταγραφής στο φωτ. υλικό υπάρχει μια βασική δέσμευση. Το ότι αυτή γίνεται στη γραμμική του περιοχή. Που σημαίνει ότι η τελικά δημιουργούμενη συ-

Σημείωση

Για τα φράγματα όγκου, δηλ. για τα υλικά που οι κροσσοί συμβολής εγγράφονται σε μεγάλο βάθος στο εσωτερικό τους, θα γίνει μόνο στοιχειώδης αναφορά. Αυτά μπορεί να είναι φωτ. φιλμ που το πάχος τους είναι σχετικά μεγάλο (π.χ. $\simeq 25\mu\text{m}$), ή άλλα υλικά όπως π.χ. φωτοδιαθλαστικοί μονοκρύσταλλοι (με διαστάσεις $1\times1\times1\text{cm}$). Από τα πρώτα, μετά την έκθεσή τους στα πεδία των συσχετιζόμενων μετ. κύματος και μια απαιτούμενη κατόπιν χημική επεξεργασία, προκύπτουν (σε μόνιμη κατάσταση) ***φράγματα όγκου πλάτους (volume amplitude gratings)***, με χαρακτηριστικό την αμαύρωση από σημείο σε σημείο του υλικού. Οπότε τα φράγματα αυτού του είδους σε προσπίπτοντα σ' αυτά πεδία, προκαλούν μεταβολές μόνο στα πλάτη τους από σημείο σε σημείο (λόγω απορρόφησης). Για τους φωτοδιαθλαστικούς κρυστάλλους η επίδραση των ηλ. πεδίων προκαλεί στο εσωτερικό τους μετατοπίσεις περίσσιας ηλ. φορέων που διαθέτουν αυτά τα υλικά. Η συσσώρευση ή η απώλεια ηλ. φορέων στο υλικό δημιουργεί φράγματα. Τα τελευταία όμως είναι ***φράγματα όγκου φάσης (volume phase gratings)***. Δηλ. 'διαφανή' φράγματα που σε προσπίπτοντα σ' αυτά πεδία προκαλούν μεταβολές μόνο στις φάσεις του από σημείο σε σημείο και όχι στο πλάτος τους. Επίσης τα φράγματα αυτού του είδους μπορούν ν' απαλειφθούν και στο υλικό να ξαναγραφεί νέο φράγμα.

νάρτηση διαφάνειας πλάτους $t(x,y)$ του φιλμ θα είναι ανάλογη της προσπίπτουσας κατανομής της συνολικής έντασης του φωτός ή κατά προέκταση ανάλογη του τετραγώνου του αθροίσματος των κατανομών των πλατών των πεδίων. Δηλ.

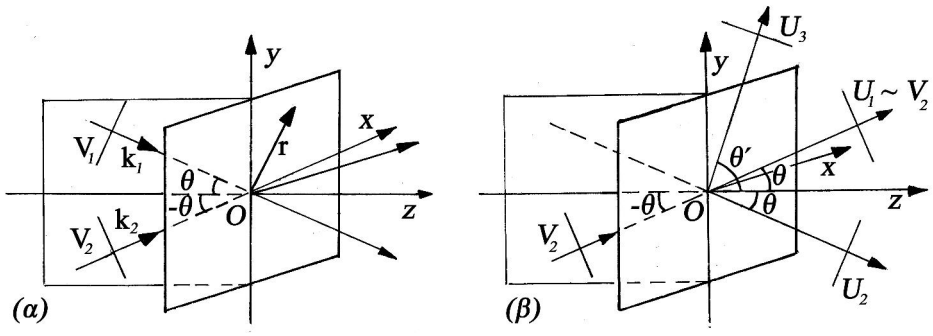
$$t(x,y) = a + b\left|\Delta V\right|^2 = a + b\left|V_1 + V_2 + \cdots\right|^2 \tag{2.5}$$

Με βάση τον ορισμό της συνάρτησης διαφάνειας $t(x,y)$ (βλ. ΘΕΜΑ 1), αυτή θα είναι ίση με το λόγο: V_t/V_i. Όπου $V_i(x,y)$ η κατανομή του προσπίπτοντος στην επιφάνεια της διαφάνειας (δηλ. στο φράγμα περίθλασης που έχει δημιουργηθεί) μετ. κύματος και $V_t(x,y)$ θα είναι η κατανομή του περιθλώμενου μετ. κύματος, λίγο μετά από αυτήν. Και όσον αφορά την ουσία της γραμμικής καταγραφής, αυτή θα περιγραφεί στα επόμενα, όταν στοιχειωδώς ανατρέξουμε στη θεωρία των φωτ. φιλμ, καθώς και την ανάδειξη της έννοιας της συνάρτησης διαφάνειας. Όμως οπωσδήπο-

τε θα πρέπει να δούμε εδώ το αποτέλεσμα της καταγραφής των πλατών και των φάσεων του ενός μετ. κύματος που θα το ονομάζουμε μετ. κύματος του αντικειμένου (V_O), σε σχέση με τα πλάτη και τις φάσεις ενός άλλου, που θα το ονομάζουμε μετ. κύματος αναφοράς (V_R). Το αν δηλ. οι καταγεγραμμένες πληροφορίες αυτού του είδους στη διαφάνεια, μας οδηγήσουν στην αναπαραγωγή του μετ. κύματος που προέρχεται από το αντικείμενο. Στα δύο παραδείγματα που θα ακολουθήσουν, τα μετ. κύματος κάθε άλλο παρά είναι περίπλοκα. Πρόκειται για επίπεδα ή σφαιρικά. Όμως όπως θα δούμε, συνιστούν μια προσπάθεια, που μας βοηθάει στην κατανόηση της διαδικασίας της ολογραφικής απεικόνισης.

Παράδειγμα 1

Στο (Σχ. 2.2α) μπορούμε να δούμε τη διάδοση δύο μονοχρωματικών συμφώνων και επιπέδων μετ. κύματος, των οποίων τα κυματοδιανύσματα $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο y, z τρισορθογωνίου σ.σ. x, y, z. Το μετ. κύματος $V_1 \equiv V_O$ το



(Σχ. 2.2)

θεωρούμε σαν το μετ. κύματος του αντικειμένου (που προκύπτει από για μια σημειακή πηγή που βρίσκεται στο άπειρο) και προσπίπτει με γωνία θ ως προς τον άξονα z. Το δεύτερο μετ. κύματος $V_2 \equiv V_R$ το θεωρούμε σαν μετ. κύματος αναφοράς και προσπίπτει με την γωνία $-\theta$ συμμετρικά του πρώτου. Θα δούμε με ποιον τρόπο γίνεται η καταγραφή των πληροφοριών, που αφορούν την μετέπειτα αναπαραγωγή του μετ. κύματος του αντικειμένου.

1η φάση: ***Καταγραφή των πληροφοριών που αφορούν το αντικείμενο***

Τα δύο μετ. κύματος – δεδομένης της συμφωνίας τους – συμβάλλουν στο επίπεδο x, y, όπου έχει τοποθετηθεί ένα φωτ. φιλμ. Η έκθεση του φιλμ για ένα ορι-

σμένο χρονικό διάστημα γίνεται στη γραμμική του περιοχή με συνέπεια μετά τη διαδικασία της εμφάνισής του να προκύψει μια διαφάνεια που η συνάρτησή της δίνεται από τη (σχ. 2.5):

$$t(x,y) = a' + b\left|V_1 + V_2\right|^2 \tag{2.6}$$

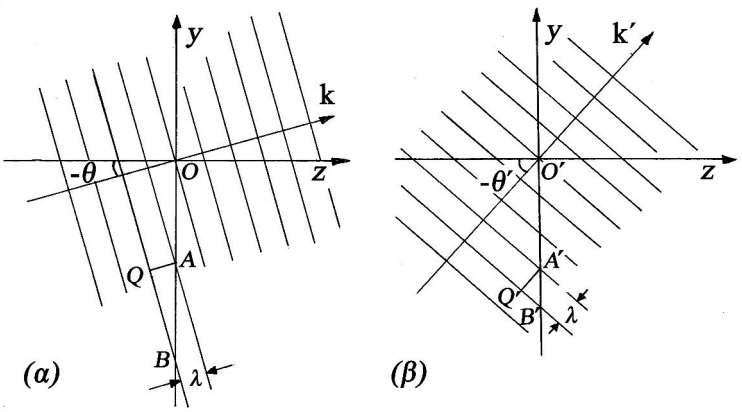
όπου a', b σταθερές. $V_1 = e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}}$, $V_2 = e^{-i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}}$ και $\mathbf{k}_1 = k\cos\alpha\mathbf{i} + k\cos\beta\mathbf{j} + k\cos\gamma\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_2 = k\cos\alpha'\mathbf{i} + k\cos\beta'\mathbf{j} + k\cos\gamma'\mathbf{k}$. Με $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ τις γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ με τους άξονες x, y, z και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ένα τυχαίο διάνυσμα θέσης πάνω στο επίπεδο x, y. Επίσης $k = 2\pi/\lambda$ είναι το μέτρο των κυματοδιανυσμάτων $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$.

Μετά τις πράξεις (βλ. Κεφ. 1: Κύματα Άσκ. 10: Λυμένη), οι κατανομές των δύο επιπέδων μετ. κύματος πάνω στο επίπεδο x, y θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_1 = e^{ik\sin\theta y} \quad \text{και} \quad V_2 = e^{-ik\sin\theta y} \tag{2.7}$$

Σημείωση

Από τις (σχ. 2.7) μπορούμε να δούμε ότι στην κατανομή του πλάτους ενός επιπέδου μετ. κύματος $V(x,y)$ πάνω στο επίπεδο x, y, η μεταβολή στη φάση του είναι γραμμικά εξαρτημένη από το y, που συνιστά και το κύριο χαρακτηριστικό του. Επίσης γράφοντας $V = e^{-ik\sin\theta y} = e^{-i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}y} = e^{-i2\pi f_y y}$, τον όρο $(\sin\theta/\lambda) = f_y$ τον



(Σχ. 2.3)

ονομάζουμε ***χωρική συχνότητα (spatial frequency)*** , της οποίας η φυσική σημασία προκύπτει με τη βοήθεια του (Σχ. 2.3α). Στο σχήμα αυτό μπορούμε να δούμε ένα

στιγμιότυπο της διάδοσης ενός επιπέδου μετ. κύματος το οποίο διαδίδεται κατά τη γωνία $-\theta$ ως προς τον οπτικό άξονα z και του οποίου το κυματοδιάνυσμα $\mathbf{k}$ βρίσκεται στο επίπεδο y,z. Διακρίνουμε επίσης τα διαδοχικά μέγιστα του μετ. κύματος, τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μ.κ. λ. Τα επίπεδα αυτά, τέμνουν τον άξονα y σε ίσα τμήματα που το μήκος τους AB θα είναι: $AB = \lambda/\sin\theta$. Οπότε το αντίστροφο αυτού του μεγέθους θα είναι: $\frac{1}{AB} = \frac{\sin\theta}{\lambda} = f_y$. Δηλ. η χωρική συχνότητα κατά τον άξονα z. Επομένως άμα είναι γνωστή η χωρική συχνότητα f_y, μπορούμε να βρούμε τη διεύθυνση διάδοσης του επιπέδου μετ. κύματος ως προς τον άξονα z. Επίσης η f_y μας δίνει το αντίστροφο της περιόδου των κροσσών συμβολής (αριθμό κροσσών ανά μονάδα μήκους) που θα μπορούσαν να σχηματιστούν όταν μαζί με το επίπεδο μετ. κύματος που διαδίδεται κατά γωνία θ, ερχόταν σε επαλληλία ένα πανομοιότυπο μετ. κύματος το οποίο όμως θα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα z. Στο (Σχ. 2.3β) μπορούμε να δούμε ένα επίπεδο μετ. κύματος που διαδίδεται κατά γωνία $-\theta' = -\arcsin(3\sin\theta)$ ως προς τον z. Στην προκειμένη περίπτωση: $A'B' = \frac{\lambda}{\sin\theta'} = \frac{\lambda}{3\sin\theta} \Rightarrow f_y' = 3f_y$.

Και για να δούμε ποια θα είναι η συναρτησιακή μορφή της δημιουργούμενης διαφάνειας πάνω στο φιλμ, θα πρέπει αυτές ν' αντικατασταθούν στη (σχ. 2.6) οπότε:
$t(x,y) = a' + b|V_1 + V_2|^2 = a' + b(V_1 + V_2)(V_1^* + V_2^*) = a' + b|V_1|^2 + b|V_2|^2 + bV_1V_2^* + bV_1^*V_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow t(x,y) = a + be^{2ik\sin\theta y} + be^{-2ik\sin\theta y}$, με $a = a' + 2b = \text{σταθ.}$ Η οποία παίρνει τελικά τη μορφή:

$$t(x,y) = a + 2b\cos(2k\sin\theta y) \tag{2.8}$$

Άρα το φιλμ χαρακτηρίζεται από μια συνημιτονοειδή διακύμανση αμαύρωσης στις θέσεις που αναπτύχτηκαν οι κροσσοί συμβολής, κατά μήκος του άξονα y και παράλληλα με τον άξονα x. Πρόκειται δηλ. για ένα συνημιτονικό φράγμα περίθλασης πλάτους. Η περίοδός του T υπολογίζεται με τη βοήθεια της (σχ. 2.8) για $2k\sin\theta y_1 = 0$ και $2k\sin\theta y_2 = 2\pi$. Οπότε: $2k\sin\theta(y_2 - y_1) = 2\pi$ και άρα:

$$\Delta y = (y_2 - y_1) = T = \lambda/2\sin\theta \tag{2.9}$$

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε εδώ ότι η διάταξη του (Σχ. 2.2α), ανάπτυξης των κροσσών συμβολής και δημιουργίας της συγκεκριμένης διαφάνειας πλάτους με συναρ-

τησιακή μορφή που δίνεται από τη (σχ. 2.8), είναι πανομοιότυπη με αυτήν του (Σχ. 2.1α). Όπου $OO' \parallel Oy, AA' \parallel Oz$ και ο άξονας Ox διευθύνεται προς το εσωτερικό της σελίδας. Για το λόγο αυτό η περίοδος Δy των κροσσών συμβολής ταυτίζεται με αυτήν της (σχ. 2.4) όπου $a = 2\theta$.

2η φάση: ***Αναπαραγωγή του μετ. κύματος του αντικειμένου***

Κατ' αρχή τοποθετούμε (Σχ. 2.2.β) τη διαφάνεια που δημιουργήθηκε κατά την πρώτη φάση της διεργασίας, στην ίδια ακριβώς θέση του επιπέδου x, y στην οποία έγινε η καταγραφή. Στην προκειμένη περίπτωση, οι μεταβολές της αμαύρωσης θα είναι κατά μήκος του άξονα Oy και παράλληλα με τον άξονα Ox. Και θέλουμε να δούμε κατ' ακολουθία τι ακριβώς θα συμβεί όταν η διαφάνεια αυτή φωτιστεί με το επίπεδο μετ. κύματος αναφοράς $V_2 \equiv V_R$. Είναι αυτονόητο ότι αυτό το οποίο θα προκύψει, αφορά το φαινόμενο της περίθλασης του φωτός. Όπου σαν αποτέλεσμα θ' αντλήσουμε πληροφορίες για τ' αναδυόμενα περιθλώμενα μετ. κύματος. Και πιο συγκεκριμένα για τις κατανομές των μετ. κύματος που προκύπτουν αμέσως μετά τη διαφάνεια στο επίπεδο x, y. Οι τελευταίες αναδεικνύονται με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης $t(x,y) = V_t(x,y)/V_i(x,y)$ που αφορά τον ορισμό της συνάρτησης διαφάνειας. Όπου εδώ: $V_i(x,y) = V_2(x,y) \equiv V_R(x,y)$ η κατανομή του προσπίπτοντος στη διαφάνεια μετ. κύματος αναφοράς και $V_t(x,y)$ η κατανομή του περιθλώμενου πεδίου μόλις μετά τη διαφάνεια. Και επειδή: $V_R(x,y) = e^{-ik\sin\theta y}$ όπως και από τη σχέση: $t(x,y) = a + be^{2ik\sin\theta y} + be^{-2ik\sin\theta y}$, θα έχουμε τελικά:

$$V_t(x,y) = ae^{-ik\sin\theta y} + be^{ik\sin\theta y} + be^{-ik\sin\theta y}e^{-i2k\sin\theta y} = U_1(x,y) + U_2(x,y) + U_3(x,y) \qquad (2.10)$$

Από τη (σχ. 2.10) διαπιστώνουμε ότι ακριβώς πίσω από τη διαφάνεια διαδίδονται στο χώρο τρία μετ. κύματος των οποίων οι κατανομές ακριβώς πίσω από το επίπεδο $x, y\ (z^+)$ είναι οι εξής:

1) $U_1(x,y) = ae^{-ik\sin\theta y}$: Πρόκειται για την κατανομή του επιπέδου μετ. κύματος αναφοράς $V_2(x,y)$ πολλαπλασιασμένου με τη σταθερή a (παράγοντας απορρόφησης). Διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με το V_2 δηλ. κατά γωνία $-\theta$ σε σχέση με τον οπτικό άξονα και αφορά το μη περιθλώμενο μετ. κύματος.

2) $U_2(x,y) = be^{ik\sin\theta y}$: Πρόκειται για την κατανομή του επιπέδου μετ. κύματος $V_1(x,y)$ πολλαπλασιασμένου με τη σταθερή b (παράγοντας απορρόφησης). Δι-

αδίδεται στην ίδια διεύθυνση με το V_1 δηλ. κατά γωνία θ σε σχέση με τον οπτικό άξονα. Πρόκειται για το πανομοιότυπο του μετ. κύματος του αντικειμένου, το οποίο προέκυψε μέσω της διαδικασίας της περίθλασης από τη συγκεκριμένη διαφάνεια.

3) $U_3(x,y) = be^{-ik\sin\theta y}e^{-i2k\sin\theta y} = be^{-i3k\sin\theta y}$. Κατ' αρχή διαπιστώνουμε ότι λόγω της γραμμικής εξάρτησης του παράγοντα της φάσης $(k\sin\theta' y)$ από το y, η κατανομή αυτή στο επίπεδο x,y, αφορά κατανομή επιπέδου μετ. κύματος. Και όσον αφορά τον παράγοντα b, πρόκειται για σταθερό συντελεστή απορρόφησης. Μέλει τώρα να υπολογίσουμε τη διεύθυνση διάδοσής του ως προς τον άξονα Oz. Η διάδοσή του γίνεται κατά μια γωνία $-\theta'$ όπου: $\sin\theta' = 3\sin\theta$. Άρα: $\theta' = \arcsin(3\sin\theta)$. Αν η τιμή της γωνίας θ' αφορούσε παραξονική προσέγγιση τότε $\theta' \simeq 3\theta$. Όμως η υπόθεση αυτή δεν ισχύει, δεδομένου ότι – όπως θα δούμε στα επόμενα – οι γωνίες που σχηματίζουν τα μετ. κύματος αναφοράς σε σχέση με αυτά των αντικειμένων είναι πολύ μεγαλύτερες. Και ο λόγος είναι σημαντικός επειδή αφορά άμεσα τη δυνατότητα διαχωρισμού μεταξύ τους, των μετ. κύματος που αναδύονται κατά τη διαδικασία αναπαραγωγής τους από τις διαφάνειες (συμβολογραφήματα). Π.χ. για το πρόβλημα που εξετάζουμε αν $-\theta = 19^0$ τότε $-\theta' = 77.6^0$ (αλλά $3\theta = 57^0$). Βλέπουμε δηλ. ότι για την καταγραφή του επιπέδου μετ. κύματος V_1 με γωνία $\theta = 19^0$ και την αναπαραγωγή του μέσω του V_2 με γωνία $-\theta = 19^0$, η διάδοση του επιπέδου μετ. κύματος U_3 (το οποίο θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί 'οπτικό παράσιτο' κατά τη διαδικασία της αναπαραγωγής του $U_3 \equiv V_1$) γίνεται σχεδόν εφαπτομενικά με το επίπεδο x,y. Π.χ. για $\theta = 20^0$ το U_3 δεν υφίσταται καν δηλ. δεν αναδύεται από την διαφάνεια. Πράγματι τότε θα ισχύει: $3\sin\theta = 1.026$, από την οποία προκύπτει ότι ο υπολογισμός της θ' από την $\theta' = \arcsin(3\sin\theta)$ δεν μας δίνει έγκυρο αποτέλεσμα.

Τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν τελικά από την προηγούμενη ανάλυση έχουν ως εξής:

α) Είναι δυνατόν με τη βοήθεια ενός μετ. κύματος αναφοράς, να δημιουργήσουμε ένα συμβολογράφημα, που να συσχετίζει τις φάσεις του (δηλ. το μετ. κύματος αναφοράς), με τις φάσεις του μετ. κύματος του αντικειμένου και το οποίο θέλουμε ν' αναπαράγουμε στο χώρο.

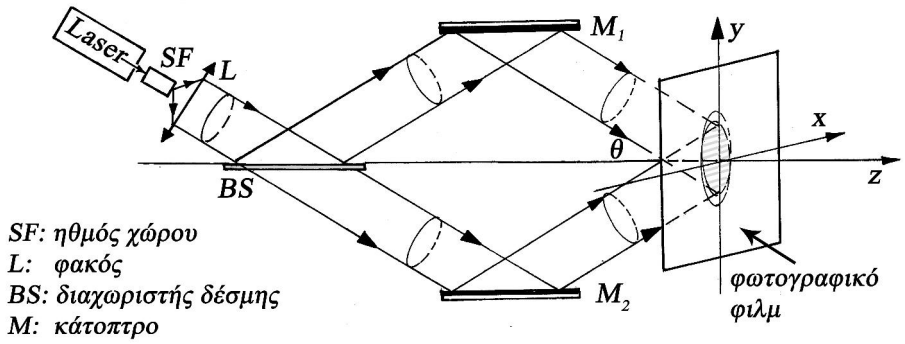
β) Οι πληροφορίες αυτές είναι δυνατόν να καταγραφούν σ' ένα φωτ. φιλμ (ή σ' ένα άλλο μέσο καταγραφής). Και οι διεργασίες πάνω σ' αυτά τα υλικά, θα έχουν σαν τελικό αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας διαφάνειας, με τη μορφή φράγματος περίθλασης.

γ) Αν σε επόμενη φάση η διαφάνεια αυτή φωτιστεί με το μετ. κύματος αναφοράς, αναδύονται από αυτήν μια πλειάδα μετ. κύματος. Τα μέτωπα αυτά – κάτω

από ορισμένες συνθήκες – είναι δυνατόν να διαδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις (δηλ. να είναι μεταξύ τους διαχωρισμένα). Και ένα από αυτά να είναι το επιθυμητό μετ. κύματος του αντικειμένου.

Στο προηγούμενο παράδειγμά μας, το αναπαραγόμενο μετ. κύματος ήταν ένα από τα απλούστερα: το επίπεδο μετ. κύματος (που προέκυψε από μια σημειακή πηγή, τοποθετημένη σε άπειρη απόσταση). Όμως η μέθοδος αυτή μπορεί να επεκταθεί και για την καταγραφή και αναπαραγωγή μετώπων κύματος που προέρχονται από τρισδιάστατα αντικείμενα και που στη γενικότερη περίπτωση είναι εξαιρετικά περίπλοκα. Δηλ. υπάρχει η δυνατότητα απεικόνισης των αντικειμένων αυτών στο χώρο. Και όσον αφορά τα ανακτώμενα είδωλα, τα τελευταία θα μπορούσαν να είναι πραγματικά ή φανταστικά. Η διαδικασία του συσχετισμού των δύο μετ. κύματος V_1, V_2 πάνω στο επίπεδο x, y και η ανάπτυξη ενός συμβολογραφήματος, προϋποθέτει τη συμφωνία μεταξύ τους. Οπότε αυτό που απαιτείται είναι: α) Τα δύο επίπεδα μετ. κύματος να προέρχονται από την ίδια πηγή φωτός και β) Η διαφορά των οπτικών δρόμων τους να είναι μικρότερη του μήκους συμφωνίας της εκπέμπουσας πηγής. Σαν πηγές φωτός στην ολογραφία – λόγω των αυξημένων απαιτήσεων για σύμφωνο φως – χρησιμοποιούμε Laser (cw) (συνεχούς κύματος).

Στο (Σχ. 2.4) μπορούμε να δούμε την πειραματική διάταξη με την οποία επιτυγχάνουμε την ανάδειξη των δύο συμφώνων επιπέδων μετ. κύματος. Σ' αυτήν, η



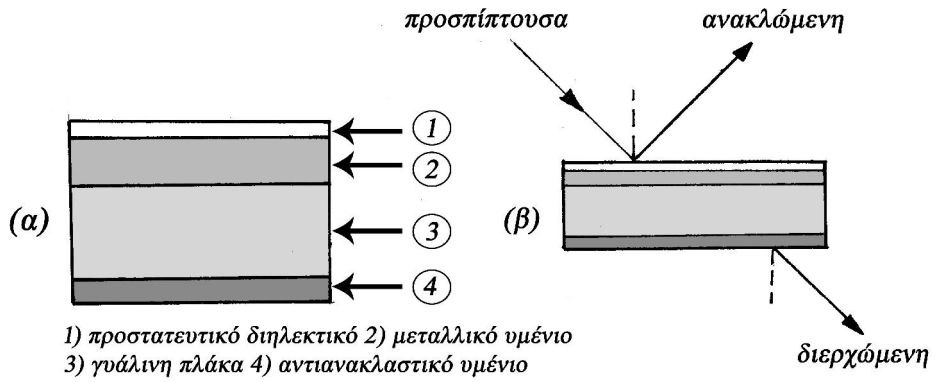
(Σχ. 2.4)

δέσμη του Laser (διαμέτρου $\simeq 2\text{mm}$) προσπίπτει σ' ένα διαχωριστή δέσμης (beam splitter) και διαχωρίζεται σε δύο, που διαδίδονται σε διαφορετική κατεύθυνση (μια ανακλώμενη και μια διαθλώμενη). Οι δύο αυτές δέσμες διευρύνονται σε επιθυμητό

Σημείωση

Η πλέον απλή μορφή ενός διαχωριστή δέσμης φαίνεται στο (Σχ. 2.5α). Συνίσταται από μια γυάλινη πλάκα στην οποία έχει εναποτεθεί με εξάχνωση ένα με-

ταλλικό ημιδιαφανές υμένιο. Το υμένιο ανακλά ένα ποσοστό του προσπίπτοντος φωτός (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (ΘΕΜΑ 2)) ανάλογα με το πάχος του.



(Σχ. 2.5)

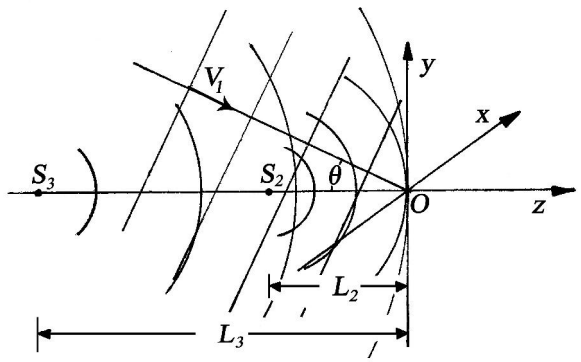
Το υπόλοιπο διαθλάται δια μέσου του γυαλιού. Για την προστασία του μεταλλικού υμενίου, έχει εναποτεθεί επάνω του μια λεπτή στρώση διηλεκτρικού διαφανούς υλικού. Επίσης προκειμένου να μην υφίστανται πολλαπλές ανακλάσεις στο εσωτερικό του διαχωριστή, η πίσω επιφάνεια της γυάλινης πλάκας έχει επιστρωθεί από ένα αντιανακλαστικό υμένιο.

μέγεθος διαμέτρου με την βοήθεια ενός ηθμού χώρου (spatial filter) (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική οπτική (§ 3.5.2.6): Εφαρμογή), που μετατρέπει τη δέσμη από επίπεδο μετ. κύματος σε σφαιρικό και τη βοήθεια ενός φακού ο οποίος παραλληλίζει το φως. Τα διευρυμένα αυτά επίπεδα μετ. κύματος κατόπιν ανάκλασης στα κάτοπτρα M_1, M_2 οδηγούνται σε επαλληλία στο επίπεδο x, y όπου και βρίσκεται το φωτοευπαθές καταγραφικό μέσο.

Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα δώσουμε με σύντομο τρόπο τη διαδικασία της καταγραφής και αναπαραγωγής ενός 'αντικειμένου' στο χώρο, που συνίσταται από δύο σημειακές πηγές (Σχ. 2.6). Οι πηγές αυτές S_2, S_3 βρίσκονται πάνω στον άξονα z και απέχουν από την αρχή O του σ.σ. x, y, z αποστάσεις L_2 και L_3. Εκπέμπουν κατά τα γνωστά σφαιρικά μετ. κύματος, τα οποία διαδιδόμενα προσπίπτουν στο επίπεδο x, y. Για να μπορέσουμε να καταγράψουμε στο επίπεδο αυτό (όπου βρίσκεται ένα φωτ. φιλμ) πληροφορίες που τις αφορούν και ν' αναπαράγουμε σ' ένα

επόμενο στάδιο τις δύο σημειακές πηγές που εκπέμπουν στο χώρο, τις φέρνουμε σ' επαλληλία μ' ένα επίπεδο μετ. κύματος αναφοράς που προσπίπτει στο x, y. Το κυματοδιάνυσμά του βρίσκεται στο επίπεδο y, z και σχηματίζει με τον άξονα z γωνία



(Σχ. 2.6)

θ. Η αναπαραγωγή του τελικού ειδώλου του αντικειμένου γίνεται μ' ένα παρόμοιο μετ. κύματος που προσπίπτει στη διαφάνεια που έχει δημιουργηθεί, με την ίδια γωνία θ. Υποτίθεται ότι τα συμμετέχοντα στη διαδικασία της συμβολής μετ. κύματος, είναι μεταξύ τους σύμφωνα και η πράξη συντελείται σε δύο φάσεις.

1η φάση: ***Καταγραφή των πληροφοριών που αφορούν το αντικείμενο***

Η κατανομή του επιπέδου μετ. κύματος αναφοράς (μοναδιαίου πλάτους) στο επίπεδο x, y θα δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση: $V_1 = e^{ik\sin\theta y} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y}$. Των δε δύο σφαιρικών αποκλινόντων μετ. κύματος (βλ. Κεφ. 1: Κύματα (Άσκ. 10: Λυμένη)) (και αυτών μοναδιαίου πλάτους), από τις σχέσεις: $V_2 = e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}}$ και $V_3 = e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}}$. Η επαλληλία αυτών των μετ. κύματος $\left(V_1, V_2, V_3\right)$ στο επίπεδο x, y η συμβολή τους και η καταγραφή τους στο φωτ. φιλμ θα μας δώσει μετά την διαδικασία της εμφάνισης μια διαφάνεια, της οποίας η συναρτησιακή μορφή θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} t(x,y) &= a + b\left|\Delta V\right|^2 = a + b\left|V_1 + V_2 + V_3\right|^2 = a + b\left(V_1 + V_2 + V_3\right)\left(V_1^* + V_2^* + V_3^*\right) = \\ &= a + bV_1V_1^* + bV_1V_2^* + bV_1V_3^* + bV_2V_1^* + bV_2V_2^* + bV_2V_3^* + bV_3V_1^* + bV_3V_2^* + bV_3V_3^* \end{aligned}\right\} \quad (2.11)$$

Και μετά την αντικατάσταση στη (σχ. 2.11) των V_1, V_2, V_3 με τις αναλυτικές τους μορφές:

$$\left.\begin{aligned} t(x,y) = \left\{a + b|V_1|^2 + b|V_2|^2 + b|V_3|^2\right\} + be^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} + be^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + \\ + be^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + be^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

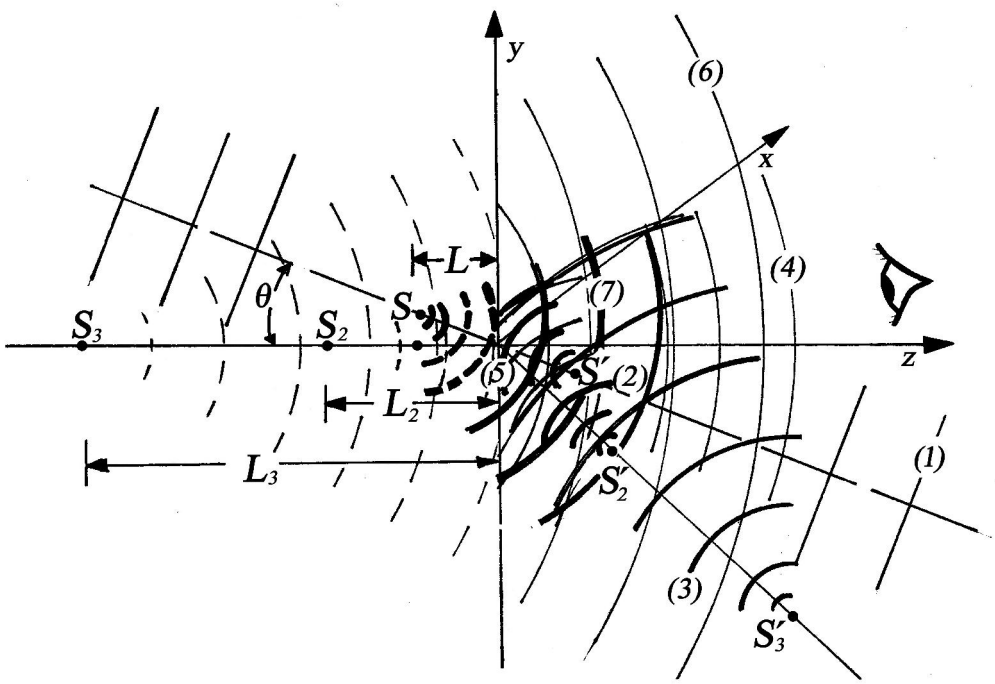
2η φάση: ***Αναπαραγωγή του μετ. κύματος του αντικειμένου***

Κατά τη διαδικασία της αναπαραγωγής, τοποθετούμε την προκύπτουσα διαφάνεια στην ίδια ακριβώς θέση και την φωτίζουμε με το ίδιο επίπεδο μετ. κύματος με το οποίο έγινε η καταγραφή των πληροφοριών (αυτό της αναφοράς). Τότε τα μετ. κύματος που θα προκύψουν ακριβώς μετά τη διαφάνεια, θα δίνονται από τη σχέση: $V(x,y) = t(x,y)V_1(x,y)$. Οπότε:

$$\left.\begin{aligned} V(x,y) = a'e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} + be^{i\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} + be^{i\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} + \\ + be^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + be^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta y} e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Όπου: $a' = a + b|V_1|^2 + b|V_2|^2 + b|V_3|^2$ και $L = \dfrac{L_2 L_3}{L_2 - L_3} > 0$. Κατά σειρά (Σχ. 2.7): Ο πρώτος όρος (1) συνιστά ένα επίπεδο μετ. κύματος το οποίο διαδίδεται στη διεύθυνση του προσπίπτοντος. Πρόκειται για το μη περιθλώμενο φως και είναι εξασθενημένο κατά τον παράγοντα a'. Ο δεύτερος όρος (2) αντιπροσωπεύει ένα σφαιρικό συγκλίνον μετ. κύματος στη θέση S_2' $\left(OS_2' = OS_2\right)$ μετά τη διαφάνεια, στραμμένο κατά γωνία $\arcsin(2\sin\theta)$. Ο τρίτος όρος (3) παρομοίως παριστάνει ένα σφαιρικό συγκλίνον μετ. κύματος στη θέση S_3' $\left(OS_3' = OS_3\right)$ μετά τη διαφάνεια και αυτό διαδιδόμενο με κλίση ως προς τον άξονα Oz κατά γωνία $\arcsin(2\sin\theta)$. Οι όροι δεύτερος και τρίτος συνιστούν πραγματικά είδωλα (σημειακά) των πηγών S_2, S_3 τα οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε πάνω σ' ένα πέτασμα το οποίο μετακινούμε μετά τη διαφάνεια. Όμως – όπως αναφέραμε και στο πρώτο παράδειγμα – αν η γωνία θ είναι αρκετά μεγάλη, τότε αυτά τα μετ. κύματος διαδίδονται σχεδόν εφαπτομενικά του επιπέδου x, y ή εξαλείφονται εντελώς (δηλ. δεν αναδύονται από τη διαφάνεια). Ο τέταρτος όρος (4) παριστάνει ένα σφαιρικό αποκλίνον μετ. κύματος, το οποίο 'φαίνεται' να διαδίδεται από το σημείο στο οποίο βρισκόταν η σημειακή πηγή S_2. Το γεγονός αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε παρατηρώντας μέσα από τη διαφάνεια. Πρόκειται για το φανταστικό είδωλο της πηγής S_2. Ο πέμπτος όρος (5) συνιστά ένα

σφαιρικό συγκλίνον μετ. κύματος που διαδίδεται κατά γωνία θ μπρος από τη διαφάνεια (δηλ. κατά τη διεύθυνση του προσπίπτοντος επιπέδου μετ. κύματος αναπαραγωγής). Το σημείο σύγκλισης S' απέχει από την αρχή του σ.σ. O κατά $OS' = L' = \left|\frac{L_2 L_3}{L_2 - L_3}\right|$. Ο έκτος όρος (6) παριστάνει ένα σφαιρικό αποκλίνον μετ. κύματος το οποίο 'φαίνεται' να διαδίδεται από το σημείο στο οποίο βρισκόταν η σημειακή πηγή S_3. Το γεγονός αυτό επίσης μπορούμε να το αντιληφθούμε παρατηρώντας



(Σχ. 2.7)

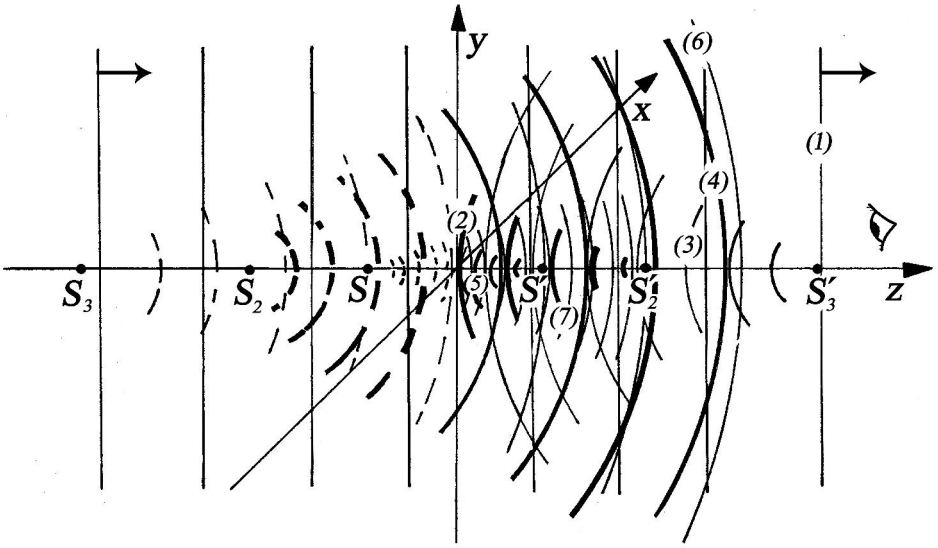
μέσα από τη διαφάνεια. Πρόκειται για το φανταστικό είδωλο της πηγής S_3. Τέλος ο έβδομος όρος είναι ένα σφαιρικό αποκλίνον μετ. κύματος που διαδίδεται κατά γωνία θ ως προς τον οπτικό άξονα Oz. 'Φαίνεται' να προέρχεται από το σημείο S όπου $OS = L = \left|\frac{L_2 L_3}{L_2 - L_3}\right|$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει το εξής συμπέρασμα: Αν η γωνία θ με την οποία προσπίπτει στη διαφάνεια το μετ. κύματος αναπαραγωγής είναι αρκετά μεγάλη, τότε μπορούμε να πούμε ότι έχουμε επιτύχει την αναπαραγωγή στο χώρο των δύο μετ. κύματος που προερχόταν από τις δύο σημειακές πηγές S_2, S_3. Πράγματι, τα υπόλοιπα δημιουργούμενα μετ. κύματος, είτε εξαφανίζονται είτε διαδίδονται με μεγάλη κλίση σε σχέση με τον οπτικό άξονα Oz μετά τη διαφάνεια. Οπότε βλέποντας μετά τη διαφάνεια (δια μέσου της) (Σχ. 2.7) και εστιάζοντας

με τα μάτια μας θα δούμε τα δύο σημειακά είδωλα S_2, S_3 στις ίδιες ακριβώς θέσεις από όπου εξέπεμπαν οι σημειακές πηγές πριν την καταγραφή τους.

Παρεμπιπτόντως, μπορούμε ν' αναφέρουμε ότι αν κατά τη φάση της αναπαραγωγής χρησιμοποιήσουμε επίπεδο μετ. κύματος το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του άξονα Oz (δηλ. για $\theta = 0^0$), τότε το διερχόμενο πεδίο (δεδομένου ότι $V_1(x,y) = 1$) θα έχει τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} V(x,y) = a' + be^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} + be^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}} + \\ + be^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_3}} + be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Για την περίπτωση αυτή, το βασικό χαρακτηριστικό είναι – όπως φαίνεται στο (Σχ. 2.8) – ότι κανένα από τα σφαιρικά μετ. κύματος (συγκλίνοντα και αποκλίνοντα)



(Σχ. 2.8)

δεν μπορεί να εξαλειφθεί ή να εκτραπεί κατά μια μεγάλη γωνία σε σχέση με τον οπτικό άξονα Oz. Το ίδιο ισχύει και για το μη περιθλώμενο επίπεδο μετ. κύματος. Άρα όλα τα είδωλα εντοπίζονται πάνω στον οπτικό άξονα. Από αυτά: α) Τρία (τα S, S_2, S_3) είναι φανταστικά (σφαιρικά αποκλίνοντα) και τα οποία τα 'βλέπουμε' πριν από τη διαφάνεια και δια μέσου της. β) Τρία (τα S', S'_2, S'_3) είναι πραγματικά (σφαιρικά συγκλίνοντα) και τα οποία μπορούμε να εντοπίσουμε (μετακινώντας ένα πέτασμα) μετά τη διαφάνεια. Τελικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο συγκεκριμένος τρόπος αναπαραγωγής των επιθυμητών ειδώλων δεν συνίσταται. Δεδομένου

ότι στον ίδιο χώρο διαδίδονται και πλείστα όσα άλλα μέτωπα κύματος, τα οποία θεωρούμε οπτικά παράσιτα.

*Τα φωτ. φιλμ σαν φορέας καταγραφής και επεξεργασίας οπτικών πληροφοριών**

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι υπάρχουν πολλά υλικά στα οποία είναι δυνατόν να καταχωρήσουμε πληροφορίες με τη μορφή συμβολογραφημάτων, μέσω της συσχέτισης των πλατών και των φάσεων μετ. κύματος που προέρχονται από διάφορα αντικείμενα, με τη βοήθεια ενός μετ. κύματος αναφοράς. Ένα τέτοιο γεγονός έχει περιγραφεί στα δύο τελευταία παραδείγματα. Μια σημαντική κατηγορία αυτών των υλικών είναι τα φωτογραφικά φιλμ, των οποίων η φωτοευπαθής ουσία συνίσταται από συσσωματώματα (κόκκους) Βρωμιούχου Αργύρου (AgBr) και τα οποία έπαιξαν (ακόμη και σήμερα) σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της ολογραφίας. Δηλ. στη δημιουργία διαφανειών που συνιστούν τους φορείς των οπτικών πληροφοριών. Από τις διαφάνειες αυτές με κατάλληλο τρόπο (ουσιαστικά φωτίζοντάς τες με τα μετ. κύματος αναπαραγωγής) είναι δυνατόν ν' αναπαραχθούν τα μετ. κύματος του ενδιαφέροντός μας.

Στην πλέον απλή τους μορφή τα φωτ. φιλμ αποτελούνται από ένα διαφανές επίπεδο υπόβαθρο από ζελατίνη ή γυαλί. Πάνω τους επιστρώνεται ένα υμένιο ορισμένου πάχους από σελουλόζη, η οποία στο εσωτερικό της περιλαμβάνει σε ορισμένη πυκνότητα τα συσσωματώματα (κόκκους) του AgBr. Αν τώρα στο φιλμ προσπέσει μια κατανομή φωτός, τότε ορισμένοι κόκκοι του AgBr (από περιοχή σε περιοχή του φιλμ) απορροφούν τοπικά φωτόνια. Στα σημεία αυτά έχουμε αναγωγή του AgBr σε Ag. Κατόπιν μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται ***'εμφάνιση του φιλμ'*** με ειδικά χημικά υγρά, όσοι από τους κόκκους του φιλμ έχουν αναχθεί τοπικά σε Ag, ανάγονται ολοκληρωτικά. Σε μια δεύτερη φάση επεξεργασίας του φιλμ που ονομάζεται ***'στερέωση'***, με άλλα χημικά υγρά, απομακρύνονται οι εναπομείναντες κόκκοι του AgBr, αφήνοντας στο σώμα της σελουλόζης μόνο τους κόκκους του Ag, οι οποίοι βέβαια είναι αδιαφανείς. Κατόπιν το φιλμ ξεπλένεται και στεγνώνει με αποτέλεσμα να προκύψει μια διαφάνεια με μια συγκεκριμένη κατανομή της αμαύρωσης από περιοχή σε περιοχή, λόγω της συγκεκριμένης κατανομής των κόκκων του Ag.

Η διαφάνεια αυτή, χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση $\tau(x,y)$ που ονομάζεται ***συνάρτηση διαφάνειας έντασης (intensity transmittance function)*** και η οποία δίνεται από τη σχέση:

---

* J.W.GOODMAN: 'Introduction to Fourier optics" McGRAW-HILL CO. New York (1968) (Ch. 7.2).

$$\tau(x,y) = \text{μέση τοπική τιμή}\left\{\frac{I_{\text{διερχ.}}(x,y)}{I_{\text{προσπ.}}(x,y)}\right\} \tag{2.15}$$

Όπου $I_{\text{προσπ.}}(x,y)$ η προσπίπτουσα κατανομή της έντασης του φωτός στη μια της πλευρά και $I_{\text{διερχ.}}(x,y)$ η διερχόμενη κατανομή από την άλλη. Είναι προφανές βέβαια ότι η $I_{\text{διερχ.}}(x,y)$ θα εξαρτάται από την κατανομή $\mathcal{J}(x,y)$ της προσπίπτουσας έντασης του φωτός στο φιλμ πριν την εμφάνισή του και η οποία βέβαια είναι η αιτία της δημιουργίας της κατανομής της αμαύρωσης της.

Έστω τώρα ότι η ένταση του φωτός $\mathcal{J}$ η προσπίπτουσα στο φιλμ πριν την εμφάνισή του (όταν δηλ. ακόμη είναι φωτοευπαθές), είναι σταθερή σ' όλο του το εύρος. Και το εκθέτουμε με μια τιμή έντασης. Τότε αναδεικνύεται ένα μέγεθος E που ονομάζεται ***έκθεση (exposure)*** και δίνεται από τη σχέση:

$$E = \mathcal{J} \cdot t \tag{2.16}$$

όπου t ο χρόνος που διαρκεί η έκθεση και η μέτρησή της γίνεται σε μονάδες $\left[\mathrm{J/m^2}\right]$. Επίσης ένα άλλο μέγεθος που χαρακτηρίζει το φωτ. φιλμ μετά την εμφάνισή του, είναι η λεγόμενη ***αμαύρωση(πυκνότητα) (density)*** D, η οποία δίνεται από τη σχέση:

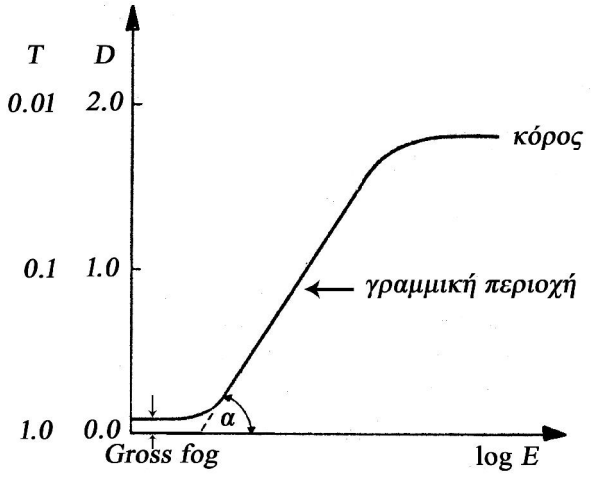
$$D = \log\frac{1}{\tau} \tag{2.17}$$

Η τελευταία από φυσική άποψη παριστάνει το ποσοστό του αναχθέντος Ag ανά μονάδα επιφάνειας στο φωτ. φιλμ. Η αμαύρωση D συναρτήσει του δεκαδικού λογαρίθμου της έκθεσης E δίνεται από την καμπύλη που εμφανίζεται στο (Σχ. 2.9) και η οποία ονομάζεται καμπύλη των Hurter-Driffield (H-D). Σ' αυτήν διακρίνουμε μια γραμμική περιοχή η οποία χαρακτηρίζεται από την κλίση της a, με το μέγεθος γ όπου $\gamma = \tan a$. Το κάθε (ασπρόμαυρο για την περίπτωσή μας) φιλμ έχει μια συγκεκριμένη τιμή γ.

Σημείωση

Στην καμπύλη H-D του (Σχ. 2.9), εκτός της γραμμικής περιοχής, διακρίνουμε την περιοχή του 'κόρου' η οποία χαρακτηρίζεται από μια σχεδόν σταθερή τιμή της αμαύρωσης D που επιτυγχάνεται ανεξάρτητα πλέον από την τιμή της έκθεσης E στο φιλμ. Η περιοχή του Gross fog σημαίνει ότι η εμφάνιση του φιλμ χωρίς καν

να εκτεθεί ή αν η τιμή τη έκθεσής του είναι πολύ μικρή, μας δίνει μια μικρή τιμή αμαύρωσης. Επίσης όπως βλέπουμε στο ίδιο σχήμα, παράλληλα με τον άξονα των



(Σχ. 2.9)

D αντιπαρατίθεται ο άξονας των T. Όπου με το T παριστάνουμε τώρα το μέγεθος της ***διαπερατότητας (transmission)*** και η οποία ορίζεται από τη σχέση: $T = I_{\text{διερχ.}} / I_{\text{προσπ.}}$ (αγνοώντας την ανάκλαση κατά την πρόσπτωση), για την περίπτωση που η διαφάνεια (ή μια οποιαδήποτε διαφάνεια) παρουσιάζει ομοιογενή αμαύρωση. Τότε η σχέση μεταξύ των D, T θα δίνεται από τη σχέση: $D = \log(1/T)$.

Τα φωτ. φιλμ βέβαια και κατ' ακολουθία οι προκύπτουσες από αυτά διαφάνειες σαν μέσα καταγραφής οπτικών πληροφοριών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διαδικασίες που αφορούν ασύμφωνο ή σύμφωνο φωτισμό.

Συμπεριφορά του φιλμ σ' ένα ασύμφωνο οπτικό σύστημα

Η χρήση π.χ. του φιλμ για καταγραφή οπτικών πληροφοριών με φυσικό φως και ο φωτισμός του μετά την εμφάνισή του και πάλι με φυσικό φως ανάγεται στην πρώτη περίπτωση. Τότε η σχέση μεταξύ της έντασης $\mathcal{J}(x,y)$ καταγραφής κατά την απεικόνιση ενός αντικειμένου στο φιλμ και της έντασης $I_{\text{διερχ.}}(x,y)$ της διερχόμενης από αυτό αφού έχει εμφανιστεί και φωτιστεί με την $I_{\text{προσπ.}}(x,y)$ δεν είναι γραμμική. Πράγματι εργαζόμενοι στη γραμμική περιοχή της καμπύλης H-D θα έχουμε τη σχέση: $D = \gamma_n \log E - D_0$. Και αν σ' αυτήν αντικαταστήσουμε την D από τη (σχ. 2.17) τότε βρίσκουμε:

$$\frac{I_{\text{διερχ.}}(x,y)}{I_{\text{προσπ.}}(x,y)} = \tau_n(x,y) = k_n \mathcal{J}(x,y)^{-\gamma_n} \tag{2.18}$$

Όπου k_n μια θετική σταθερή. Που σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ των $\mathcal{J}(x,y)$ και $I_{\text{διερχ.}}(x,y)$ δεν είναι γραμμική. Η γραμμικότητα βέβαια μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας περιπλοκότερης διαδικασίας η οποία εδώ δεν μας ενδιαφέρει.

Συμπεριφορά του φιλμ σ' ένα σύμφωνο οπτικό σύστημα

Όμως στην ολογραφία – όπως συστηματικά αναφέραμε – η καταγραφή και η αναπαραγωγή πληροφοριών από τις διαφάνειες των φιλμ, γίνονται με τη χρήση συμφώνου φωτός. Που σημαίνει ότι μας ενδιαφέρουν πρωτίστως οι κατανομές των πλατών (των ηλ. πεδίων). Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούσαμε τη ***συνάρτηση διαφάνειας πλάτους (amplitude transmittance function)*** $t(x,y)$ η οποία δινόταν από τη σχέση:

$$t(x,y) = \frac{V_{\text{διερχ.}}(x,y)}{V_{\text{προσπ.}}(x,y)} \tag{2.19}$$

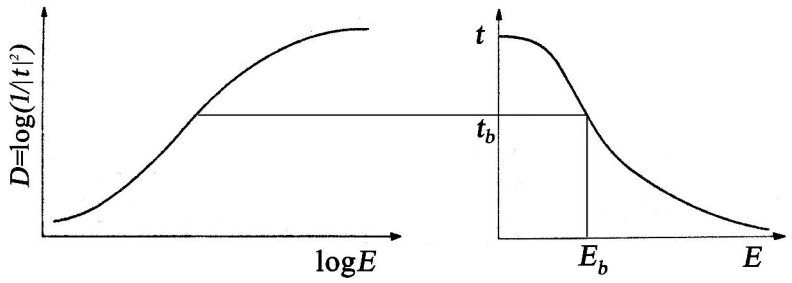
Δεδομένου όμως ότι στα φιλμ (όπως άλλωστε και σε κάθε άλλο κοινό ανιχνευτή) καταγράφεται η ένταση του φωτός (που διαμεσολαβείτε από τη συνάρτηση $\tau(x,y)$), είναι αναγκαίο να βρούμε τη σχέση που συνδέει τη συνάρτηση $t(x,y)$ με αυτήν της $\tau(x,y)$. Ή μάλλον πως προκύπτει η μια από την άλλη. Και είναι σχεδόν αυτονόητο – λόγω του ότι το πλάτος V της ηλ. διαταραχής και η ένταση του φωτός I συνδέονται με τη γνωστή σχέση: $I \sim |V|^2$ – θα ισχύει:

$$t(x,y) = \sqrt[+]{\tau(x,y)}\, e^{i\phi(x,y)} \tag{2.20}$$

Όπου $\phi(x,y)$ μια συνάρτηση που χαρακτηρίζει τις ανεπιθύμητες μεταβολές της φάσης στην επιφάνεια του φιλμ λόγω π.χ. των μεταβολών στο πάχος τους από σημείο σε σημείο ακόμη και από άλλους παράγοντες. Για τις μεταβολές όμως αυτού του είδους έχουν αναπτυχθεί μέθοδες εξάλειψής τους. Οπότε τελικά η (σχ. 2.20) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$t(x,y) = \sqrt[+]{\tau(x,y)} \tag{2.21}$$

Όμως για μια τιμή του E αντιστοιχεί μια τιμή του $\log E$. Επίσης για την τιμή αυτή, από την καμπύλη H-D αντιστοιχεί μια τιμή του D. Και κατ' ακολουθία μέσω της (σχ. 2.17) μια τιμή της τ. Τέλος με βάση την τιμή αυτή της τ από τη (σχ. 2.21) βρίσκουμε μια τιμή για την t. Που σημαίνει ότι η καμπύλη $(D-\log E)$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια καμπύλη $(t-E)$. Στο (Σχ. 2.10) μπορούμε να δούμε αυτή τη μετατροπή. Και αυτό που παρατηρούμε, είναι ότι όπως στην καμπύλη των H-D



(Σχ. 2.10)

υφίσταται γραμμική περιοχή, το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για την καμπύλη $(t-E)$. Στην περιοχή αυτή άλλωστε θα εστιάζεται το ενδιαφέρον μας, για το λόγο που θα εξηγήσουμε αμέσως μετά.

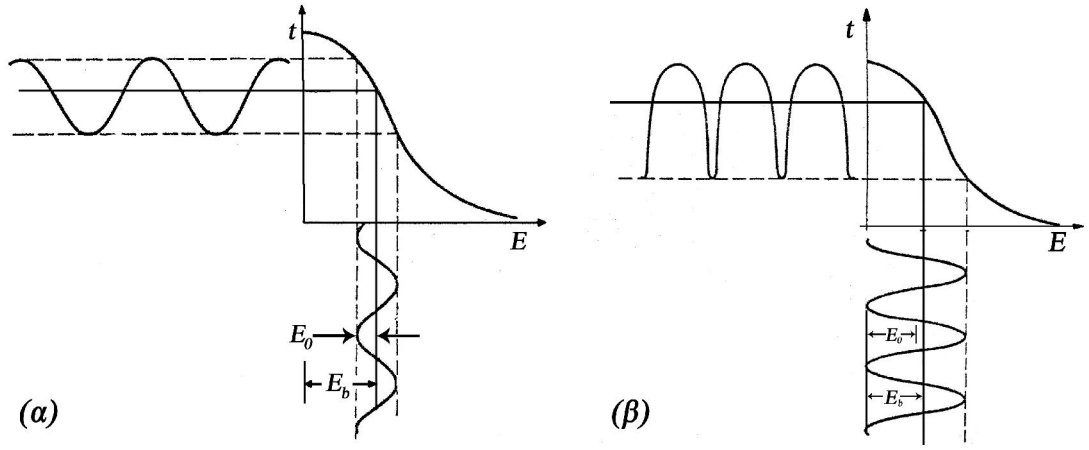
Πράγματι η επιδίωξή μας αυτή, αφορά το γεγονός ότι το φιλμ θα πρέπει να δρα, σύμφωνα με το τετράγωνο του μιγαδικού πλάτους κατά τη διάρκεια της καταγραφής των πληροφοριών. Και αυτό μπορεί να επιτευχθεί αποκλειστικά και μόνο, όταν οι μεταβολές ΔE της έκθεσης E στο φιλμ, γίνονται μέσα στα όρια της γραμμικής περιοχής της καμπύλης $(t-E)$. Τότε πράγματι από την εξίσωση του γραμμικού τμήματος αυτής της καμπύλης βρίσκουμε ότι: $t=t_b+\beta''(E-E_b)$. Και επειδή: $E=\mathcal{J}\cdot t \Rightarrow t=t_b+\beta'(\mathcal{J}-\mathcal{J}_b)$. Όπου $\mathcal{J}$ η ένταση του φωτός κατά τη διαδικασία της καταγραφής στο φιλμ. Και επειδή $\mathcal{J}\sim|V|^2 \Rightarrow \Delta\mathcal{J}=\mathcal{J}-\mathcal{J}_b\sim|\Delta V|^2$. Και τελικά:

$$t=t_b+\beta|\Delta V|^2 \tag{2.22}$$

Όπου t_b,β σταθερές και $\Delta V=V_1+V_2+V_3+....$ Από πρακτική άποψη για κάθε φωτ. φιλμ, μας δίνεται μια ***τυπική τιμή ευαισθησίας (nominal sensitivity)*** (η τιμή της E_b) προκειμένου να μπορούμε να εκθέτουμε το φιλμ στη γραμμική του περιοχή. Πράγματι εφόσον μας είναι γνωστή τιμή της E_b, μετρώντας την ένταση του φωτός με ένα ραδιόμετρο, προσδιορίζουμε (με βάση τη σχέση $E=\mathcal{J}\cdot t$) κατά μέσο όρο

τον επιθυμητό χρόνο έκθεσης. Αυτός ακριβώς είναι και ο λόγος που χρησιμοποιούμε τη (σχ. 2.22) για τον αναλυτικό προσδιορισμό της συνάρτησης διαφάνειας πλάτους, κατά τη διαδικασία της καταγραφής και κατά προέκταση για τον προσδιορισμό των αναπαραγόμενων μετ. κύματος.

Ένα παράδειγμα της ανάγκης για γραμμική έκθεση του φωτ. φιλμ μπορούμε να δούμε στο (Σχ. 2.11α). Στην περίπτωση αυτή, η συναρτησιακή μορφή της έκθεσης E στο φιλμ δίνεται από τη σχέση: $E = E_b + E_0 \cos 2\pi f_y y$ όπου μεταξύ του πλά-



(Σχ. 2.11)

τους E_0 και της έκθεσης πόλωσης E_b υφίσταται η σχέση: $E_0 \ll E_b$. Που σημαίνει ότι οι διαταραχές της έκθεσης, βρίσκονται καθαρά μέσα στα όρια της γραμμικής περιοχής του φιλμ. Σαν αποτέλεσμα, η συνάρτηση διαφάνειας θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

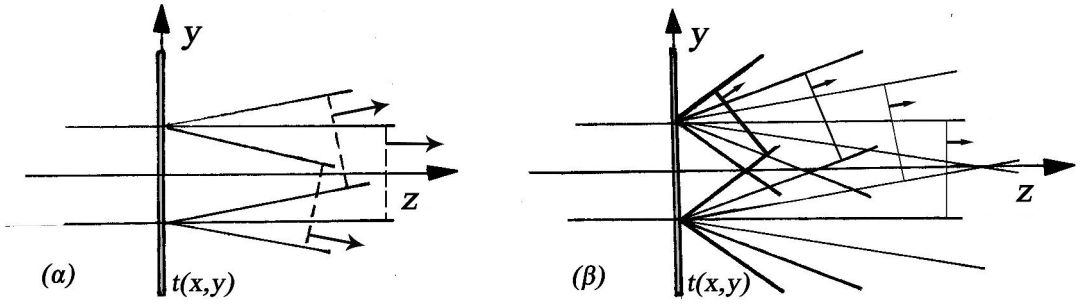
$$t(x, y) = a + b \cos 2\pi f_y y \tag{2.23}$$

Τότε κατά τα γνωστά (Σχ. 2.12α), η πρόσπτωση ενός επιπέδου μετ. κύματος κάθετα σε μια τέτοια διαφάνεια, θα έχει σαν συνέπεια περιθλώμενο να δώσει (βλ. Άσκ. 12: Λυμένη) τρία επίπεδα μετ. κύματος: Ένα κατά τη διεύθυνση του προσπίπτοντος στη διαφάνεια (το μη περιθλώμενο φως) και δύο συμμετρικών ως προς τον οπτικό άξονα Oz με μια ορισμένη γωνία (τα πρώτης τάξης περιθλώμενα). Όταν όμως οι διαταραχές της έκθεσης – κατά το ίδιο πείραμα της συμβολής των δύο επιπέδων μετ. κύματος – εκτείνονται και στη μη γραμμική περιοχή της καμπύλης $(t - E)$ του φωτ. φιλμ, όπως μπορούμε να δούμε στο (Σχ. 2.11β), τότε και πάλι θα έχουμε: $E = E_b + E_0 \cos 2\pi f_y y$, αλλά στην προκειμένη περίπτωση: $E_0 \simeq E_b$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες και μετά την εμφάνιση του φιλμ, η αμαύρωσή του θ' αντιστοιχεί σε

μια περιοδική αλλά όχι συνημιτονική συνάρτηση του y. Που σημαίνει ότι η συνάρτηση διαφάνειας $t(x,y)$ μπορεί κατά Fourier ν' αναλυθεί ως εξής:

$$t(x,y) = a + b_1 \cos 2\pi f_y y + b \cos 2\pi (2f_y) y + b_3 \cos 2\pi (3f_y) y + \cdots \qquad (2.24)$$

Που σημαίνει ότι κατά την πρόσπτωση σ' αυτή τη διαφάνεια ενός επιπέδου μετ.



(Σχ. 2.12)

κύματος, οι τάξεις περίθλασης που θ' αναδυθούν από αυτήν θα είναι περισσότερες της μιας σε γωνίες $\theta_2 = \arcsin \lambda (2f_y)$, $\theta_3 = \arcsin \lambda (3f_y)$ κλπ. όπως φαίνεται στο (Σχ. 2.12β). Όμως οι τάξεις οι επιπλέον της πρώτης, θεωρούνται ανεπιθύμητες δηλ. συνιστούν οπτικό θόρυβο αν αντικειμενικός μας σκοπός εξ αρχής θα ήταν ν' αναπαραχθεί μόνο η πρώτη τάξη. Και συμπερασματικά το επιδιωκόμενο επιτυγχάνεται μόνο αν εκθέσουμε το φιλμ στη γραμμική του περιοχή.

Ιδιότητες των ολογραφικών φιλμ

Τα φιλμ τα οποία χρησιμοποιούνται στην ολογραφία – τουλάχιστον αυτά που η φωτοευαίσθητη ουσία τους είναι ο Βρωμιούχος Άργυρος AgBr – έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, στις οποίες θ' αναφερθούμε σε συντομία*.

α) Διακριτική ικανότητα

Κυρίως, για την λεγόμενη ολογραφία εκτός άξονα, η δέσμη της αναφοράς και του αντικειμένου (προκειμένου να εγγραφούν οι πληροφορίες πλάτους και φάσης), σχηματίζουν γενικά μεγάλες γωνίες (π.χ. $30^0 - 60^0$). Κάτω από αυτές τις συνθήκες η περίοδες των σχηματιζόμενων κροσσών συμβολής είναι πάρα πολύ μικρές.

* C.M.VEST: 'Holographic Interferometry' John Wiley & Sons, New York (1979) (Ch. 1).

Π.χ. είχαμε αποδείξει ότι αν δύο επίπεδα μετ. κύματος προσπέσουν σε μια επίπεδη επιφάνεια με γωνία $a/2$ η κάθε μια σε σχέση με την κάθετη σ' αυτήν, τότε η περίοδός τους θα δίνεται από τη (σχ. 2.4): $T = \lambda/\left[2\sin\left(a/2\right)\right]$. Επομένως για $a = 60^0$ και $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ θα έχουμε: $T \simeq 0.6\times10^{-3}\,\text{mm}$. Οπότε γίνεται φανερό ότι τα ολογραφικά σε σχέση με τα κοινά φωτ. φιλμ είναι ειδικής σύνθεσης, τουλάχιστον όσον αφορά το μέγεθος των κόκκων του AgBr , το οποίο θα πρέπει να είναι πάρα πολύ μικρό.

β) Διαμόρφωση, περιθλαστική ικανότητα και διαμορφώνουσα συνάρτηση μεταφοράς

Στην ολογραφία εκτός άξονα (όπου μετ. κύματος αναφοράς και αντικειμένου σχηματίζουν γωνία), η έκθεση των σε επαλληλία ζευγών διαταραχών είναι βασικά χωρικά περιοδική. Δηλ.

$$E = E_b + E_0 \cos 2\pi f_y y \tag{2.25}$$

Όπου κατά προσέγγιση η έκθεση πόλωσης E_b, σχετίζεται με την ένταση του φωτός της δέσμης αναφοράς την προσπίπτουσα στο φιλμ κατά τη διαδικασία της καταγραφής $\left(E_b \sim I_R\right)$ και η έκθεση που σχετίζεται με την ένταση του φωτός των δεσμών του αντικειμένου, αφορά τις εντάσεις των πλατών των διαταραχών των δεσμών του αντικειμένου $\left(E_0 \sim I_O\right)$. Οπότε κατά προσέγγιση:

$$\mathcal{V} = \frac{E_0}{E_b} \simeq \frac{I_O}{I_R} \tag{2.26}$$

Όπου $\mathcal{V}$ το μέγεθος της ***διαμόρφωσης (modulation)*** (φωτοαντίθεσης) των κροσσών συμβολής. Το οποίο από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι είναι αντιστρόφως ανάλογο του λόγου I_R/I_O, που αποτελεί σημαντική παράμετρο για τη καταγραφή του συμβολογραφήματος (ολογράμματος).

Μετά την έκθεση του φιλμ και την εμφάνισή του, η διαφάνεια φωτίζεται από το μετ. κύματος αναπαραγωγής, που στις πλείστες των περιπτώσεων είναι το μετ. κύματος της αναφοράς και του οποίου την ένταση συμβολίζουμε εδώ με I'. Τότε αν με I είναι η μέση τιμή της έντασης του αναπαραγόμενου μετ. κύματος, ο λόγος:

$$\eta = I/I' \tag{2.27}$$

ονομάζεται ***περιθλαστική ικανότητα (diffraction efficiency)*** της διαφάνειας που ούτως ή άλλως συνιστά πλέον ένα περιθλόν στοιχείο. Μέγιστη βέβαια περιθλαστική ικανότητα θα έχουμε, όταν για το φάσμα των εγγεγραμμένων χωρικών συχνοτήτων στο ολόγραμμα θα ισχύει: $\mathcal{V} \simeq 1$. Δηλ. η φωτοαντίθεση των κροσσών συμβολής είναι μονάδα $(0 \le \mathcal{V} \le 1)$, που κατά τα γνωστά (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (§ 6.4.1) (Σχ. 6.4.1.8)) θα έχουμε μηδενικά ελάχιστα των κροσσών συμβολής. Στην προκειμένη όμως περίπτωση (της μέγιστης περιθλαστικής ικανότητας) από τη (σχ. 2.26) θα έχουμε: $E_0 \simeq E_b$. Το γεγονός όμως αυτό οδηγεί (Σχ. 2.11β) σε μη γραμμική έκθεση του φωτ. φιλμ, με συνέπεια – όπως ήδη αναφέραμε – στην ανάδειξη παρασίτων μετ. κύματος, τα οποία με τη σειρά τους προκαλούν οπτικούς θορύβους όσον αφορά στη δυνατότητα απομόνωσης του μετ. κύματος που θέλουμε τελικά ν' αναπαραχθεί. Και προκειμένου να υφίσταται μια ικανοποιητική γραμμικότητα, θα πρέπει να μεταβάλλουμε το λόγο $I_R/I_O = E_b/E_0$. Δηλ. αν $I_R > I_O$ τότε $\mathcal{V} < 1$ οπότε $E_0 < E_b$. Δηλ. θα βρεθούμε μέσα στη γραμμική περιοχή του φιλμ. Ο λόγος αυτός στην πράξη συνήθως είναι $I_R/I_O : 3/1 - 10/1$.

Μια ανεπιθύμητη δράση επίσης που προκαλείται στα φιλμ, είναι κατά τη διαδικασία της έκθεσής του στις δέσμες αναφοράς και αντικειμένου. Και οφείλεται στο γεγονός της σκέδασης της ακτινοβολίας στο εσωτερικό του κοκκώδους δομής φιλμ. Δηλ. της ύπαρξής των συσσωματωμάτων των φωτοευπαθών κρυσταλλιτών του AgBr. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την επιπλέον – παράσιτη όμως – έκθεση των κόκκων, με αποτέλεσμα τη μη ορθή εγγραφή των περιοδικοτήτων των κροσσών συμβολής και πολύ περισσότερο αυτών που έχουν πολύ μικρή περίοδο. Άρα η σωστή εγγραφή των κροσσών εξαρτάται από τη χωρική τους περίοδο. Και ποσοτικά περιγράφεται από τη ***διαμορφώνουσα συνάρτηση μεταφοράς (modulation transfer function)*** (MTF). Πρόκειται στην πραγματικότητα για μιγαδικό μέγεθος και δίνεται από τη σχέση:

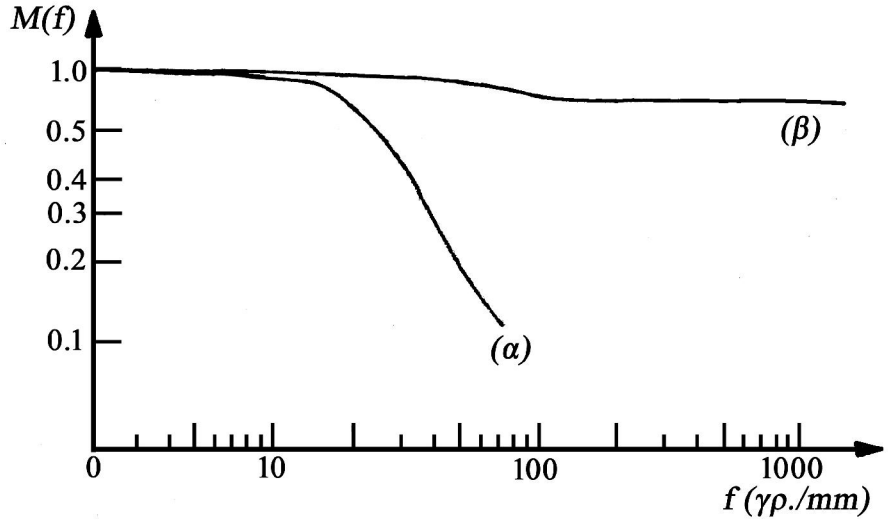
$$\widetilde{M}(f) = M(f)e^{-i\Omega(f)} \tag{2.28}$$

Οπότε ένα πραγματικό φιλμ, το οποίο είχε εκτεθεί με βάση τη (σχ. 2.25), μετά την εμφάνισή του θ' αποκρίνεται σαν να είχε εκτεθεί όχι από αυτήν αλλά από την ενεργό της που δίνεται από τη σχέση:

$$E_{eff} = E_b + M(f)E_0 \cos\left[2\pi f_y y - \Omega(f)\right] \tag{2.29}$$

Και με το δεδομένο ότι τα ολογραφικά φιλμ απαιτείται να είναι υψηλής διακριτικής ικανότητας, για την (MTF) θα πρέπει κατά το δυνατόν να είναι $M(f) \simeq 1$ δηλ. ανε-

ξάρτητη της χωρικής συχνότητας f. Όπως επίσης και $\Omega(f) \simeq 0$. Το τελευταίο επιτυγχάνεται αν τα φιλμ ή οι φωτ. πλάκες εγκλειστούν – αφού εμβαπτισθούν σε κατάλληλο διαφανές υγρό – ανάμεσα σε οπτικά επίπεδες πλάκες, έτσι που ν' αντισταθμίζονται οι μεταβολές των φάσεων από σημείο σε σημείο (liquid gates). Στο (Σχ. 2.13) η καμπύλη (α) μας δίνει την $M(f)$ για ένα κοινό φωτ. φιλμ της εταιρίας



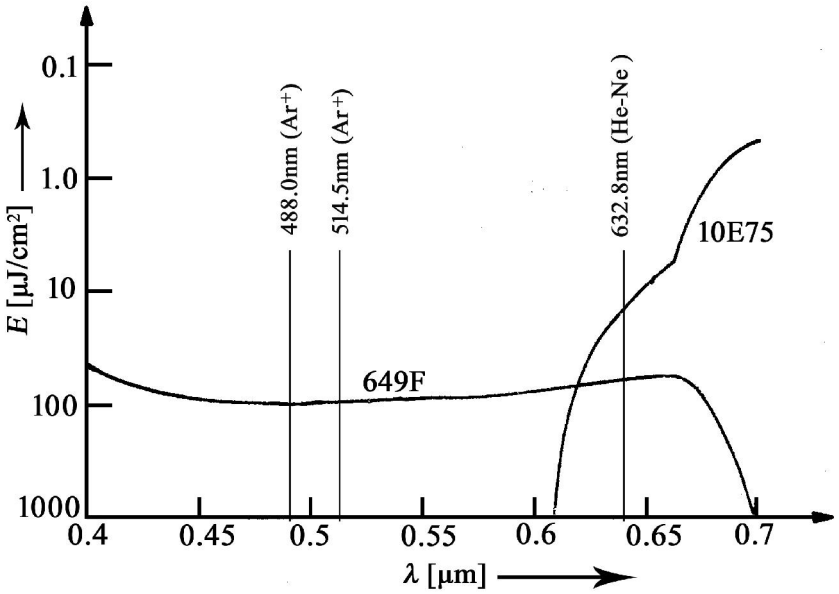
(Σχ. 2.13)

Kodak το (Kodak Plas-XPan). Η καμπύλη (β) είναι για το ολογραφικό φιλμ (Kodak 649F) της ίδιας εταιρείας. Τα φιλμ εμφανιστήκαν με τους ίδιους εμφανιστές και οι συνθήκες εμφάνισης ήταν οι ίδιες. Γίνεται φανερό ότι για το πρώτο, είναι $M(f) \simeq 1$ όταν $f \in (0-15)$γραμμ./mm ενώ για το ολογραφικό και για $f > 1500$γραμμ./mm.

γ) Φασματική ευαισθησία των διαφόρων φιλμ

Εκτός της αναπαραγωγής μονοχρωματικών μετ. κύματος , η ολογραφία είναι σε θέση με διαφόρους μεθόδους ν' αναπαράγει και την χρωματικότητα των τρισδιάστατων αντικειμένων. Δηλ. εγχρώμων αντικειμένων, όπως στοιχειωδώς θα δούμε στα επόμενα. Το γεγονός όμως αυτό προϋποθέτει την απόκριση των χρησιμοποιούμενων φιλμ σε διάφορα μ.κ. Αυτού του είδους τα φιλμ ονομάζονται παγχρωματικά. Υπάρχουν όμως και φιλμ που η απόκρισή τους αφορά μια σχετικά στενή περιοχή γύρο από ένα βασικό μ.κ. όπως των Laser: He - Ne $(\lambda_R = 632.8\text{nm})$ και του Ar^+ $(\lambda_G = 514.5\text{nm},\ \lambda_B = 488\text{nm})$. Τα φιλμ αυτού του είδους είναι τα γνωστά ορθοχρωματικά. Στο (Σχ. 2.14) κατά προσέγγιση δίνονται οι γραφικές παραστάσεις του μεγέθους της ***τυπικής έκθεσης (ευαισθησίας) (nominal sensitivity)*** συναρτήσει του

μ.κ. για τα ολογραφικά φιλμ: α) Kodak 649F (παγχρωματικό) και β) Agfa Gevaert 10E75 (ορθοχρωματικό). Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η τυπική ευαισθησία αφορά την προτεινόμενη από τους κατασκευαστές έκθεση, έτσι που από τη (σχ. 2.16): $E = \mathcal{J} \cdot t$ να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον χρόνο έκθεσης του φιλμ (με τη βοήθεια της μετρούμενης μέσης έντασης του φωτός), προκειμένου η έκθεση να γίνει



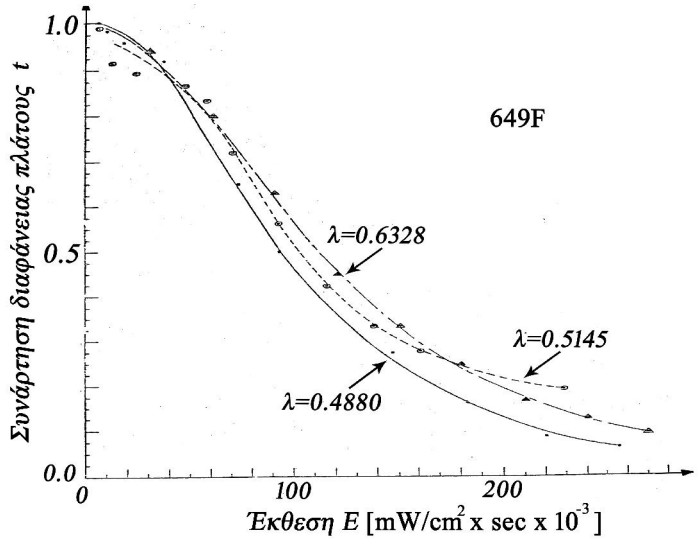
(Σχ. 2.14)

στη γραμμική του περιοχή. Συγκεντρωτικά στον (Πίν. 2.15) δίνονται τα στοιχεία αυτών των δύο φιλμ. Τέλος στο (Σχ. 2.16) μπορούμε να δούμε τις καμπύλες $(t - E)$

Τυπικά Χαρακτηριστικά των φιλμ Kodak 649F και Agfa Gevaert 10E75				
Τύπος	Πάχος (μm)	Τυπική Ευαισθησία $(\mu J/cm^2)$	Διακριτική Ικανότητα (γραμμές/mm)	Μήκος Κύματος (μm)
649F	17	70	2000	632.8
10E75	7	2	2800	632.8

(Πίν. 2.15)

(συνάρτηση διαφάνειας πλάτους συναρτήσει της έκθεσης) για το παγχρωματικό φιλμ 649F και για τρία μήκη κύματος: $\lambda = 632.8\text{nm}$ Laser (He-Ne), $\lambda = 514.5\text{nm}$ και $\lambda = 488.0\text{nm}$ Laser (Ar^+).

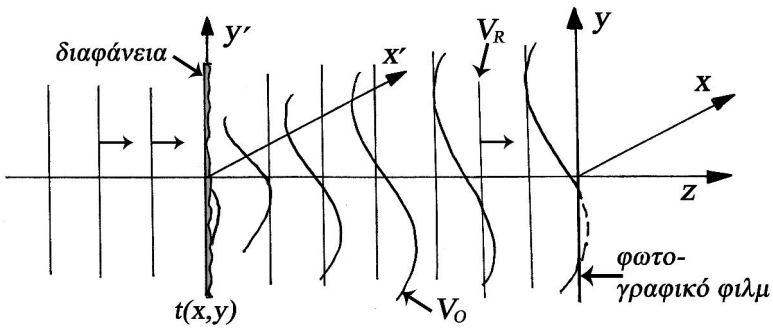


(Σχ. 2.16)

Ολογραφία κατά μήκος ενός άξονα (In-line holography)

Η μέθοδος της ολογραφίας που πρότεινε ο D.Gabor, είναι αυτή που ονομάζεται ***ολογραφία κατά μήκος ενός άξονα (in - line holography)*** (ή ολογραφία Gabor). Στην περίπτωση αυτή προκειμένου να γίνει η καταγραφή των οπτικών πληροφοριών, το μετ. κύματος της αναφοράς καθώς και αυτό του αντικειμένου, διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση. Σαν αντικείμενα χρησιμοποιηθήκαν επίπεδες διαφάνειες, που χαρακτηριζόταν από συγκεκριμένες συναρτήσεις.

Το διάγραμμα της διάταξης καταγραφής ενός ολογράμματος κατά Gabor δίνεται στο (Σχ. 2.17). Όπου ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος, διαδίδεται



(Σχ. 2.17)

κατά μήκος του άξονα z και προσπίπτει σε ένα φιλμ με συνάρτηση διαφάνειας πλάτους $t(x,y)$ (π.χ. είναι ένα αδιαφανές φιλμ το οποίο περιλαμβάνει ένα διαφανή γραμματικό χαρακτήρα). Τότε το φως περιθλάται στις διάφορες τάξεις του. Μια

από αυτές είναι και η μηδενική τάξη. Πρόκειται για ένα επίπεδο μετ. κύματος, που διαδίδεται κατά τον άξονα z, με τη διαφορά ότι είναι εξασθενημένο σε σχέση με το προσπίπτον. Το συνολικά λοιπόν περιθλώμενο μετ. κύματος μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι συνίσταται από δύο μέτωπα: α) Το επίπεδο που αναδεικνύεται από τη μηδενική τάξη και β) Το μετ. κύματος που συντίθεται από τις υπόλοιπες περιθλώμενες τάξεις εκτός της μηδενικής. Στο μέτωπο αυτό βέβαια περιλαμβάνονται όλες οι πληροφορίες που αφορούν τη δομή του αντικειμένου (της διαφάνειας) ενώ το επίπεδο μέτωπο της μηδενικής τάξης, συνιστά μόνο ένα ομοιογενές υπόβαθρο κατά τη σύνθεση του ειδώλου. Η σκέψη του Gabor ήταν: Η καταγραφή αυτού του μετ. κύματος (του ούτως ή άλλως μετ. κύματος του αντικειμένου), θα μπορούσε να γίνει κατά την επαλληλία του με το μέτ. κύματος της μηδενικής τάξης (σαν μετ. κύματος αναφοράς). Η συμβολή αυτών των μετώπων, γίνεται σ' ένα επίπεδο x, y σε μια ορισμένη απόσταση από τη διαφάνεια (Σχ. 2.17). Και όσον αφορά τις κατανομές των δύο αυτών μετ. κύματος στο επίπεδο αυτό θα είναι: $V_R(x,y) = a_R =$ σταθ. για το αναφοράς και $V_O(x,y) = a_O(x,y)e^{-i\phi(x,y)}$ γι' αυτό του αντικειμένου. Επομένως μετά την έκθεση του φωτ. φιλμ στη γραμμική του περιοχή και την εμφάνισή του, προκύπτει μια διαφάνεια της οποίας η συνάρτηση θα δίνεται από τη σχέση:

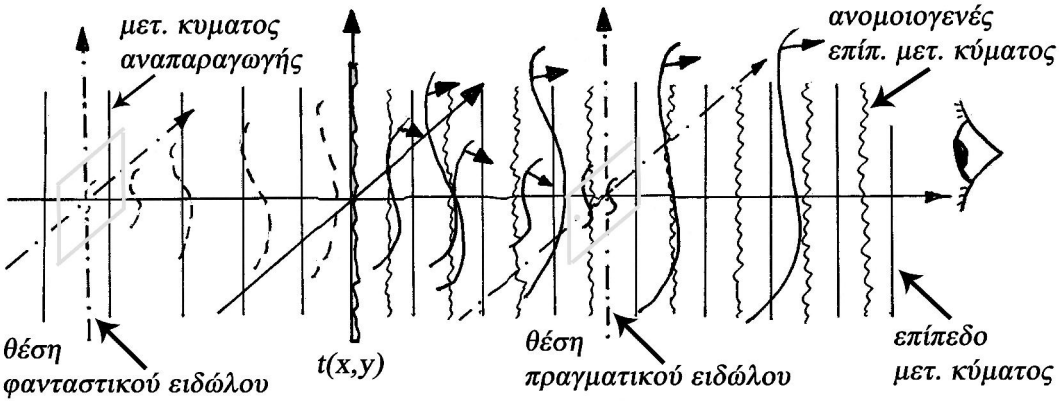
$$\left.\begin{aligned} t(x,y) &= t_b + \beta|\Delta V|^2 = t_b + \beta\left|a_R + V_O(x,y)\right|^2 = \\ &= t_b + \beta\left[a_R^2 + \left|V_O(x,y)\right|^2\right] + \beta\left[a_R V_O(x,y) + a_R V_O^*(x,y)\right] = \\ &= \left(t_b + \beta a_R^2\right) + \beta\left|V_O(x,y)\right|^2 + \beta a_R V_O(x,y) + \beta a V_O^*(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Τη διαφάνεια αυτή κατόπιν, την τοποθετούμε σε μια θέση (Σχ. 2.18) και τη φωτίζουμε κάθετα μ' ένα επίπεδο μετ. κύματος (το μετ. κύματος αναπαραγωγής) το $V'(x,y) = a_C =$ σταθ., του ιδίου μ.κ. με το οποίο έγινε η καταγραφή. Τότε με την προϋπόθεση ότι η προς καταγραφή διαφάνεια ήταν χαμηλής σκεδαστικής ικανότητας (δηλ. το πληροφοριακό της περιεχόμενο περιελάμβανε χαμηλές χωρικές συχνότητες), οι κατανομές των αναδυόμενων μετ. κύματος ακριβώς πίσω από τη διαφάνεια θα δίνονται από τη σχέση:

$$\left.\begin{aligned} V(x,y) &= a_C t(x,y) = \\ &= a_C\left(t_b + \beta a_R^2\right) + \beta a_C\left|V_O(x,y)\right|^2 + \beta a_R a_C V_O(x,y) + \beta a_R a_C V_O^*(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

1) Ο πρώτος όρος συνιστά ένα ομογενές επίπεδο μετ. κύματος, το οποίο διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα z. 2) Και ο δεύτερος όρος αφορά επίπεδο μετ. κύμα-

τος το οποίο όμως δεν είναι ομογενές από σημείο σε σημείο στο επίπεδο x, y. Επομένως το μόνο που προκαλεί είναι μικρού μεγέθους μεταβολές στη φωτοαντίθεση των τελικών ειδώλων. 3) Ο τρίτος όρος – αυτός που μας ενδιαφέρει περισσότερο – είναι το αναπαραγόμενο μετ. κύματος του αντικειμένου V_O και το οποίο διαδίδεται



(Σχ. 2.18)

(αποκλίνον) μετά τη διαφάνεια. Αν στην πορεία του τοποθετήσουμε το μάτι μας, θα δούμε να σχηματίζεται το αντικείμενο (το οποίο στην προκειμένη περίπτωση είναι το αδιαφανές επίπεδο φιλμ με το διαφανή γραμματικό χαρακτήρα), σε μια θέση πίσω από τη διαφάνεια. Δηλ. πρόκειται για φανταστικό είδωλο. Όσον αφορά τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα $\beta a_R a_C$, αυτός συνιστά ένα παράγοντα απορρόφησης. 4) Ο τέταρτος όρος V_O^* μας δίνει το συζυγές μέτωπο του V_O. Πρόκειται για (συγκλίνον) πραγματικό είδωλο, το οποίο σχηματίζεται σε μια θέση μπροστά από τη διαφάνεια καθώς τη βλέπουμε. Που σημαίνει αν παρεμβάλλουμε ένα πέτασμα και το μετακινήσουμε μπρος – πίσω, μπορούμε να το δούμε να σχηματίζεται επάνω του. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει ένα μειονέκτημα. Και ο λόγος είναι ότι όλα τα προαναφερόμενα μετ. κύματος διαδίδονται προς την ίδια διεύθυνση. Και αυτό συνιστά λόγο ύπαρξης ανεπιθύμητων οπτικών θορύβων.

Η μέθοδος Gabor τελικά, μπορεί ν' αναπαράγει τα είδωλα αντικειμένων στο χώρο με μικρή όμως ευκρίνεια. Πειραματικά χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς για την απεικόνιση στο χώρο μικροσωματιδίων (αεροζόλ, σπρέι κλπ.). Για το λόγο αυτό στα επόμενα θα περιγράψουμε μια άλλη μέθοδο καταγραφής και αναπαραγωγής αντικειμένων, ακόμη και μεγάλων διαστάσεων με μεγάλη ευκρίνεια και μάλιστα χωρίς να συνοδεύονται από οπτικούς θορύβους. Η τελευταία, οδήγησε στη χρησιμοποίησή της σε πολυάριθμα πεδία εφαρμογών.

Ολογραφία εκτός άξονα (Off axis holography)

Η μέθοδος καταγραφής και αναπαραγωγής μετώπων κύματος με τη βοήθεια της ***ολογραφίας εκτός άξονα (off axis holography)***, προτάθηκε από τους E.N.Leith και J.Upatnieks* μεταξύ των ετών 1962 και 1964, την ίδια περίπου περίοδο που έγινε η ανακάλυψη των σύμφωνων πηγών φωτός Laser. Στηρίζεται ουσιαστικά – όπως θα δούμε αμέσως μετά – στη θεωρία της μετάδοσης των χρονικών ηλ. σημάτων με τη βοήθεια της διαμόρφωσης (και ακολούθως αποδιαμόρφωσης) κατά πλάτος ή φάση μιας θεμελιώδους (φέρουσας) συχνότητας. Στην προκειμένη περίπτωση τα 'σήματά' μας δεν είναι χρονικά, αλλά οι χωρικές διδιάστατες κατανομές των μετ. κύματος. Η λογική βέβαια που διέπει τη μέθοδο είναι παρόμοια.

Στο (Σχ. 2.19α) το μετ. κύματος που θέλουμε να καταγράψουμε και ν' αναπαράγουμε, προέρχεται από ένα κυβικού σχήματος αντικείμενο (το μετ. κύματος V_O του αντικειμένου). Και όσον αφορά το μετ. κύματος αναφοράς V_R, αυτό είναι ένα επίπεδο, το οποίο σε σχέση με τον άξονα z (που είναι κάθετος στο φιλμ) προσπίπτει με γωνία θ_r. Τα δύο, ερχόμενα σ' επαλληλία στο επίπεδο x, y όπου βρίσκεται ένα φωτ. φιλμ, συμβάλλουν. Οι κατανομές των δύο αυτών κυμάτων δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$V_R = a_R e^{i2\pi f_y y} \quad \text{με } a_R = \text{σταθ.} \quad \text{και} \quad f_y = \sin\theta_r / \lambda \tag{2.30}$$

$$V_O = a_O(x,y)\, e^{-i\phi_O(x,y)} \tag{2.31}$$

Το φιλμ αφού εκτεθεί στη γραμμική του περιοχή και εμφανιστεί, χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση διαφάνειας πλάτους $t(x,y)$ που δίνεται από τη (σχ. 2.22):

$t(x,y) = t_b + \beta|\Delta V|^2 = t_b + \beta|V_R + V_O|^2 = t_b + \beta\left|a_R e^{i2\pi f_y y} + a_O(x,y)\, e^{-i\phi_O(x,y)}\right|^2$, όπου μετά την εκτέλεση των πράξεων βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} t(x,y) = \left(t_b + \beta a_R^2\right) + \beta a_O^2(x,y) + \\ + \beta a_R a_O(x,y)\, e^{i2\pi f_y y} e^{i\phi_O(x,y)} + \beta a_R a_O(x,y)\, e^{-i2\pi f_y y} e^{-i\phi_O(x,y)} \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

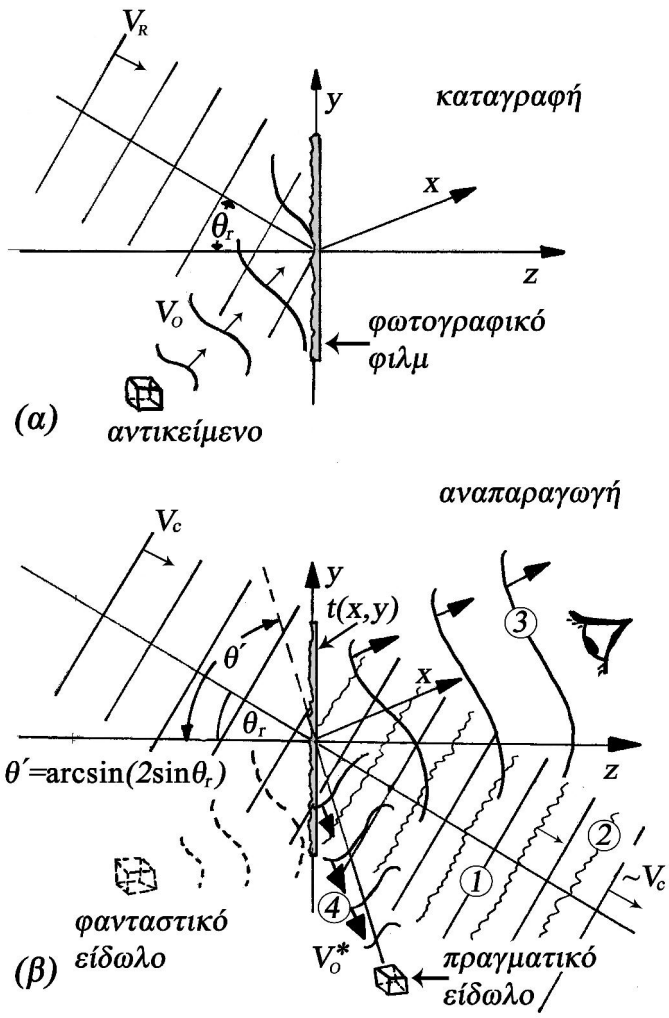
Και προκειμένου να δούμε τι εκφράζει από φυσική άποψη η $t(x,y)$, η (σχ. 2.32) μπορεί να γραφεί ως εξής:

---

* E.N.Leith and J.Upatnieks: 'Reconstructed wave fronts and communication theory' J. Opt. Soc. Am., **52** 1123-1130 (1962).

$$t(x,y)=\left(t_b+\beta a_R^2\right)+\beta a_O^2(x,y)+2\beta a_R a_O(x,y)\cos\left[2\pi f_y y+\phi_O(x,y)\right] \qquad (2.33)$$

Από την οποία διαπιστώνουμε ότι: Το ολόγραμμα (hologram) που είναι στην πραγματικότητα ένα καταγεγραμμένο συμβολογράφημα (δηλ. μια κατανομή αμαύρω-

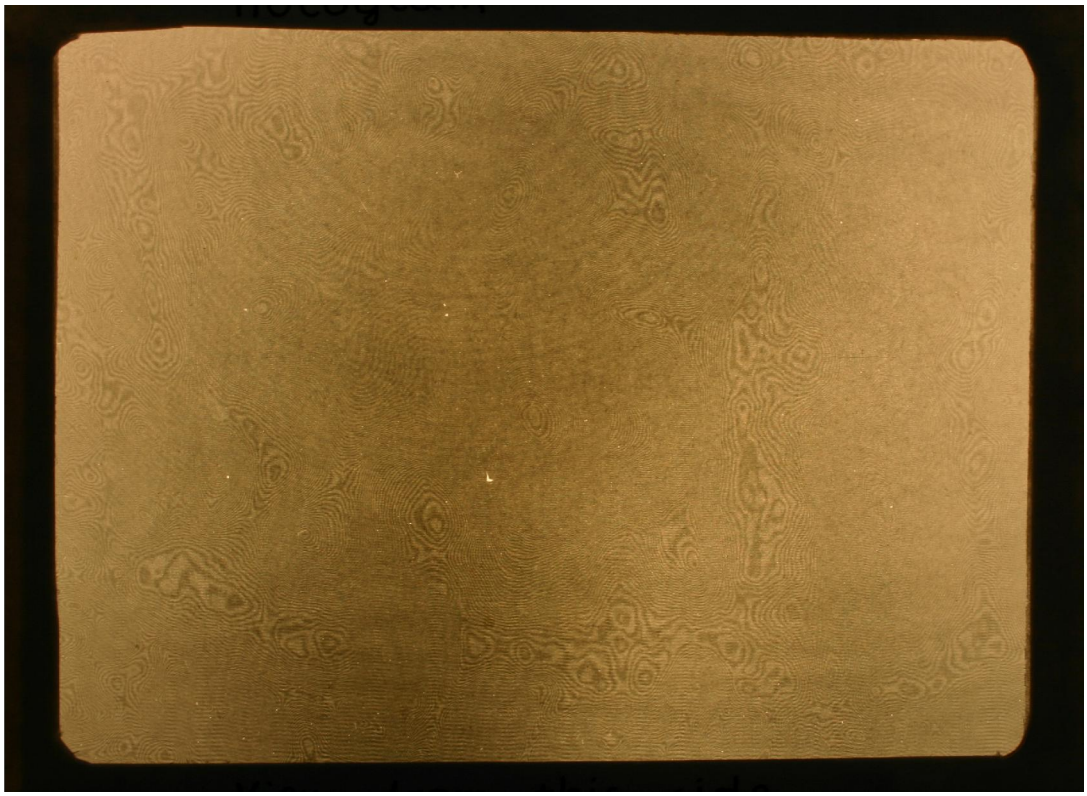


(Σχ. 2.19)

σης – κροσσών συμβολής), συνίσταται (ο τρίτος όρος) από ένα σύνολο από 'φέροντες' κροσσούς συμβολής ίδιας χωρικής συχνότητας f_y οι οποίοι: α) Κατά πλάτος διαμορφώνονται από τον παράγοντα $a_O(x,y)$ και β) Η φάση τους διαμορφώνεται από τον παράγοντα $\phi_O(x,y)$.

Η εξωτερική μορφή ενός τέτοιου ολογράμματος (δηλ. η όψη που παρουσιάζει η διαφάνεια), είναι μιας ακαθόριστης αμαύρωσης, όπως αυτή που φαίνεται στην (Εικ. 2.20). Οι μεγάλης περιόδου κροσσοί συμβολής που παρατηρούμε, δεν οφείλονται στο πληροφοριακό υπόβαθρο του καταγεγραμμένου μετώπου κύματος. Αλ-

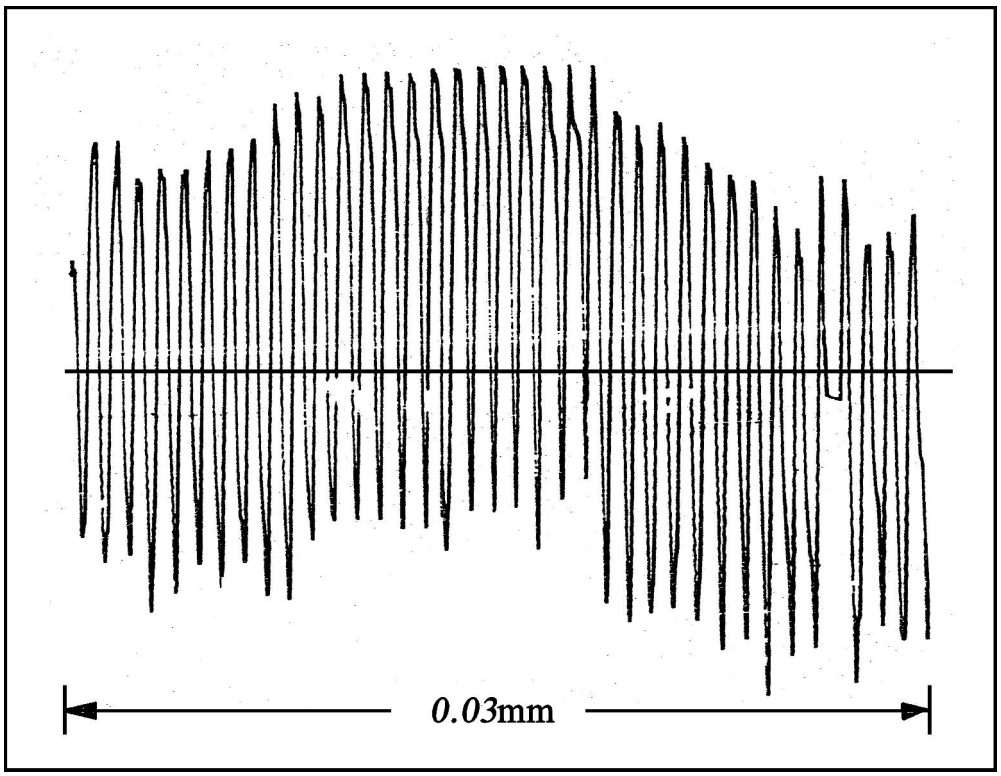
λά σε άλλες αιτίες όπως σε συμβολή από διαιρέσεις μετώπων κύματος μεταξύ των δύο επιφανειών του φιλμ ή της γυάλινης πλάκας κατά τη διαδικασία της καταγραφής. Όμως σε μικροσκοπικό επίπεδο – όπως θα δούμε αμέσως μετά – γίνεται εμφανέστατη η δομή της διαφάνειας, που συντίθεται από κροσσούς συμβολής διαμορφωμένους κατά πλάτος και φάση. Πράγματι για τη μέθοδο καταγραφής της



(Εικ. 2.20)

ολογραφίας εκτός άξονα, η γωνία θ_r (που καθορίζει τη φέρουσα χωρική συχνότητα) είναι πολύ μεγάλη. Π.χ. για $\theta_r = 30^0$ από τη σχέση: $f_y = \sin\theta_r / \lambda$ και για $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$, βρίσκουμε: $f_y \simeq 790\,\text{γραμμ./mm}$. Δηλ. η περίοδος των κροσσών συμβολής που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη φέρουσα συχνότητα θα είναι: $T = \left(1/f_y\right) \simeq 0.00126\text{mm}$. Κροσσούς αυτών των διαστάσεων, το μάτι μας δεν είναι δυνατόν να μπορέσει να διακρίνει στο ολόγραμμα της (Εικ. 2.20), δεδομένου ότι η διακριτική του ικανότητα είναι $\simeq 10\,\text{γραμμ./mm}$. Όμως ένα μικροντενσιτόμετρο μπορεί να τους διακρίνει και να τους καταγράψει. Με ένα τέτοιου είδους όργανο, έχουμε σαρώσει (κατά μήκος μιας διεύθυνσης) μια μικρή περιοχή της διαφάνειας της (Εικ. 2.20) και το γράφημα φαίνεται στο (Σχ. 2.21). Η περιοχή αυτή έχει μήκος $\Delta l \simeq 0.03\text{mm}$ και στο εσωτερικό της καταγράφονται περί τους $N = 40$ κροσσοί συμβολής. Από τα δεδομένα αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της φέρου-

σας συχνότητας, η οποία είναι $f_y \simeq 1370$ γραμμ./mm. Που σημαίνει ότι από τη σχέση $f_y = \sin\theta_r/\lambda$ και για $\lambda = 0.6328\times10^{-3}$ mm βρίσκουμε ότι $\theta_r \simeq 60^0$. Και για να επαναλάβουμε, είναι η γωνία την οποία σχηματίζει το προσπίπτον μετ. κύματος της αναφοράς σε σχέση με την κάθετη στην διαφάνεια κατά τη διαδικασία της εγγρα-



(Σχ. 2.21)

φής (Σχ. 2.19α). Επίσης στο (Σχ. 2.21) είναι δυνατόν να δούμε τη διαμόρφωση των κροσσών κατά πλάτος και κατά φάση με αναφορά τη φέρουσα χωρική συχνότητα.

Αναπαραγωγή του φανταστικού ειδώλου

Αντικειμενικός μας σκοπός βέβαια είναι η αναπαραγωγή του μετ. κύματος του αντικειμένου. Δηλ. η απεικόνισή του στο χώρο. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με το φωτισμό του ολογράμματος μ' ένα επίπεδο μετ. κύματος V_C, που προσπίπτει στη διαφάνεια με την ίδια ακριβώς γωνία την οποία είχε το μετ. κύματος της αναφοράς. Η κατανομή αυτού του μετώπου πλάτους $a_C =$ σταθ. στο επίπεδο x, y περιγράφεται κατά τα γνωστά από την εξίσωση:

$$V_C(x,y) = a_C e^{i2\pi f_y y} \tag{2.34}$$

Οπότε οι κατανομές των αναδυόμενων μετ. κύματος ακριβώς πίσω από τη διαφάνεια, της οποίας η συναρτησιακή μορφή δίνεται από τη (σχ. 2.32) θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} &V(x,y)=V_C(x,y)t(x,y)=\left(t_b+\beta a_R^2\right)a_C e^{i2\pi f_y y}+\beta a_C a_O^2(x,y)e^{i2\pi f_y y}+\\ &+\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{-i\phi_O(x,y)}+\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{i\phi_O(x,y)}e^{i4\pi f_y y}=\left(t_b+\beta a_R^2\right)a_C e^{i2\pi f_y y}+\\ &+\beta a_C a_O^2(x,y)e^{i2\pi f_y y}+\beta a_C a_R V_O(x,y)+\beta a_C a_R V_O^*(x,y)e^{i4\pi f_y y}\end{aligned}\right\} \quad (2.35)$$

Από την εξίσωση αυτή:

(1) Ο πρώτος όρος $\left(t_b+\beta a_R^2\right)a_C e^{i2\pi f_y y}$: Συνιστά την κατανομή ενός ομογενούς επιπέδου μετ. κύματος, που διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με το προσπίπτον μέτωπο της αναπαραγωγής V_C, πολλαπλασιασμένο με ένα παράγοντα απορρόφησης $\left(t_b+\beta a_R^2\right)$.

(2) Ο δεύτερος όρος $\beta a_C a_O^2(x,y)e^{i2\pi f_y y}$: Παριστάνει και πάλι την κατανομή ενός επιπέδου μετώπου, διαδιδόμενου στην ίδια διεύθυνση αλλά είναι ανομοιογενές λόγω του παράγοντα $a_O^2(x,y)$. Πράγματι ο όρος απορρόφησης $\beta a_C a_O^2(x,y)$, έχει διαφορετικές τιμές από σημείο σε σημείο στην επιφάνεια του μετώπου.

(3) Ο τρίτος όρος $\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{-i\phi_O(x,y)}=\beta a_C a_R V_O(x,y)$ είναι η κατανομή του αναπαραγόμενου μετ. κύματος του αντικειμένου, πολλαπλασιασμένη με τον παράγοντα της απορρόφησης $\beta a_C a_R$. Είναι μέτωπο (που όπως και τα δύο προηγούμενα) εξέρχεται από τη διαφάνεια, όμως διαδίδεται σε διαφορετική περιοχή του χώρου. Προκειμένου τώρα να δούμε το είδωλο αυτό, θα πρέπει να τοποθετήσουμε τα μάτια μας ακριβώς πίσω από τη διαφάνεια (Σχ. 2.19β), από όπου και αναδύεται. Και δεδομένου ότι το τελευταίο είναι αποκλίνον, το είδωλο φαίνεται να σχηματίζεται σε μια περιοχή του χώρου πίσω από τη διαφάνεια. Δηλ. θα είναι φανταστικό.

(4) Ο τέταρτος όρος $\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{i\phi_O(x,y)}e^{i4\pi f_y y}=\beta a_C a_R V_O^*(x,y)e^{i4\pi f_y y}$ παριστάνει την κατανομή $V_O^*(x,y)=a_O(x,y)e^{i\phi_O(x,y)}$ του συζυγούς $\left(V_O^*\right)$, του μετ. κύματος V_O του αντικειμένου. Πρόκειται για ένα συγκλίνον μετ. κύματος σε περιοχή του χώρου μετά τη διαφάνεια. Δηλ. θα έχουμε το σχηματισμό ενός πραγματικού ειδώλου. Όμως ο όρος $V_O^*(x,y)$ είναι πολλαπλασιασμένος με τον παράγοντα $e^{i4\pi f_y y}$. Που σημαίνει το μετ. κύματος V_O^* σαν όλο στρέφεται (ως προς τον άξονα z) κατά τη γωνία $\theta'=\arcsin\left(2\sin\theta_r\right)$(Σχ. 2.19β). Αλλά λόγω της μεγάλης τιμής της γωνίας θ_r, το μετ. κύματος διαδίδεται σχεδόν εφαπτομενικά του επιπέδου x,y ή μάλλον δεν αναδύεται καν.

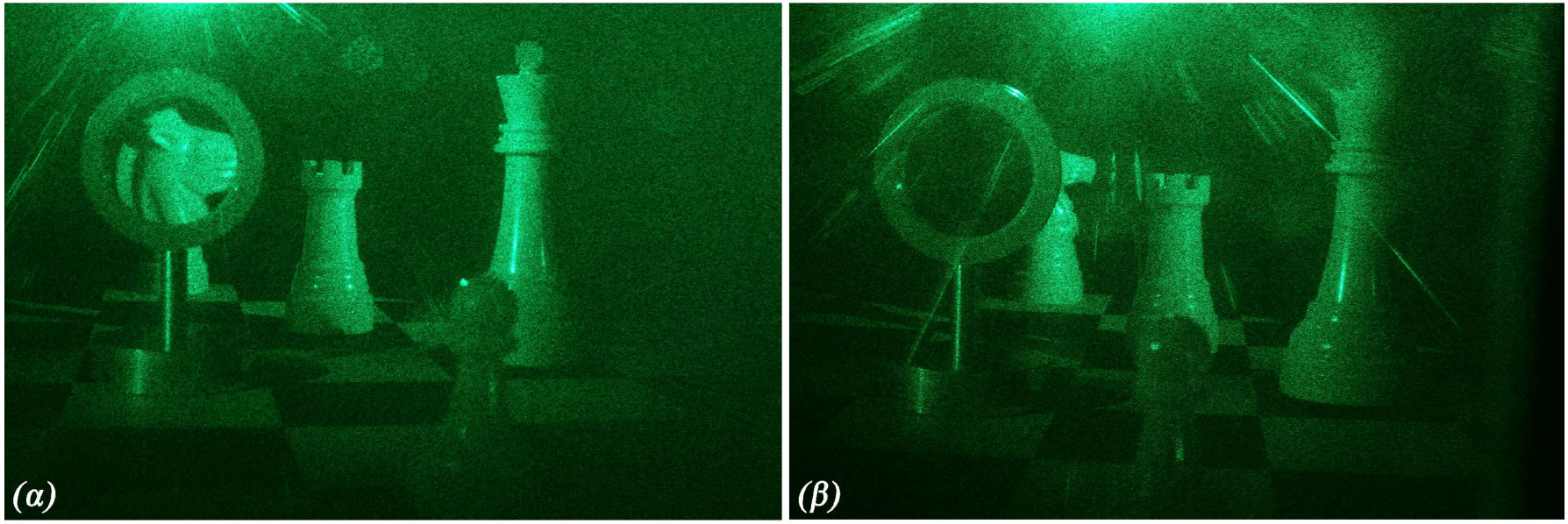
Ιδιότητες του αναπαραγόμενου φανταστικού ειδώλου

α) Όπως ήδη αναφέραμε, ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου της ολογραφικής καταγραφής εκτός άξονα, είναι ότι τα αναπαραγόμενα είδωλα είναι απαλλαγμένα οπτικών θορύβων: Κατά πρώτο λόγο, από το μη περιθλώμενο φως του μετώπου αναπαραγωγής και κατά δεύτερο, από το ταυτόχρονα αναπτυσσόμενο συζυγές του μετ. κύματος του αντικειμένου. Που σημαίνει ότι τα τελευταία διαδίδονται σε διαφορετικές γωνίες εφόσον η γωνία θ_r είναι μεγάλη (Σχ. 2.19β).

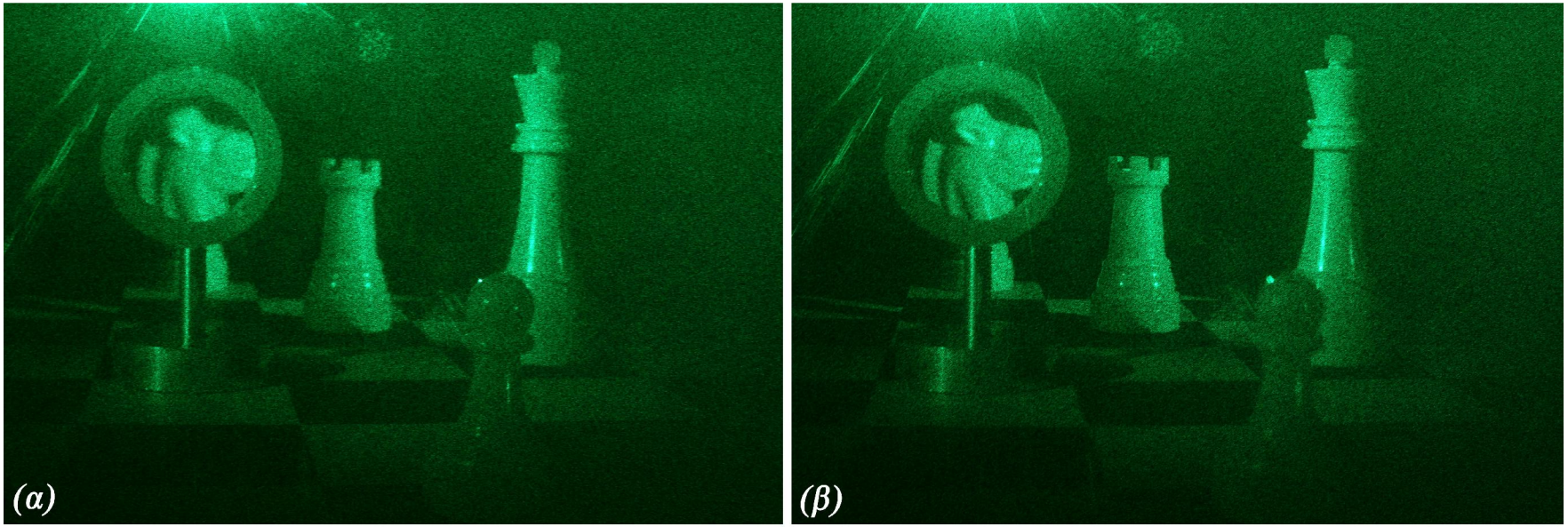
β) Ο σχηματισμός του ειδώλου (στην προκειμένη περίπτωση του φανταστικού) στο χώρο, είναι δυνατόν ν' αναδειχθεί από το γεγονός ότι: Αν βλέποντάς το στρέψουμε το κεφάλι μας αριστερά – δεξιά, τότε από τις δύο θέσεις παρατηρούμε ότι εμφανίζονται διαφορετικές όψεις του. Δηλ. είναι σαν να το βλέπουμε με διαφορετική προοπτική. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στις (Εικ. 2.22α,β) όπου με μια φωτ. μηχανή απεικονίσαμε δύο όψεις του ίδιου φανταστικού αντικειμένου. Το αντικείμενο είναι μια σκακιέρα, με τοποθετημένα τα πιόνια σε διαφορετικές θέσεις στο χώρο. Η ύπαρξη μάλιστα ενός θετικού φακού μπροστά από το πιόνι του αλόγου, εντείνει το φαινόμενο. Ενώ στην (Εικ. 2.22α) το άλογο είναι ακριβώς πίσω από το φακό και μεγεθύνεται, στην (Εικ. 2.22β) (με τη μετατόπιση του κεφαλιού μας) το άλογο βγαίνει εντελώς έξω από το πεδίο του φακού. Ίδια φαινόμενα παρατηρούμε και με τις σχετικές θέσεις ανάμεσα στα πιόνια.

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο αποδεικνύεται ότι το φανταστικό (στην προκειμένη περίπτωση) είδωλο σχηματίζεται στο χώρο, είναι μέσω του μηχανισμού εστίασης μιας φωτ. μηχανής. Στην (Εικ. 2.23α) κατ' αρχή μέσω της μηχανής, εστιάσαμε το εμπρός τμήμα της σκακιέρας. Οπότε βλέπουμε ευκρινώς σε πρώτο πλάνο το πιόνι του στρατιώτη και (ενδιάμεσα) λιγότερο τον στρατηγό. Το άλογο όμως (μέσω του φακού) και ο πύργος στο πίσω πλάνο είναι ανεστίαστα. Αν σε δεύτερη φάση εστιάσουμε στο πίσω μέρος της σκακιέρας, τότε βλέπουμε να είναι ευκρινή (Εικ. 2.23β) το άλογο και ο πύργος. Όμως ο στρατιώτης αφεστιάζεται. Τέλος το πιόνι του στρατηγού και στη δεύτερη περίπτωση είναι σχετικά εστιασμένο, επειδή βρίσκεται σε ενδιάμεσο χώρο και ο φακός της μηχανής διαθέτει πάντα ένα βάθος εστίασης και κατά προέκταση ένα βάθος πεδίου.

γ) Κάθε σημείο του αντικειμένου που φωτίζεται, κατά τη διαδικασία της πρώτης φάσης, δηλ. της εγγραφής των πληροφοριών στο φιλμ, συνιστά πηγή ενός σφαιρικού μετ. κύματος. Το μέτωπο αυτό διαδιδόμενο, καλύπτει όλη την επιφάνεια του φιλμ ερχόμενο σε επαλληλία με το μετ. κύματος της αναφοράς. Αλλά και το τελευταίο αυτό, καλύπτει όλη την επιφάνεια του φιλμ. Άρα η πληροφορία που αφορά ακόμη και ένα και μοναδικό σημείο του αντικειμένου, καταγράφεται απ' άκρου εις άκρον αυτής της επιφάνειας. Από το γεγονός αυτό αντλείται και η προ-



(Εικ. 2.22)



(Εικ. 2.23)

έλευση της ονομασίας της μεθόδου απεικόνισης στο χώρο που μελετούμε σαν: ***Ολογραφία (Holography)***. Που σημαίνει ότι: Η αναπαραγωγή των ειδώλων του αντικειμένου στο χώρο, μπορεί να γίνεται ακόμη και από ένα μικρό σχετικά τμήμα της διαφάνειας. Βέβαια όσο τα τμήματα αυτά γίνονται μικρότερα, τόσο η φωτοαντίθεση και η ευκρίνεια των ειδώλων ελαττώνεται. Στην (Εικ. 2.24α) φαίνεται το φανταστικό είδωλο του αντικειμένου (της σκακιέρας), το οποίο έχει αναπαραχθεί μέσω ενός τμήματος της διαφάνειας από τη θέση κάτω και δεξιά, ενώ η υπόλοιπη έχει καλυφθεί. Αντίθετα στην (Εικ. 2.24β) βλέπουμε το είδωλο, του οποίου η αναπαραγωγή έγινε μέσω ενός τμήματός της στη θέση πάνω και αριστερά.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι η αναπαραγωγή των φανταστικών ειδώλων των (Εικ. 2.22,23,24) έγινε με μετ. κύματος αναπαραγωγής σφαιρικό από ένα Laser Ar^+ μ.κ. $\lambda = 514.5\text{nm}$. Η καταγραφή των πληροφοριών έγινε με μετ. κύματος αναφοράς (ίδιου μ.κ.) επίσης σφαιρικό. Η διαδικασία αυτή θα μας απασχολήσει στοιχειωδώς στα επόμενα. Αν βέβαια τα μ.κ. των μετ. κύματος αναφοράς και αναπαραγωγής δεν είναι ίδια, η διαφορά θα εντοπίζεται μόνο στη διαφορετική μεγέθυνση μεταξύ αντικειμένου και ειδώλων.

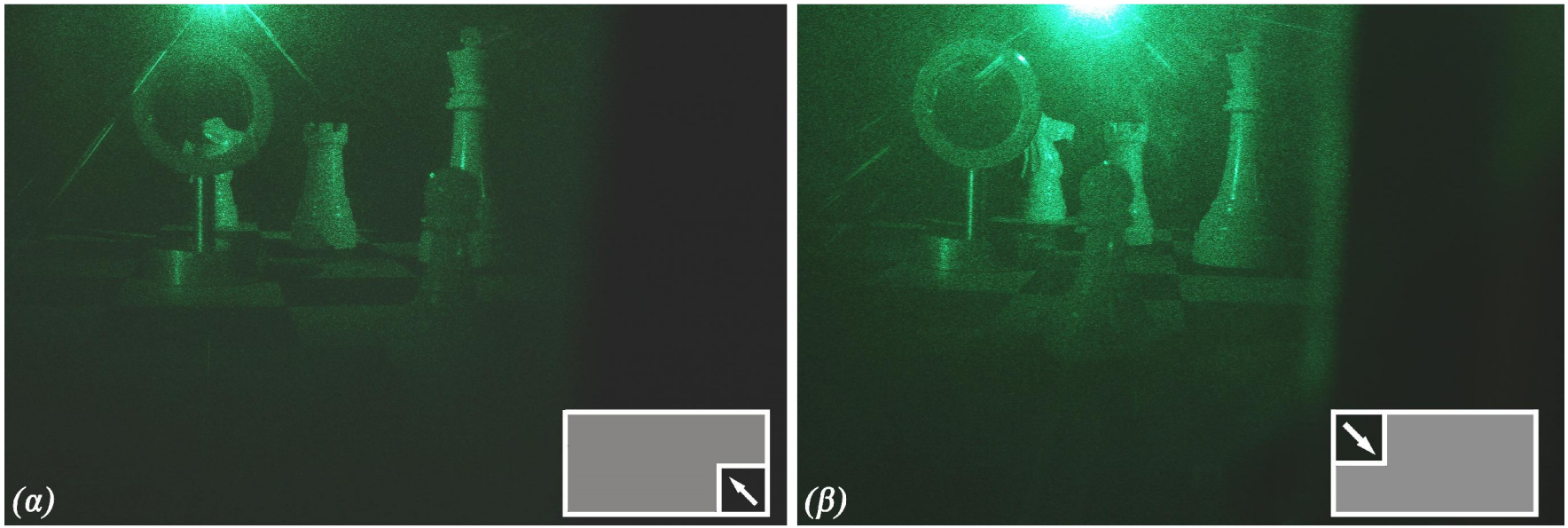
Αναπαραγωγή του πραγματικού ειδώλου

Προηγουμένως είδαμε ότι η αναπαραγωγή του αποκλίνοντος μετ. κύματος μετά τη διαφάνεια, αφορούσε τη δημιουργία στο χώρο φανταστικού ειδώλου του αντικειμένου. Το ταυτόχρονα όμως αναπαραγόμενο συγκλίνον μετ. κύματος που αφορούσε τη ανάπτυξη πραγματικού ειδώλου, διαδιδόταν σχεδόν εφαπτομενικά του επιπέδου x, y μετά τη διαφάνεια ή μάλλον δεν αναδυόταν καν από αυτήν. Όμως μια ευκρινής ανάδειξη πραγματικού ειδώλου είναι δυνατή. Και αυτό επιτυγχάνεται όταν το μετ. κύματος αναπαραγωγής που θα φωτίσει τη διαφάνεια, είναι το συζυγές αυτού με το οποίο αναπαράγαμε το φανταστικό είδωλο.

Άρα η κατανομή του συζυγούς μετ. κύματος του $V_C(x, y)$ (σχ. 2.34) στο επίπεδο x, y θα δίνεται τώρα από τη σχέση:

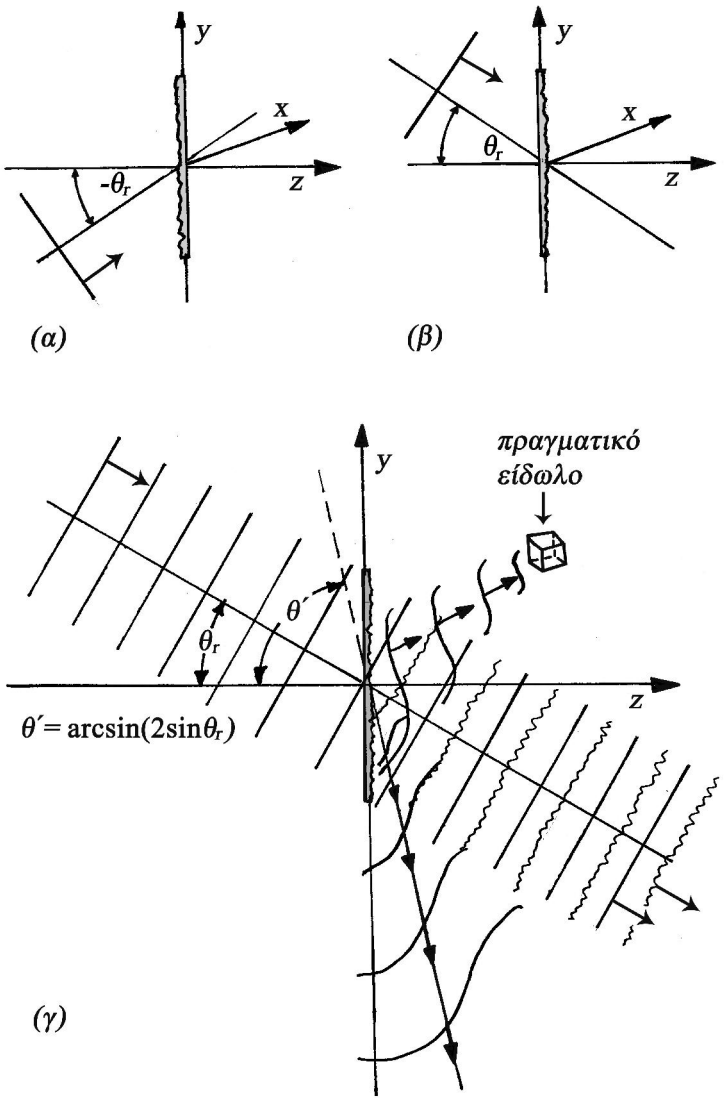
$$V_C^*(x, y) = a_C e^{-i2\pi f_y y} \qquad a_C = \text{σταθ.} \tag{2.36}$$

και η κατεύθυνση διάδοσής του σε σχέση με τη διαφάνεια φαίνεται στο (Σχ. 2.25α). Προκειμένου όμως να διατηρηθεί η αρχική διεύθυνση διάδοσης του μετ. κύματος αναπαραγωγής, η 'συζυγικότητα' επιτυγχάνεται με περιστροφή της διαφάνειας κατά 180^0 περί τον άξονα y, όπως ακριβώς φαίνεται στο (Σχ. 2.25β). Τότε οι διατάξεις των (Σχ. 2.25α,β) θα είναι ισοδύναμες. Οπότε οι κατανομές των αναδυόμενων μετ.



(Εικ. 2.24)

κύματος ακριβώς πίσω από τη διαφάνεια, της οποίας η συναρτησιακή μορφή δίνεται από τη (σχ. 2.32) θα είναι:



(Σχ. 2.25)

$$\left.\begin{aligned} V(x,y) &= V_C(x,y)t(x,y) = \left(t_b + \beta a_R^2\right)a_C e^{-i2\pi f_y y} + \beta a_C a_O^2(x,y)e^{-i2\pi f_y y} + \\ &+\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{i\phi_O(x,y)} + \beta a_C a_R a_O(x,y)e^{-i\phi_O(x,y)}e^{-i4\pi f_y y} = \left(t_b + \beta a_R^2\right)a_C e^{-i2\pi f_y y} + \\ &+\beta a_C a_O^2(x,y)e^{-i2\pi f_y y} + \beta a_C a_R V_O^*(x,y) + \beta a_C a_R V_O(x,y)e^{-i4\pi f_y y} \end{aligned}\right\} \quad (2.37)$$

Από την εξίσωση αυτή:

(1) Ο πρώτος όρος $\left(t_b + \beta a_R^2\right)a_C e^{-i2\pi f_y y}$: Συνιστά την κατανομή ενός ομογενούς επιπέδου μετ. κύματος, που διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με το προσπίπτον

μέτωπο της αναπαραγωγής V_C, πολλαπλασιασμένο με ένα παράγοντα απορρόφησης $\left(t_b + \beta a_R^2\right)$.

(2) Ο δεύτερος όρος $\beta a_C a_O^2(x,y)e^{-i2\pi f_y y}$: Παριστάνει και πάλι την κατανομή ενός επιπέδου μετώπου, διαδιδόμενου στην ίδια διεύθυνση αλλά είναι ανομοιογενές λόγω του παράγοντα $a_O^2(x,y)$. Πράγματι ο όρος απορρόφησης $\beta a_C a_O^2(x,y)$, έχει διαφορετικές τιμές από σημείο σε σημείο στην επιφάνεια του μετώπου.

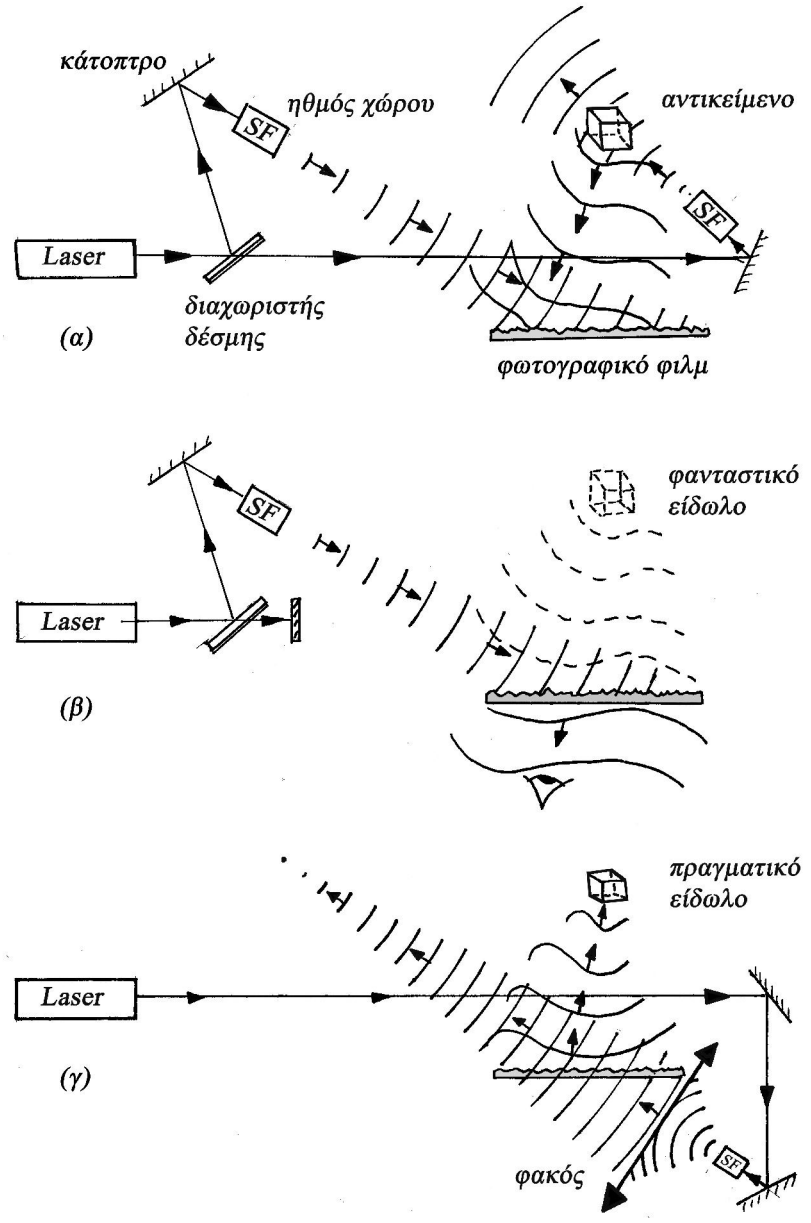
(3) Ο τρίτος όρος $\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{i\phi_O(x,y)} = \beta a_C a_R V_O^*(x,y)$ είναι η κατανομή του αναπαραγόμενου συγκλίνοντος μετ. κύματος, που αφορά το πραγματικό είδωλο του αντικειμένου (Σχ. 2.25γ), πολλαπλασιασμένη με τον παράγοντα της απορρόφησης $\beta a_C a_R$. Είναι μέτωπο (που όπως και τα δύο προηγούμενα) εξέρχεται από τη διαφάνεια, όμως διαδίδεται σε διαφορετική περιοχή του χώρου. Προκειμένου τώρα να δούμε το είδωλο αυτό, θα πρέπει να παρεμβάλλουμε τα μάτια μας στην περιοχή μετά τη θέση από όπου έχουμε το σχηματισμό του. Δηλ. στο αποκλίνον μετά από αυτό μετ. κύματος. Μπορούμε όμως να το δούμε και από οποιαδήποτε θέση, αρκεί στο χώρο σχηματισμού του να υπάρχουν κέντρα σκέδασης (π.χ. καπνός ή σκόνη).

(4) Ο τέταρτος όρος $\beta a_C a_R a_O(x,y)e^{-i\phi_O(x,y)}e^{-i4\pi f_y y} = \beta a_C a_R V_O(x,y)e^{-i4\pi f_y y}$ παριστάνει την κατανομή $V_O(x,y) = a_O(x,y)e^{-i\phi_O(x,y)}$ του μετ. κύματος V_O του αντικειμένου. Πρόκειται για ένα αποκλίνον μετ. κύματος σε περιοχή του χώρου μετά τη διαφάνεια. Που αν παρεμβάλλαμε τα μάτια μας στην πορεία του, θα βλέπαμε πίσω από τη διαφάνεια να σχηματίζεται ένα φανταστικό είδωλο του αντικειμένου. Όμως ο όρος $V_O(x,y)$ είναι πολλαπλασιασμένος με τον παράγοντα $e^{-i4\pi f_y y}$. Που σημαίνει το μετ. κύματος V_O σαν όλο στρέφεται (ως προς τον άξονα z) κατά τη γωνία $\theta' = \arcsin(2\sin\theta_r)$ (Σχ. 2.25γ). Αλλά λόγω της μεγάλης τιμής της γωνίας θ_r, το μετ. κύματος διαδίδεται σχεδόν εφαπτομενικά του επιπέδου x, y ή μάλλον δεν αναδύεται καν. Το τελικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση, είναι ότι από το συζυγή φωτισμό της διαφάνειας, μπορεί να προέλθει ένα πραγματικό, ευκρινές και απαλλαγμένο από οπτικά παράσιτα είδωλο του αντικειμένου στο χώρο.

Ολογραφική καταγραφή ενός αντικειμένου,
με σφαιρικό αποκλίνον μετ. κύματος αναφοράς

Θα πρέπει εδώ ν' αναφερθεί ότι σαν μετ. κύματος αναφοράς κατά την καταγραφή των πληροφοριών στην ολογραφική διαδικασία, μπορούμε να επιλέξουμε ένα οποιασδήποτε μορφής. Στις πλείστες όμως των περιπτώσεων, επιλέγονται επί-

πεδα ή σφαιρικά. Στο (Σχ. 2.26) μπορούμε να παρακολουθήσουμε σε τρεις φάσεις την καταγραφή και την αναπαραγωγή ενός αντικειμένου στο χώρο στην περίπτωση που τα μετ. κύματος αναφοράς και αναπαραγωγής είναι σφαιρικά. Σφαιρικό επίσης είναι και το μέτωπο με το οποίο φωτίζεται το αντικείμενο κατά την καταγραφή.



(Σχ. 2.26)

Στο (Σχ. 2.26α) βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο πετυχαίνουμε την παραγωγή των σφαιρικών μετ. κύματος, του ενός σαν αναφορά και του άλλου που φωτίζει το αντικείμενο προκειμένου να περιθλάσει. Γίνεται με τη βοήθεια: Της δέσμης που προκύπτει από το Laser, του διαχωριστή δέσμης, των ηθμών χώρου και των κατόπτρων, όπως έχουμε περιγράψει σε προηγούμενες περιπτώσεις. Στο (Σχ. 2.26β), το

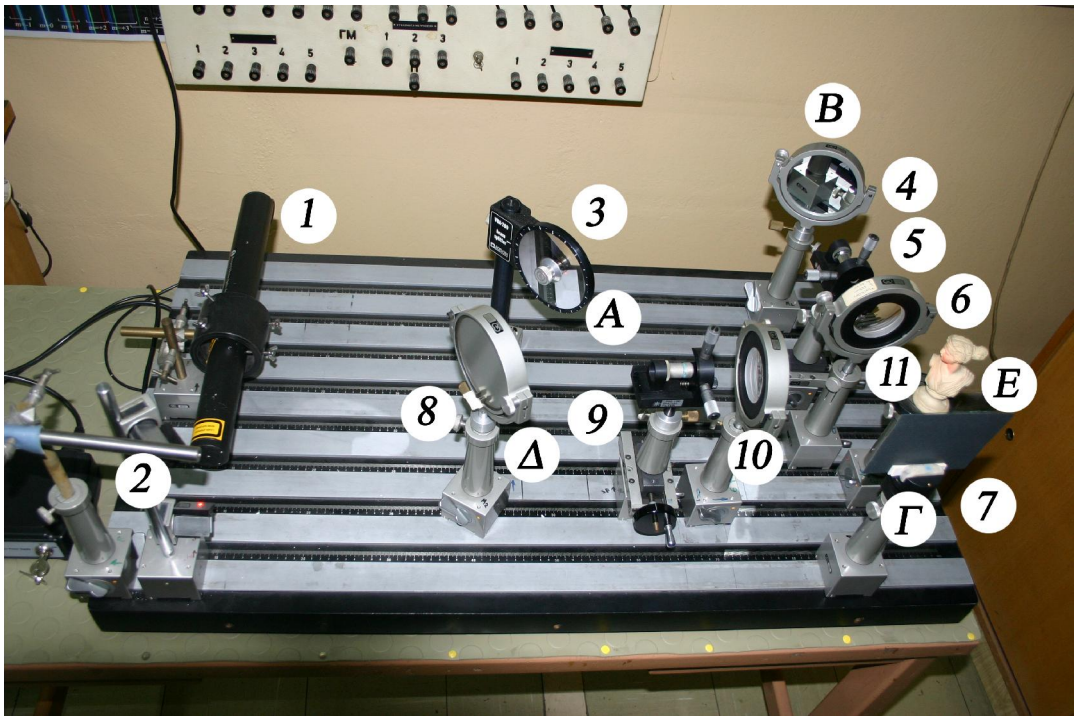
φιλμ έχει εκτεθεί, εμφανιστεί και τοποθετηθεί στην θέση που κατείχε αρχικά (και το αντικείμενο φυσικά έχει απομακρυνθεί). Κατ' αρχή διακόπτουμε τη δέσμη, μέσω της οποίας φωτιζόταν το αντικείμενο στη φάση καταγραφής. Και προκειμένου να πάρουμε το φανταστικό του είδωλο, φωτίζουμε τη διαφάνεια με το σφαιρικό μετ. κύματος της αναφοράς , που εδώ παίζει το ρόλο του μετ. κύματος αναπαραγωγής. Βλέποντας τότε διά μέσου της διαφάνειας, στο πίσω της μέρος θα δούμε να σχηματίζεται το φανταστικό είδωλο του αντικειμένου. Στο (Σχ. 2.26γ) βλέπουμε τη διάταξη με την οποία είναι δυνατόν να λάβουμε το πραγματικό είδωλο του αντικειμένου. Για να το πετύχουμε, ήδη γνωρίζουμε ότι η διαφάνεια θα πρέπει να φωτιστεί με το συζυγές του μετ. κύματος αναφοράς. Δηλ. με ένα συγκλίνον σφαιρικό μετ. κύματος, με σημείο σύγκλισης, αυτό του σημείο απόκλισης κατά τη φάση της αναπαραγωγής του φανταστικού ειδώλου. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός ηθμού χώρου (από τον οποίο εκπέμπεται ένα σφαιρικό αποκλίνον μετ. κύματος) και ενός θετικού φακού. Η απόσταση του φακού από τον ηθμό και η εστιακή του απόσταση, επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε το αναδυόμενο από αυτόν συγκλίνον μετ. κύματος να εστιάζει (αφού περάσει δια μέσου της διαφάνειας) στο επιθυμητό σημείο.

Σημείωση

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι για τα είδωλα στο χώρο που βλέπουμε στις (Εικ. 2.22,23,24), η αναπαραγωγή έγινε με σφαιρικά μετ. κύματος. Όπως βέβαια και η καταγραφή του αντικειμένου (της σκακιέρας). Παρά το ότι στο θεωρητικό τμήμα της ανάλυσης χρησιμοποιήθηκε για λόγους απλότητας, σαν μετ. κύματος αναφοράς το επίπεδο.

Στην (Εικ. 2.27) βλέπουμε μια πλήρη ολογραφική διάταξη την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την καταγραφή και την αναπαραγωγή του ειδώλου (του φανταστικού στην προκειμένη περίπτωση) ενός αντικειμένου στο χώρο με τη βοήθεια σφαιρικών μετ. κύματος. Σαν πηγή φωτός χρησιμοποιείται ένα Laser He-Ne (1) μ.κ. $\lambda = 632.8\text{nm}$, με ισχύ εξόδου $5\,\text{mW}$. Η δέσμη του Laser ανακλώμενη από ένα σύστημα ανύψωσης από δύο μικρά επίπεδα κάτοπτρα (2), κατευθύνεται προς ένα μεταβλητό διαχωριστή δέσμης (3). Εκεί, μέρος της δέσμης ανακλάται, από την οποία και θα προκύψει το σφαιρικό μετ. κύματος με το οποίο θα φωτιστεί το αντικείμενο. Το άλλο της τμήμα διαθλάται και θ' αποτελέσει το σφαιρικό μετ. κύματος αναφοράς. Η περιστροφή του μεταβλητού διαχωριστή δέσμης περί άξονα οριζόντιο με το επίπεδο της διάταξης, θα έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή του λόγου των εντάσεων των δύο δεσμών, γεγονός που καθίσταται απαραίτητο για την καταγραφή και την αναπαραγωγή των ειδώλων του αντικειμένου. Θα πρέπει να ε-

παναλάβουμε εδώ ότι η ισχύς της δέσμης αναφοράς που προσπίπτει στο φιλμ, θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από αυτή που προέρχεται από το αντικείμενο. Η διαθλώμενη από το διαχωριστή δέσμη, ανακλώμενη στο επίπεδο κάτοπτρο (4) περνάει



(Εικ. 2.27)

από ένα ηθμό χώρου (5) και μετατρέπεται σε σφαιρικό μετ. κύματος. Προκειμένου μάλιστα το μέτωπο αυτό να διευρυνθεί περαιτέρω, μπροστά από τον ηθμό χώρου τοποθετούμε ένα αρνητικό φακό (6). Το εύρος του σφαιρικού μετ. κύματος που αναδύεται τελικά από το φακό, είναι επαρκές προκειμένου να φωτίσει στο σύνολό του ένα φωτ. φιλμ τοποθετημένου στη θέση (7). Πρόκειται για το μετ. κύματος της αναφοράς. Η ανακλώμενη δέσμη του Laser από τον διαχωριστή στη θέση (3), ανακλάται και πάλι από ένα επίπεδο κάτοπτρο στη θέση (8) και διέρχεται από ένα ηθμό χώρου στη θέση (9). Μετατρέπεται από τον τελευταίο και από έναν αρνητικό φακό στη θέση (10) σε ένα διευρυμένο σφαιρικό μετ. κύματος. Το μέτωπο αυτό φωτίζει το αντικείμενο (εδώ ένα αγαλματάκι), που βρίσκεται στη θέση (11). Το περιθλώμενο από το αντικείμενο μετ. κύματος, έρχεται σ' επαλληλία με το μετ. κύματος της αναφοράς, στη θέση όπου βρίσκεται το φωτ. φιλμ (7).

Για τη διάταξη που περιγράψαμε, θα πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής: 1) Όλα τα οπτικά εξαρτήματα που περιλαμβάνονται σ' αυτήν θα πρέπει να είναι ισχυρά πακτωμένα στην ίδια τράπεζα (π.χ. με μαγνητικό τρόπο). Και οι μετακινήσεις μεταξύ τους να μην είναι μεγαλύτερες του $\lambda/4$. Όπου λ το μ.κ. του χρησιμοποιούμενου φωτός. Πράγματι αν αυτές οι μετακινήσεις είναι μεγαλύτερες (π.χ. κατά τη

διάρκεια μιας ανεπιθύμητης δόνησης), η φωτοαντίθεση των κροσσών συμβολής που είναι να καταγραφούν στο φιλμ σχεδόν μηδενίζεται. Που σημαίνει τελικά ότι δεν εγγράφονται πληροφορίες. Και προκειμένου να μην υπάρξει μια τέτοια περίπτωση, η τράπεζα θα πρέπει να είναι ανηρτημένη σε αντιδονητικό σύστημα. 2) Η διαφορά των οπτικών δρόμων μεταξύ των δύο διαδρομών – αρχής γενόμενης από τη θέση που βρίσκεται ο διαχωριστής δέσμης – μέχρι τη θέση που βρίσκεται το φιλμ, θα πρέπει να είναι μικρότερη του μήκους συμφωνίας της χρησιμοποιούμενης πηγής φωτός (στην προκειμένη περίπτωση του Laser). Και για τη συγκεκριμένη διάταξη θα έχουμε: $(AB\Gamma)-(A\Delta E\Gamma) <$ του μήκους συμφωνίας. Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε εξασφαλίσει τη δυνατότητα συσχετισμού των δύο μετ. κύματος: Αναφοράς και αντικειμένου. Η μέτρηση της μέσης τιμής της έντασης του φωτός κατά την καταγραφή – προκειμένου να εξασφαλιστεί η γραμμικότητα κατά την έκθεση – γίνεται στο επίπεδο του φιλμ από ένα ραδιόμετρο σε W/m^2. Και μετά την έκθεσή του στον υπολογιζόμενο χρόνο, γίνεται η εμφάνισή του, η οποία μάλιστα με κατάλληλα μέσα μπορεί να γίνει χωρίς να μετακινηθεί το φιλμ.

Εφαρμογή (1): Ολογραφική συμβολομετρία

Η ***ολογραφική συμβολομετρία (holographic interferometry)*** βασίζεται στη συσχέτιση συμφώνων μεταξύ τους μετ. κύματος, με την προϋπόθεση ότι ένα από αυτά είναι αναπαραγόμενο ολογραφικά. Έχουν αναπτυχθεί πολλές τέτοιου είδους μέθοδες μετρολογίας, από τις οποίες οι πλέον χαρακτηριστικές είναι: α) Η ***ολογραφική συμβολομετία δύο εκθέσεων (two exposure holographic interferometry)***, β) Η ***ολογραφική συμβολομετρία σε πραγματικό χρόνο (real time holographic interferometry)*** και γ) Η ***κατά μέση χρονική τιμή ολογραφική συμβολομετρία (time-average holographic interferometry)***. Οι μέθοδες αυτές προσανατολίζονται για χρήση στη μηχανική, όπως και σε άλλους κλάδους της φυσικής και αφορούν τη μελέτη και τον ποσοτικό προσδιορισμό πλείστων όσων μεταβολών των αντικειμένων όπως είναι: οι μικρομετατοπίσεις, οι μικροπεριστροφές, οι παραμορφώσεις κλπ. καθώς και ο προσδιορισμός οπτικών ιδιοτήτων διαφόρων υλικών. Τα αντικείμενα αυτά μπορεί να είναι αδιαφανή, τα οποία όμως σκεδάζουν το φως (diffusely reflecting objects) ή διαφανή, ομοιογενή ή ανομοιογενή, που είναι διαπερατά από το φως. Οι ολογραφικές μέθοδες μετρολογίας είναι μεγάλης ακριβείας και μάλιστα μιας τάξης μεγέθους ακριβέστερες από τις αντίστοιχες της φωτοελαστικότητας (βλ. Κεφ. 5: Πόλωση του φωτός (ΘΕΜΑ 1)). Στα επόμενα με σύντομο τρόπο θα δώσουμε ένα παράδειγμα που αφορά τις αρχές λειτουργίας της ολογραφικής συμβολομετρίας δύο εκθέσεων και που πειραματικά επιτυγχάνεται μέσω μιας ολογραφικής διάταξης εκτός άξονα, ίδια με αυτή που περιγράψαμε στα προηγούμενα.

Σε πρώτη φάση ένα αντικείμενο φωτίζεται με μια δέσμη φωτός και το περιθλώμενο από αυτό μετ. κύματος V_O (μετ. κύματος του αντικειμένου), είναι δυνατόν να καταγραφεί σ' ένα φιλμ με τη βοήθεια ενός μετ. κύματος αναφοράς V_R. Οι κατανομές των δύο αυτών μετώπων στο επίπεδο του φιλμ είναι $V_O(x,y)$ και $V_R(x,y)$ αντίστοιχα. Σε δεύτερη φάση το αντικείμενο, έστω ότι υπόκειται σε μια σχετικά μικρού μεγέθους παραμόρφωση, η οποία οφείλεται στην πίεση που εφαρμόζουμε σ' αυτό. Τότε στο ίδιο το φωτ. φιλμ, με την ίδια ακριβώς δέσμη αναφοράς, κάνουμε μια δεύτερη καταγραφή (εννοείται πριν εμφανίσουμε το φιλμ). Τότε οι κατανομές αυτών των μετώπων στο φιλμ θα είναι: $V_O'(x,y)$(του παραμορφωμένου αντικειμένου) και $V_R(x,y)$(της αναφοράς). Έχει ληφθεί βέβαια υπόψη το μέγεθος της συνολικής έκθεσης προκειμένου να έχουμε καταγραφή στη γραμμική περιοχή του φιλμ. Κατόπιν αφού το εμφανίσουμε, μπορούμε φωτίζοντάς το με το ίδιο και πάλι μετ. κύματος αναφοράς V_R (τώρα σαν μετ. κύματος αναπαραγωγής), ν' αναπαράγουμε ταυτόχρονα τα δύο μετ. κύματος. Δηλ. αυτά τα οποία αναδύονται από το αντικείμενο, πριν και μετά την παραμόρφωσή του. Τα προαναφερόμενα όμως μετ. κύματος είναι σύμφωνα, οπότε μεταξύ τους μπορούν να συσχετιστούν. Έστω λοιπόν ότι:

$$V_O(x,y) = a(x,y)e^{-i\phi(x,y)} \tag{2.38}$$

και

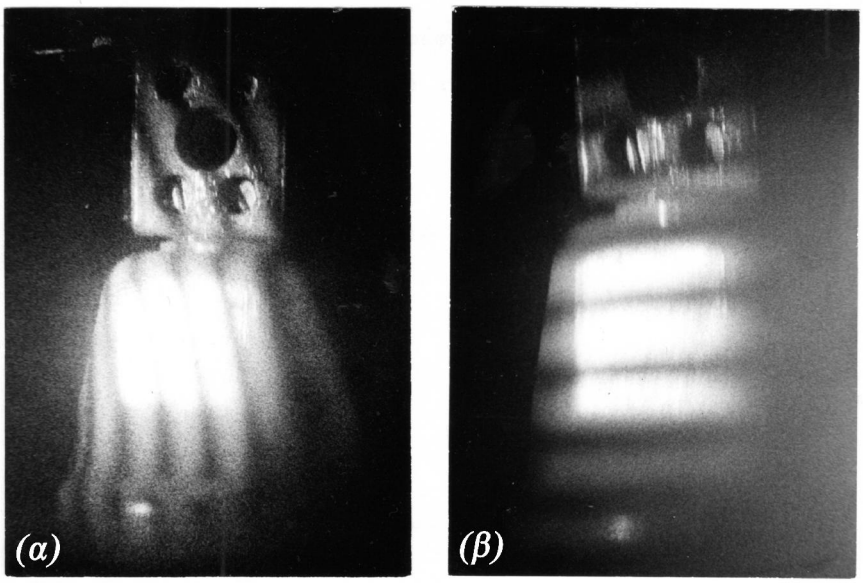
$$V_O'(x,y) = a(x,y)e^{-i[\phi(x,y)+\Delta\phi(x,y)]} \tag{2.39}$$

είναι οι κατανομές τους αμέσως μετά το φιλμ μετά το φωτισμό του από το V_R. Από τις δύο αυτές σχέσεις παρατηρούμε ότι λόγω της μικρής παραμόρφωσης που υφίσταται το αντικείμενο, τα πλάτη $a(x,y)$ παραμένουν τα ίδια, όχι όμως και οι φάσεις τους, που διαφέρουν κατά $\Delta\phi(x,y)$ από σημείο σε σημείο. Τότε η κατανομή της έντασης του φωτός λόγω της συμφωνίας τους θα δίνεται από τη σχέση:

$$\left.\begin{aligned} I(x,y) &= \left|V_O(x,y)+V_O'(x,y)\right|^2 = \\ &= \left|a(x,y)e^{-i\phi(x,y)} + a(x,y)e^{-i[\phi(x,y)+\Delta\phi(x,y)]}\right|^2 = 2a^2(x,y)\left[1+\cos\Delta\phi(x,y)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Από την οποία βλέπουμε ότι ο όρος $a^2(x,y)$ αφορά την κατανομή της έντασης του φωτός αυτού του ίδιου του αντικειμένου. Όμως το τελευταίο είναι διαμορφωμένο από κροσσούς συμβολής που καθορίζονται κατά τα γνωστά από τον παράγοντα: $1+\cos\Delta\phi(x,y)$. Τα ελάχιστα των κροσσών καθορίζουν καμπύλες των οποίων η δι-

αφορά φάσης $\Delta\phi(x,y)$ πριν και μετά την παραμόρφωση είναι περιττό πολλαπλάσιο του π. Αντίθετα για τα μέγιστα των κροσσών η διαφορά φάσης, είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π. Και στην προκειμένη περίπτωση, όπου η γενεσιουργός αιτία των μεταβολών των φάσεων $\Delta\phi$ είναι η παραμόρφωση του αντικειμένου, με τη βοήθεια της μελέτης των κροσσών (περίοδος, προσανατολισμός κλπ.) μπορούν να προσδιοριστούν π.χ. ισοτασικές καμπύλες καθώς και ο προσανατολισμός των τάσεων από σημείο σε σημείο στο παραμορφωμένο αντικείμενο. Στις (Εικ. 2.28) μπορούμε να



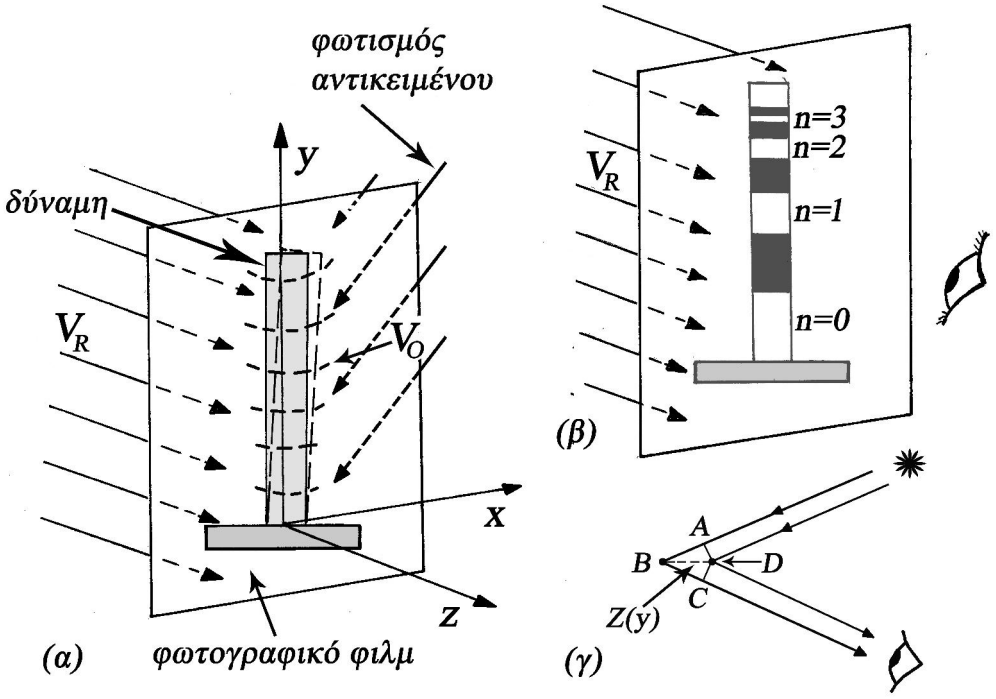
(Εικ. 2.28)

δούμε τα φανταστικά είδωλα του ίδιου αντικειμένου, κατά την εφαρμογή στο πάνω μέρος τους διαφορετικής μηχανικής τάσης. Το αντικείμενο συνίσταται από το πάνω τετράγωνο τμήμα του από κεραμικό και το κάτω κωδωνοειδές από βακελίτη. Όπως βλέπουμε οι αναπτυσσόμενοι κροσσοί στο πάνω και κάτω τμήμα του έχουν διαφορετική σχετικά περίοδο όπως και προσανατολισμό, λόγω της διαφορετικότητας των υλικών και του σχήματός τους. Θα πρέπει επίσης να πούμε ότι οι σχηματιζόμενοι κροσσοί είναι εντοπισμένοι (localized) στην επιφάνεια του αντικειμένου (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (§ 6.5.3)).

Στη γενικότερη περίπτωση, οι μεταβολές των φάσεων $\Delta\phi(x,y)$ συνδέονται με πλείστες όσες ιδιότητες φυσικών μεγεθών και φαινομένων, μια των οποίων ήταν η άσκηση μηχανικής τάσης σε αντικείμενο, με συνεπακόλουθο την εμφάνιση της σχετικής του παραμόρφωσης, που περιγράψαμε προηγουμένως. Τέτοια μεγέθη είναι: Οι μικρομετατοπίσεις και οι μικροπεριστροφές, τα πλάτη ταλαντώσεων αντικειμένων, οι θερμοκρασιακές τους μεταβολές, οι συγκεντρώσεις μάζας, οι ηλε-

κτρονικές πυκνότητες κλπ. Βέβαια η διασύνδεση των μεταβολών των κατανομών των φάσεων $\Delta\phi(x,y)$ με τον επιθυμούμενο ποσοτικό προσδιορισμό των αντίστοιχων μεγεθών, είναι έργο των εκάστοτε μεθόδων της μετρολογίας. Στα επόμενα θα παραθέσουμε μόνο ένα απλό παράδειγμα υπολογισμού μικρομετατοπίσεων* .

Στο (Σχ. 2.29α) φαίνεται μια κατακόρυφη ράβδος στο σ.σ. x,y,z, η οποία είναι πακτωμένη σε μια σταθερή βάση και φωτίζεται στη θέση που βρίσκεται, από ένα μέτωπο κύματος. Κατόπιν το περιθλώμενο από το αντικείμενο μετ. κύματος V_O έρχεται σε επαλληλία με ένα αντίστοιχο αναφοράς V_R, τα οποία λόγω της συμφω-



(Σχ. 2.29)

νίας μεταξύ τους μπορούν να συμβάλλουν στην επιφάνεια ενός φωτ. φιλμ. Στο φιλμ αυτό γίνονται δύο καταγραφές. Η πρώτη με την ράβδο κατακόρυφη και η δεύτερη αφού αυτή μετατοπιστεί μικρομετρικά, με τη δράση μιας δύναμης που εφαρμόζεται στην κορυφή της και κατά τη διεύθυνση των θετικών του άξονα z. Οι καταγραφές γίνονται χρησιμοποιώντας κάθε φορά το ίδιο μετ. κύματος αναφοράς. Κατόπιν το φιλμ εμφανίζεται και τοποθετείται στη θέση που βρισκόταν, φωτιζόμενο από μια δέσμη ανάλογη με τη δέσμη αναφοράς, στο ρόλο του μετ. κύματος αναπαραγωγής. Αν τώρα ο παρατηρητής – βρισκόμενος πίσω από τη διαφάνεια – κοιτάξει δια μέσου της, θα δει το φανταστικό είδωλο της κατακόρυφης ράβδου, το οποίο όμως είναι διαμορφωμένο από κροσσούς συμβολής. Οι κροσσοί αυτοί είναι παράλληλοι

* C.M.VEST: 'Holographic Interferometry' John Wiley & Sons, New York (1979) (Ch. 2).

προς τη βάση της και φθίνουσας περιόδου από τη βάση της προς την κορυφή. Και όσον αφορά τη γενεσιουργό τους αιτία, οφείλονται στη συμβολή των δύο μετ. κύματος που αναδύονται κατά την αναπαραγωγή του φανταστικού ειδώλου του αντικειμένου, τα οποία βέβαια μεταξύ τους είναι σύμφωνα.

Όπως υποθέσαμε, οι κάμψη της ράβδου μετά την εφαρμογή της δύναμης είναι μικρής κλίμακας. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι μετατοπίσεις των σημείων της μπορούμε να θεωρήσουμε ότι γίνονται μόνο κατά μήκος του άξονα z και η τιμή τους είναι $Z(y)$, όπου για $y=0$, $Z(0)=0$. Κατά την αναπαραγωγή του ειδώλου, δεχόμαστε ότι L είναι η απόσταση που διανύει το φως από την πηγή (από την οποία προέρχεται το μετ. κύματος της αναπαραγωγής), προς ένα σημείο του ειδώλου της ράβδου, μέχρις τελικά τη θέση που βρίσκεται ο παρατηρητής. Και αφορά το αναδυόμενο μετ. κύματος πριν την εφαρμογή της δύναμης σ' αυτήν. Η διαδρομή αυτή θα είναι: $\simeq L-2Z(y)$ κατά τη διάδοση του φωτός από την πηγή στο ίδιο – όμως μετατοπισμένο – σημείο της ράβδου μετά την εφαρμογή της δύναμης μέχρι και πάλι τον παρατηρητή. Πράγματι από το (Σχ. 2.29γ) μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο διαταραχών (που σχετίζονται αντίστοιχα με τα δύο ταυτόχρονα αναδυόμενα μετ. κύματος) και που αφορούν το ίδιο σημείο, αρχικά στη θέση B (για το ένα από τα μετ. κύματος) και στην τελική του θέση D (για το δεύτερο). Θα είναι: $AB+BC\simeq 2BD=2Z(y)$. Οπότε η αναπτυσσόμενη διαφορά φάσης των διαταραχών που προέρχονται από τα σημεία πριν και μετά από τη μετατόπιση ενός τυχαίου από τα σημεία της ράβδου θα είναι: $\Delta\phi(y)\simeq\frac{2\pi}{\lambda}\left[2Z(y)\right]$. Οι διαφορές αυτές των φάσεων των δύο ταυτόχρονα αναπαραγόμενων και ερχόμενων μετά τη διαφάνεια σε επαλληλία μετ. κύματος, θα έχουν σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση του προτύπου των κροσσών συμβολής που διαμορφώνει το φανταστικό είδωλο της ράβδου. Τα μέγιστα συμβολής, με το πρώτο να εμφανίζεται στη βάση της ράβδου (Σχ. 2.29β) για την οποία $\Delta z=0$ θα εντοπίζονται στις θέσεις για τις οποίες: $\Delta\phi(y)=2\pi n$ όπου $n=0,1,2,3,\cdots$. Επομένως θα έχουμε: $\frac{2\pi}{\lambda}\left[2Z(y)\right]=2\pi n$ και τελικά:

$$Z(y)=\frac{n\lambda}{2}\quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{2.41}$$

θα είναι ο τύπος με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε από σημείο σε σημείο, τις τιμές της μετατόπισης της ράβδου μετά την εφαρμογή της δύναμης στην κορυφή της (με αναφορά τη βάση της), αρκεί τα σημεία αυτά να βρίσκονται σε θέσεις εμφάνισης των μεγίστων.

Εφαρμογή (2): Αρχές της έγχρωμης ολογραφίας

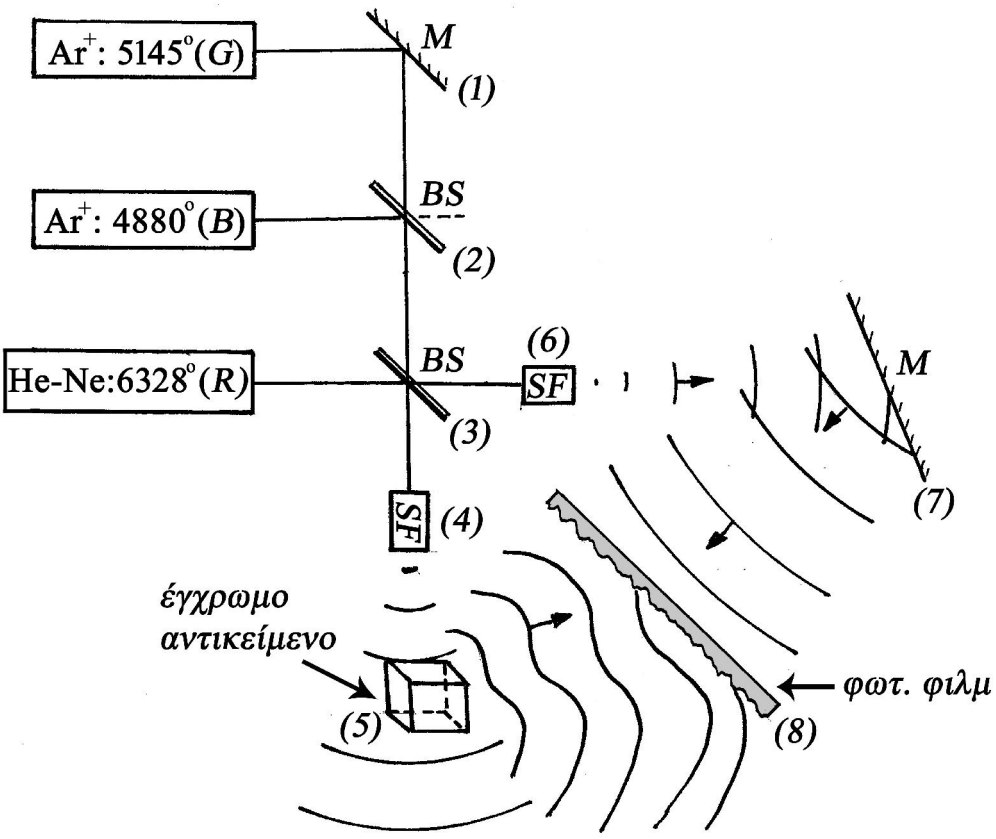
Οι γενικές αρχές της απεικόνισης στο χώρο των τριών διαστάσεων ενός εγχρώμου αντικειμένου, παρουσιάζουν ορισμένες ιδιομορφίες, οι οποίες όμως δεν διαφοροποιούνται σημαντικά από αυτές που αφορούν την καταγραφή και αναπαραγωγή ενός μονοχρωματικού μετ. κύματος.

Σε μία από αυτές τις διαδικασίες που βασίζεται στην τριχρωμία (συγκεκριμένα ανήκει στις μεθόδους RGB) οι διαφοροποιήσεις – τις οποίες αναλυτικότερα θα διευκρινίσουμε στα επόμενα – είναι οι εξής: α) Στο φιλμ (ή σ' ένα άλλο μέσο καταγραφής των οπτικών πληροφοριών) θα πρέπει να γίνουν συνολικά τρείς καταγραφές, με τη χρησιμοποίηση αντίστοιχα τριών ζευγών δεσμών αναφοράς – αντικειμένου, που ανήκουν σε τρεις διαφορετικές περιοχές του ορατού φάσματος από την άποψη του μήκους κύματός τους: Στην κόκκινη (R), την πράσινη (G) και την μπλε (B). β) Οι καταγραφές αυτές θα πρέπει να γίνουν όχι σε συνηθισμένα ολογραφικά φιλμ (των οποίων π.χ. το πάχος είναι της τάξης των $5\mu m$), αλλά σε φιλμ των οποίων το πάχος είναι αρκετά μεγάλο (π.χ. $20\mu m$ ή και μεγαλύτερο). Που σημαίνει ότι οι κροσσοί συμβολής θα εγγράφονται σ' όλο το όγκο του υλικού, δημιουργώντας τελικά μετά την εμφάνισή τους φράγματα περίθλασης όγκου. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό και σχετίζεται με τον επιλεκτικό τρόπο με τον οποίο αναπαράγεται (περιθλώμενο) ένα έκαστο από τα τρία μετ. κύματος των οποίων οι πληροφορίες είναι εγγεγραμμένες στο υλικό καταγραφής. Πρόκειται για τη λεγόμενη περίθλαση Bragg. γ) Η αναπαραγωγή του εγχρώμου ειδώλου στο χώρο, δεν γίνεται μέσω του ταυτόχρονου φωτισμού τις διαφάνειας με τα τρία μετ. κύματος αναπαραγωγής, τα αντίστοιχα αυτών τις καταγραφής. Αλλά με το φωτισμό της με μια κοινή πηγή λευκού φωτός.

Διαδικασία καταγραφής των πληροφοριών, οι οποίες προέρχονται από ένα έγχρωμο αντικείμενο στο χώρο

Η ολογραφική καταγραφή γίνεται με τη βοήθεια της διάταξης που φαίνεται στο (Σχ. 2.30) και η οποία αφορά το πρώτο στάδιο μιας τριχρωματικής (RGB) διαδικασίας απεικόνισης ενός αντικειμένου στο χώρο. Χρησιμοποιούνται τρία Laser. Δύο Laser Ar^+: Ο πρώτος συντονισμένος έτσι ώστε από την έξοδό του να εκπέμπεται δέσμη πράσινου φωτός στο μ.κ. $\lambda_G = 514.5\text{nm}$ (G) (Green). Από τον δεύτερο εκπέμπεται δέσμη σε μ.κ. $\lambda_B = 480.0\text{nm}$ (B) (Blue) η οποία είναι παράλληλη με την πρώτη. Ο τρίτος Laser είναι He-Ne και εκπέμπει κόκκινο φως, του οποίου το μ.κ. είναι κατά τα γνωστά: $\lambda_R = 632.8\text{nm}$ (R) (Red). Οι παράλληλες αυτές δέσμες (επίπεδα μετ. κύματος αλλά μικρής διαμέτρου), οδηγούνται μέσω ενός κατόπτρου (1)

και δύο διαχωριστών δέσμης (2),(3) στη δημιουργία δύο οπτικών κλάδων: Αυτού της αναφοράς και αυτού που θα φωτίσει το αντικείμενο. Στους τελευταίους συνυπάρχουν (σε κατάσταση ασύμφωνης μίξης) φώτα των τριών μ.κ. $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_B$.

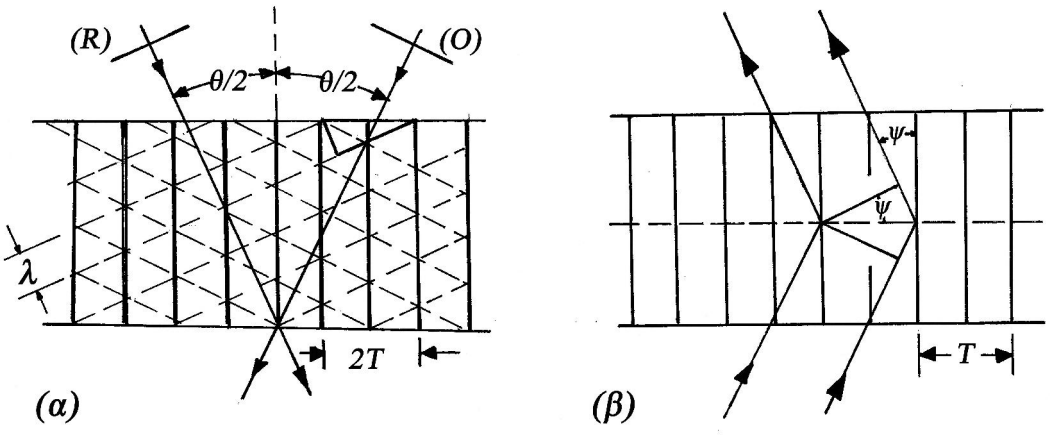


(Σχ. 2.30)

Το καθένα από αυτά είναι σύμφωνο όχι όμως και μεταξύ τους, για το λόγο ότι είναι διαφορετικών συχνοτήτων (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (ΠΑΡ/ΜΑ 2)). Κατόπιν οι τριχρωματικές αυτές δέσμες, μέσω των ηθμών χώρου (4),(6) μετατρέπονται σε σφαιρικά μετ. κύματος. Ο ένας κλάδος των δεσμών (της μίξης των τριών σφαιρικών μετ. κύματος), ανακλάται στο επίπεδο κάτοπτρο (7) και προσπίπτει σε ένα παγχρωματικό φιλμ στη θέση (8). Πρόκειται για τα τρία σφαιρικά μετ. κύματος αναφοράς. Ο άλλος κλάδος δεσμών συνίσταται και αυτός από τρία σφαιρικά μετ. κύματος. Όπου τα τελευταία προσπίπτουν στο έγχρωμο αντικείμενο (φωτίζοντάς το) και το οποίο βρίσκεται στη θέση (5). Θα έχουμε τότε την ανάδυση (περίθλαση) τριών ανεξάρτητων μετ. κύματος (διαφορετικών μ.κ.), τα οποία και προσπίπτουν από την άλλη πλευρά του φωτ. φιλμ. στη θέση (8).

Επομένως στο φωτ. φιλμ τελικά, θα έχουμε την επαλληλία τριών ζευγών μετ. κύματος αναφοράς – αντικειμένου (ασύμφωνων μεταξύ τους) που αντιστοι-

χούν σε τρία μ.κ. Με βάση αυτό το γεγονός (της συμφωνίας μεταξύ των μετώπων ιδίου μ.κ. και της ασυμφωνίας μεταξύ των τριών ζευγών), θα μπορούσαμε η καταγραφή στο φιλμ να μη γίνει ταυτόχρονα, αλλά διαδοχικά για τα τρία μ.κ. ξεχωριστά. Τελικά στο φιλμ γίνεται η καταγραφή των πληροφοριών που αφορούν τα τρία χρώματα ξεχωριστά (καθώς και των συνθέσεων μεταξύ τους), όπως και των χωρικών πληροφοριών που σχετίζονται με το αντικείμενο. Δηλ. θα έχουμε στο φιλμ τη δημιουργία τριών ανεξάρτητων συμβολογραφημάτων (συστημάτων κροσσών συμβολής). Και λόγω του μεγάλου πάχους της φωτοευπαθούς ουσίας του φιλμ οι κροσσοί θα καταγράφονται σ' όλο το εύρος του. Οπότε μετά την εμφάνισή του θα προκύψει ένα ***φράγμα περίθλασης όγκου (volume grating)***. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας καταγραφής φαίνεται στο (Σχ. 2.31α) και που οφείλεται στη σύμφωνη επαλληλία δύο επιπέδων μετ. κύματος μ.κ. λ, τα οποία προσπίπτουν στο φιλμ με γωνίες $\theta/2$ ως προς την κάθετη σ' αυτό. Το πρόβλημα είναι πανομοιότυπο με αυτό



(Σχ. 2.31)

που μελετήσαμε στην αρχή του θέματός μας (βλ. Σχ. 2.1). Κάτω από αυτές τις συνθήκες συμμετρίας, οι αναπτυσσόμενοι σε βάθος κροσσοί συμβολής θα είναι κάθετοι σε σχέση με την επιφάνεια του φιλμ και θα προσβάλλουν κατά τη διαδικασία της έκθεσης τη φωτοευπαθή του ουσία με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Όπου μετά την εμφάνισή του, θα συνιστά αυτό που ονομάσαμε φράγμα περίθλασης όγκου (την προκειμένη περίπτωση συνημιτονοειδούς μορφής (Σχ. 2.1β)).

Όμως οι περιθλαστικές ιδιότητες αυτού του είδους των φραγμάτων είναι διαφορετικές από των συνήθων, τα οποία είναι καταγεγραμμένα σε μικρό πάχος φωτοευπαθούς υλικού. Αλλά είναι σχεδόν παρόμοιες με αυτές των περιοδικών φραγμάτων τριών διαστάσεων, τις οποίες μελετήσαμε στην (§ 7.7.2) (περίθλαση των ακτινών-Χ από κρυσταλλικές δομές). Όσον αφορά την περίοδό τους, δείξαμε ότι δίνεται από τη (σχ. 2.4): $T = \lambda/[2\sin(\theta/2)]$. Και η θεωρία αποδεικνύει ότι από ένα τέ-

τοιο φράγμα, ισχυρά περιθλώμενη (Σχ. 2.31β), θα έχουμε μόνο όταν η προσπίπτουσα σ' αυτό δέσμη φωτός (στην προκειμένη περίπτωση επίπεδο μετ. κύματος) γίνεται με γωνία ψ για την οποία:

$$\psi = \begin{cases} \pm\theta/2 \\ \pm(\pi - \theta/2) \end{cases} \tag{2.42}$$

οπότε με τη βοήθεια της: $T = \lambda/[2\sin(\theta/2)]$ βρίσκουμε ότι θα ισχύει:

$$\sin\psi = \pm\lambda/2T \tag{2.43}$$

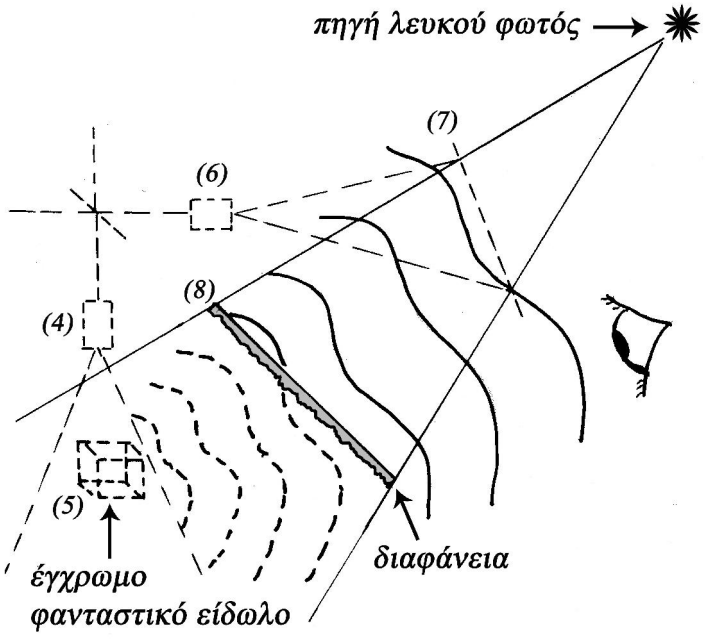
Η συνθήκη που μας δίνει η (σχ. 2.43) είναι αυτή του Bragg (της περίθλασης των ακτινών-Χ από κρυσταλλικά πλέγματα : (σχ. 7.7.2.20)). Που σημαίνει ότι μικρή μεταβολή στη γωνία πρόσπτωσης της δέσμης αναπαραγωγής στο φράγμα, θα έχει σαν αποτέλεσμα την σημαντική εξασθένιση της περιθλώμενης. Ακριβώς σ' αυτό το γεγονός στηρίζεται και η αναπαραγωγή του μετ. κύματος (ακριβέστερα πρόκειται για την ταυτόχρονη αναπαραγωγή τριών μόνο μετ. κύματος διαφορετικών μ.κ. και ασυμφώνων μεταξύ τους), το οποίο σχετίζεται με τη δημιουργία του φανταστικού (ή πραγματικού) εγχρώμου ειδώλου του αντικειμένου στο χώρο.

Διαδικασία αναπαραγωγής του εγχρώμου φανταστικού ειδώλου, στο χώρο των τριών διαστάσεων

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια ισχυρή πηγή λευκού φωτός μικρών κατά προτίμηση διαστάσεων, προκειμένου από αυτήν να εκπέμπεται ένα κατά προσέγγιση σφαιρικό μετ. κύματος. Η πηγή αυτή ουσιαστικά αντιπροσωπεύει τον ηθμό χώρου στη θέση (6) της διάταξης καταγραφής του (Σχ. 2.30). Στη διάταξη αναπαραγωγής του (Σχ. 2.32) βρίσκεται ακριβώς σε συμμετρική θέση σε σχέση με τον υποθετικό τώρα ηθμό χώρου (6) όσον αφορά το υποθετικό επίπεδο κάτοπτρο στη θέση (7). Τότε από το φωτιζόμενο με αυτές τις συνθήκες ολογράφημα, θ' αναπαραχθούν (λόγω των συνθηκών Bragg) τρία και μόνο μετ. κύματος που θ' αντιστοιχούν στα μ.κ. $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_B$. Τα υπόλοιπα από το συνεχές φάσμα του λευκού φωτός θα κατασταλούν. Και η ασύμφωνη επαλληλία των τριών αυτών μετώπων, θα μας δώσει το έγχρωμο φανταστικό είδωλο του αντικειμένου. Στις (Εικ. 2.33α,β) μπορούμε να δούμε από δύο προοπτικές γωνίες το φανταστικό είδωλο στο χώρο ενός αντικειμένου με τη μορφή καραβιού από λευκό πλαστικό υλικό.

Σημείωση

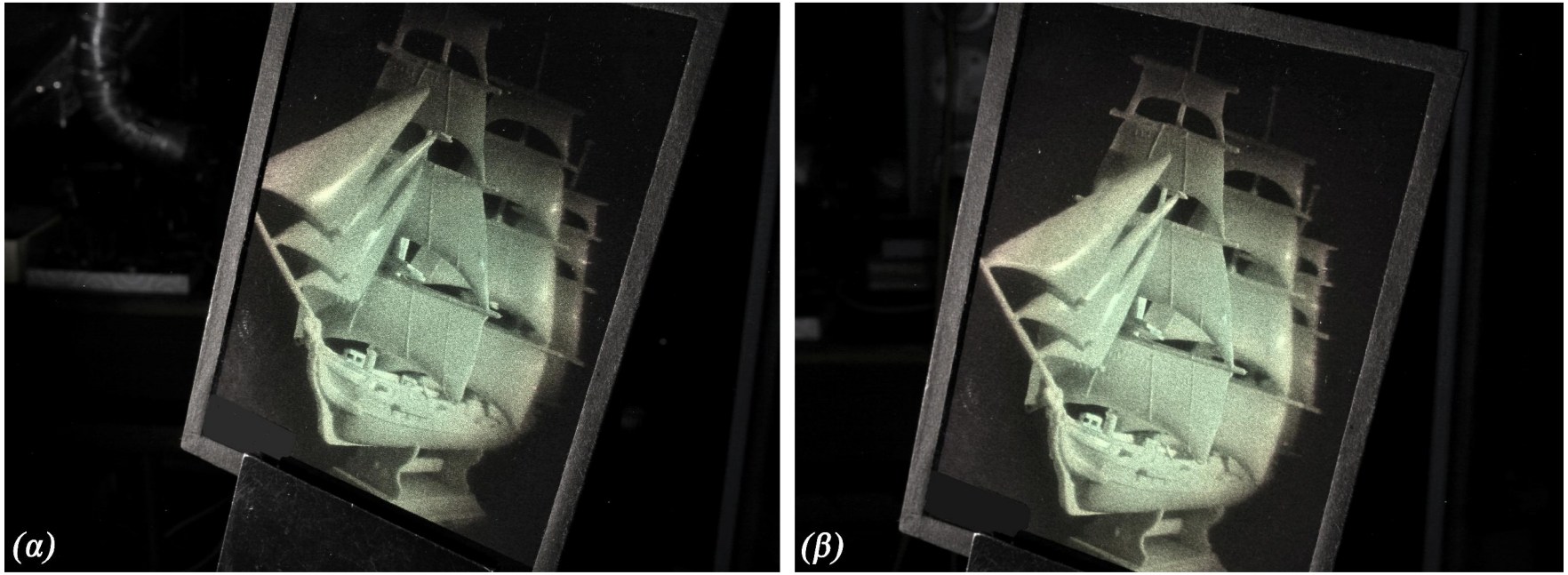
Το ***χρώμα (color)*** μίας εκπέμπουσας πηγής ή ενός φωτιζόμενου (και συγχρόνως εκπέμποντος) αντικειμένου, καθορίζεται σε γενικές γραμμές από τρείς ιδιότητες: α) Την ***απόχρωση (hue)***, β) Τον ***κόρο (saturation)*** και γ) Την ***λαμπρότητα (brightness)***. Η λαμπρότητα σχετίζεται με το φωτομετρικό μέγεθος της ***φωτοβολής (luminance)*** που αναφέρεται στις περιπτώσεις όπου η εκπέμπουσα πηγή (ή η φωτιζόμενη και συνάμα επανεκπέμπουσα επιφάνεια) είναι εκτεταμένη. Έχει δηλ. σχέση



(Σχ. 2.32)

με την 'ποσότητα φωτός' που εκπέμπεται από την πηγή ανά μονάδα στερεάς γωνίας και ανά μονάδα διακρινόμενης επιφάνειας. Η απόχρωση αφορά το 'είδος του χρώματος' π.χ. κόκκινο πράσινο κλπ. Και ο κόρος σχετίζεται με το πόσο 'έντονο ή απαλό' είναι το συγκεκριμένο χρώμα π.χ. βαθύ κόκκινο, κόκκινο, ροζ κλπ.

Η μέθοδος (RGB) της δημιουργίας μιας έγχρωμης εικόνας στο επίπεδο ή στο χώρο, ονομάζεται και προσθετική. Η χρωματικότητά της, καθορίζεται από την πρόσθεση (μίξη) ορισμένων 'ποσοτήτων' τριών βασικών χρωμάτων όπως: Ενός κόκκινου (R), ενός πράσινου (G) και ενός μπλε (B). Τα τελευταία – το καθένα ορισμένου φασματικού εύρους – μπορούν να επιλεχθούν από αντίστοιχες περιοχές του φάσματος του λευκού φωτός. Και βέβαια δεν είναι υποχρεωτικό να είναι μονοχρωματικά (δηλ. πολύ μικρού φασματικού εύρους), όπως συμβαίνει στην δική μας περίπτωση της εγγραφής με τα φώτα από τις πηγές των Laser Ar^+ και He - Ne . Επειδή ήταν δεδομένη η απαίτηση μεγάλης συμφωνίας, προκειμένου να συμβάλλουν



(Εικ. 2.33)

δέσμες αναφοράς και αντικειμένου για το κάθε χρώμα ξεχωριστά. Με βάση λοιπόν την προσθετική μέθοδο, το κίτρινο π.χ. χρώμα, ορισμένου κόρου και λαμπρότητας, μπορεί να επιτευχθεί με τη μίξη συγκεκριμένων ποσοτήτων πράσινου και κόκκινου χρώματος. Επίσης οι βασικές αποχρώσεις όπως: Το ματζέντα (κυανο-κόκκινο) ή αλλιώς ονομαζόμενου φούξια, συντίθεται από ποσότητες κόκκινου και μπλε. Τέλος το σαϊάν ή κοινώς λεγόμενο τιρκουάζ ή (σμαραγδί), προκύπτει από μίξη μπλε και πράσινου χρώματος.

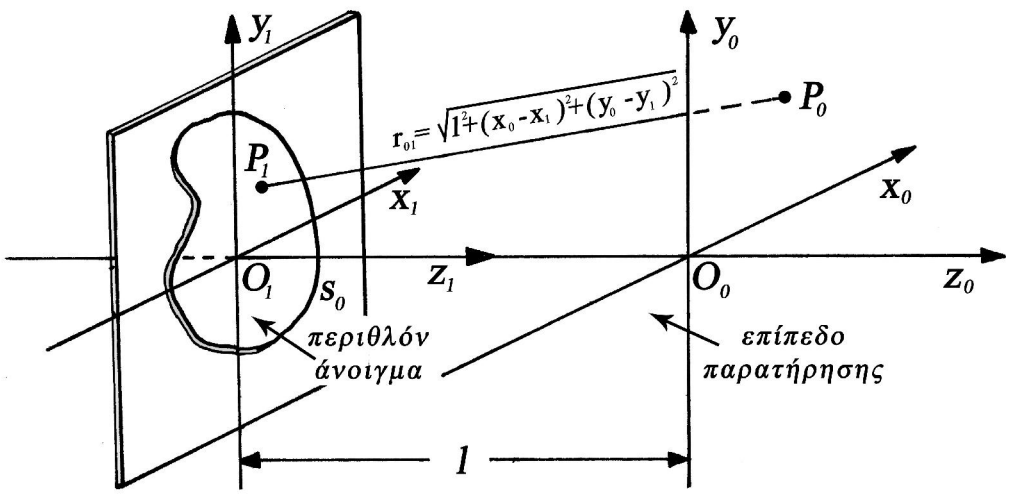
Από τις περιοχές λοιπόν ενός αντικειμένου στο χώρο που είναι έστω κίτρινες και που το φωτίζουμε (Σχ. 2.30) με το μετ. κύματος που είναι μίξη των τριών χρωμάτων προερχόμενο από τα τρία Laser, τα προς καταγραφή μετ. κύματος που εκπέμπονται θα είναι αυτά του κόκκινου και του πράσινου, ενώ το μπλε απορροφείται. Επομένως κατά την αναπαραγωγή των τριών μετώπων και την ασύμφωνη επαλληλία τους, από την περιοχή εκείνη, τα μάτια μας δεν θα δέχονται μπλε ακτινοβολία. Που σημαίνει ότι θα έχουμε την αίσθηση του κίτρινου χρώματός της. Όσον αφορά τη λευκότητα των ειδώλων των (Εικ. 2.33), αυτή οφείλεται στο ότι κατά την καταγραφή – άρα και κατά την αναπαραγωγή – συμμετείχαν τα μετ. κύματος και των τριών χρωμάτων. Πράγματι κατά την προσθετική χρωματική μέθοδο, η σύνθεση των χρωμάτων: Κόκκινου, πράσινου και μπλε μας, δίνει σαν αίσθηση το λευκό.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Οι αρχικές προσεγγίσεις στο ολοκλήρωμα περίθλασης των Fresnel-Kirchhoff, μας οδήγησαν σε μια σχέση της μορφής (βλ. ΘΕΜΑ 1 (σχ. 1.38)):

$$\Psi\left(x_0, y_0\right) \sim \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(x_1, y_1\right) e^{\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}} e^{-\frac{-i2\pi}{\lambda l}\left(x_0x_1+y_0y_1\right)} dx_1 dy_1 \qquad (1.1)$$

όπου x_1, y_1 το σ.σ. του περιελθόντος ανοίγματος, $x_0 y_0$ το σ.σ. όπου λαμβάνουμε το πρότυπο περίθλασης και l η απόσταση μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο επόμενο



(Σχ. 1.1)

σχήμα. Η (σχ. 1.1) θεωρητικά μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το περιθλόμενο πεδίο αρχής γενομένης από το περιθλόν άνοιγμα μέχρι πολύ μακριά από αυτό. Όμως αν τυπικά το σ.σ. x_0, y_0 απομακρυνθεί πολύ από το περιθλόν άνοιγμα και το τελευταίο είναι σχετικά μικρών διαστάσεων, τότε ο όρος:
$\exp\left[ik\left(x_1^2+y_1^2\right)/2l\right] \to 1$ οπότε η (σχ. 1.1) γίνεται:

$$\Psi\left(x_0, y_0\right) \sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(x_1, y_1\right) e^{-\frac{2\pi}{\lambda l}\left(x_0x_1+y_0y_1\right)} dx_1 dy_1 \qquad (1.2)$$

Τότε η περιοχή μέσα στην οποία το περιθλώμενο πεδίο υπολογίζεται από την τελευταία σχέση, ονομάζεται κατά τα γνωστά περιοχή περίθλασης Fraunhofer ή μακρινού πεδίου.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, να προσδιοριστεί προσεγγιστικά η ελάχιστη απόσταση $l_{\min}$ συναρτήσει της μέγιστης διάστασης d του περιθλόντος ανοίγματος και του μ.κ. λ για την οποία θα μπορεί να ισχύει η (σχ. 1.2).

ΛΥΣΗ

Η επίλυση του προβλήματος θα προκύψει από μια πιο αυστηρή εξέταση της διαδικασίας εξάλειψης του παράγοντα: $\exp\left[\frac{ik\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}\right]$ στο ολοκλήρωμα της (σχ. 1.1). Και εδώ μας ενδιαφέρει το πραγματικό μέρος του που είναι το: $\cos\left[\frac{k\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}\right]$. Έστω $\left(x_1^2+y_1^2\right)_{\max}=d_{\max}^2/4=d^2/4$, όπου d η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων του περιθλώντος ανοίγματος. Οπότε:

$\cos\left[\frac{k\left(x_1^2+y_1^2\right)}{2l}\right]=\cos\left[\frac{\pi}{l\lambda}\frac{d^2}{4}\right]$. Μπορούμε τώρα να υιοθετήσουμε ένα κριτήριο προκειμένου η τιμή του συνημίτονου να τείνει στη μονάδα. Και η τελευταία θα μπορούσε να είναι αυτή για την οποία: $\frac{\pi}{l\lambda}\frac{d^2}{4}<\frac{\pi}{4}$. Οπότε τελικά, για να βρισκόμαστε στην περιοχή της περίθλασης Fraunhofer (μακρινού πεδίου) θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$l=l_{\min}>\frac{d^2}{\lambda} \tag{1.3}$$

Για την περίπτωση βέβαια που ισχύει η σχέση:

$$l<\frac{d^2}{\lambda} \tag{1.4}$$

τότε η κατανομή $\Psi\left(x_0,y_0\right)$ του περιθλόμενου πεδίου υπολογίζεται από τη (σχ. 1.1) και ονομάζεται κατά τα γνωστά περίθλαση Fresnel ή κοντινού πεδίου.

2. Να βρεθούν τα μέγιστα και τα ελάχιστα του προτύπου περίθλασης Fraunhofer που οφείλεται σε μια σχισμή απείρου μήκους και πλάτους b.

ΛΥΣΗ

Η κατανομή της έντασης του φωτός για το πρότυπο περίθλασης δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$I \sim \sin^2 q / q^2 \tag{2.1}$$

όπου $q = \pi b \sin\theta / \lambda$ με b το πλάτος της σχισμής και θ τη γωνία περίθλασης. Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τα μέγιστα και τα ελάχιστα της συνάρτησης που δίνεται από τη (σχ. 2.1). $\left(\frac{\sin^2 q}{q^2}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{2\sin^2 q - 2q\sin q\cos q}{q^3} = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin q = 0 \quad (2.2) \quad \text{και} \quad \sin q - q\cos q = 0 \tag{2.3}$$

(2.2) $\rightarrow$ $\sin q = 0 \Rightarrow \sin q = \sin m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots \Rightarrow \quad q = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots$

Και προκειμένου να δούμε αν για τις τιμές του $q = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots$ έχουμε μέγιστα ή ελάχιστα, θα πρέπει να εξετάσουμε τις τιμές της:

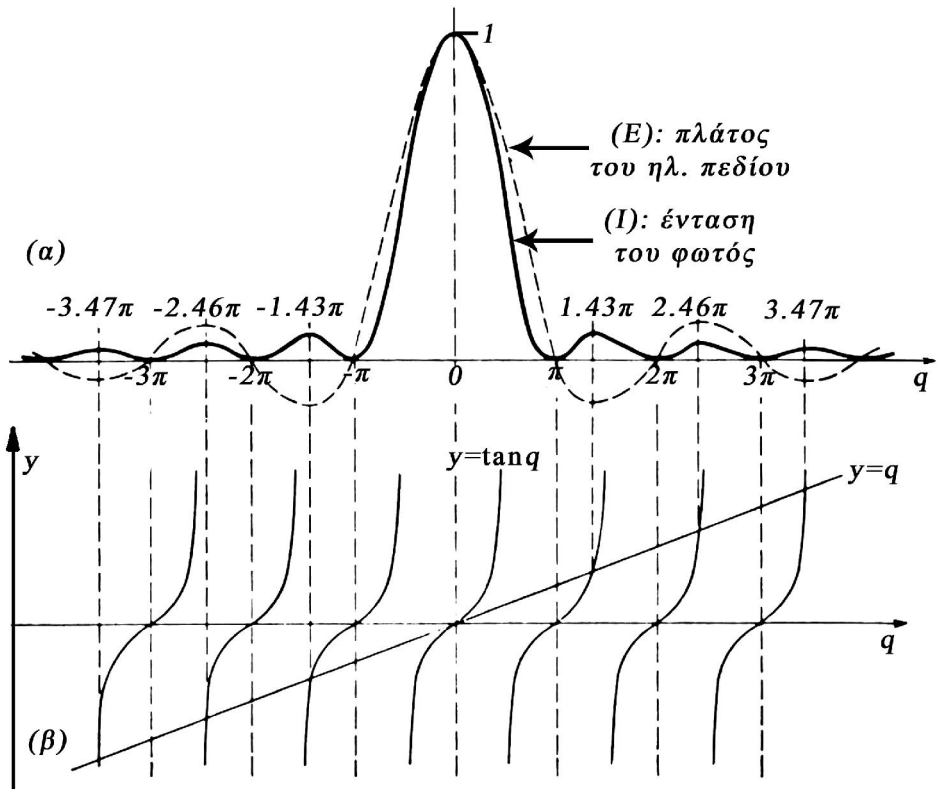
$$\left(\frac{\sin^2 q}{q^2}\right)'' = \left(\frac{2\sin^2 q - 2q\sin q\cos q}{q^3}\right)' \quad \text{για} \quad q = m\pi$$

Και μετά τις πράξεις θα έχουμε:

$$\left(\frac{\sin^2 q}{q^2}\right)'' = \frac{6\sin^2 q - 2q^2\sin^2 q + 2q^2\cos^2 q - 8q\sin q\cos q}{q^4}$$

η οποία για $q = m\pi$ γίνεται: $\left(\frac{\sin^2 q}{q^2}\right)''_{q=m\pi} = \frac{2}{q^2} > 0$. Επομένως για $q = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots$ θα έχουμε ελάχιστα. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται οι

γραφικές παραστάσεις των $(I/I_0)=\sin^2 q/q^2$ καθώς και $(E/E_0)=\sin q/q$ στις οποίες φαίνονται οι θέσεις των ελάχιστων.



(Σχ. 2.1)

Η (σχ. 2.3): $\sin q - q\cos q = 0$ οδηγεί στην:

$$\tan q = q \tag{2.4}$$

και αφορά στον προσδιορισμό των μεγίστων. Λόγω της φύσης αυτής της συνάρτησης, προτείνεται ο προσδιορισμός με τη μορφή της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων: $y=q$ και $y=\tan q$. Βλέπουμε ότι μέγιστα της $\sin^2 q/q^2$ έχουμε για τις τιμές του q για τις οποίες: $q=\pm 1.43\pi,\ \pm 2.46\pi,\ 3.47\pi,\cdots$

Πράγματι για: $\tan q = q \ \Rightarrow \ \left(\dfrac{\sin^2 q}{q^2}\right)''_{\tan q = q} = -\mathrm{co}^2\mathrm{s}\, q < 0$

Επίσης για $q \to 0$ έχουμε μέγιστο. Πράγματι με βάση τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\sin^2 q}{q^2}_{q\to 0} = \frac{0}{0} = \lim \frac{2\sin q\cos q}{2q}_{q\to 0} = \frac{0}{0} = \lim \frac{-2\sin^2 q + 2\cos^2 q}{2}_{q\to 0} = 1$$

3. Να προσδιοριστεί το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου που προέρχεται από σχισμή απείρου μήκους και πλάτους b. Το προσπίπτον στην είσοδό της μετ. κύματος είναι επίπεδο πλάτους A_0 αλλά η διεύθυνση πρόσπτωσής του σχηματίζει γωνία ϕ' με την κάθετη στο επίπεδο που βρίσκεται η σχισμή.

ΛΥΣΗ

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού (σε μια διάσταση) (Σχ. 3.1), θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα της επαλληλίας (σύμφωνα με την αρχή των Huygens - Fresnel) με τη μορφή:

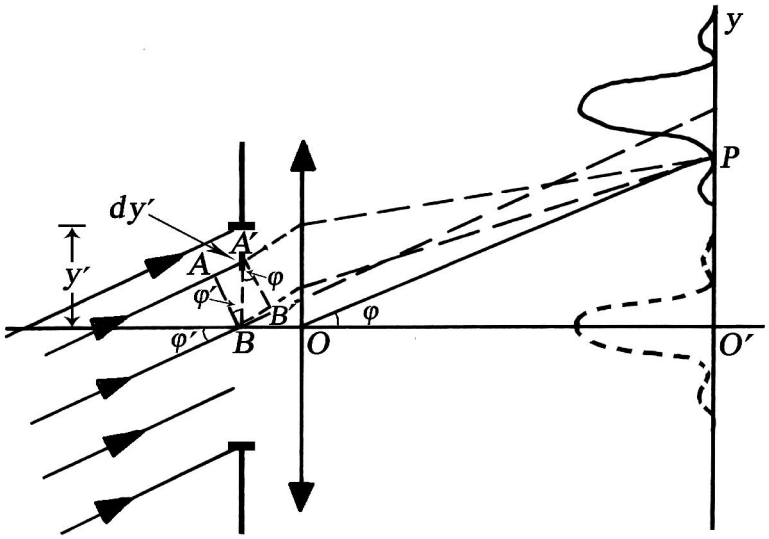
$$\Psi_P(y) = \frac{A_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-i\Delta} dy' \tag{3.1}$$

όπου $\Psi_P(y)$ η κατανομή της έντασης του περιθλώμενου ηλ. πεδίου σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη σχισμή ή στο εστιακό επίπεδο ενός φακού που βρίσκεται σχεδόν σε επαφή με τη σχισμή. Δ η διαφορά φάσης των δύο διαταραχών που οδεύουν παράλληλα περιθλώμενες από τα σημεία: B (το κέντρο της σχισμής) και A' (σε απόσταση y' από το κέντρο B της σχισμής), με γωνία ϕ σε σχέση με την κάθετη. Οι διαταραχές αυτές είναι τα ηλ. πεδία των υποθετικών σφαιρικών κυματιδίων που εκπέμπονται από τις στοιχειώδους εμβαδού dy' σημειακές πηγές στις θέσεις B και A'.

Όμως λόγω της πλάγιας πρόσπτωσης στη σχισμή του επιπέδου μετ. κύματος, θα πρέπει η διαφορά φάσης Δ μεταξύ των δύο διαταραχών να υπολογιστεί μεταξύ αντιστοίχων ισοφασικών επιφανειών. Σαν τέτοιες είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε τις AB και $A'B'$. Επομένως η διαφορά φάσης Δ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta = k\left[(BB') - (AA')\right] \tag{3.2}$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ με λ το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. $(BB') = y'\sin\phi$ και $(AA') = y'\sin\phi'$. Με ϕ' τη γωνία πρόσπτωσης και ϕ τη γωνία περίθλασης. Οπότε:



(Σχ. 3.1)

$$\Delta = k\left(\sin\phi - \sin\phi'\right)y' \tag{3.3}$$

Και με την αντικατάσταση της τελευταίας στη (σχ. 3.1) όπως και της: $\sin\phi - \sin\phi' = Q$ θα έχουμε:

$$\Psi_P(y) = \frac{A_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikQy'}dy' =$$

$$= \frac{A_0}{-ibkQ}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikQy'}d\left(-ikQy'\right) = \frac{A_0}{-ibkQ}\int_{-b/2}^{b/2} e^{z}dz \;= \left(z = -ikQ\right) =$$

$$= \frac{A_0}{-ibkQ}e^{iz}\Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{A_0}{-ibkQ}\left[e^{-ikQ(b/2)} - e^{ikQ(b/2)}\right] = \frac{A_0}{ibkQ}\left[e^{ikQ(b/2)} - e^{-ikQ(b/2)}\right] =$$

$$= \frac{A_0 2i\sin\left[kQ(b/2)\right]}{ikbQ} = A_0\frac{\sin kQ(b/2)}{kQ(b/2)} = A_0\frac{\sin\left[k\left(\sin\phi - \sin\phi'\right)(b/2)\right]}{k\left(\sin\phi - \sin\phi'\right)(b/2)}$$

και τελικά: $\Psi_P(y) = A_0\dfrac{\sin\beta'}{\beta'}$ όπου $\beta' = k\left(\sin\phi - \sin\phi'\right)(b/2)$ (3.4)

Η κατανομή αυτή του πλάτους όπως θ' αποδείξουμε αμέσως μετά, είναι μια συνάρτηση $\sin c(\,)$, πανομοιότυπη με αυτή που προκύπτει όταν η σχισμή πλάτους b φωτίζεται κάθετα. Μόνο που είναι μετατοπισμένη στο επίπεδο παρατήρησης σε σχέση με τον οπτικό άξονα που περνάει από το κέντρο του φακού κατά γωνία ϕ'. Δηλ. το πρότυπο περίθλασης θα παρατηρηθεί προς την κατεύθυνση του πλαγίως προσπίπτοντος επιπέδου μετ. κύματος (Σχ. 3.1).

Για τον προσδιορισμό αυτής της μετατόπισης, αρκεί να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της συνάρτησης που δίνεται από τη (σχ. 3.4). Και σαν τέτοιο επιλέγουμε το κύριο μέγιστο της κατανομής της, το οποίο επιτυγχάνεται (βλ. Άσκ. 2: Λυμένη) όταν $\beta' = 0$. Ή όταν $\sin\phi - \sin\phi' = 0$. Και η επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\sin\phi = \sin\phi'$ μας δίνει: $\phi = 2m\pi + \phi' \quad m \in \mathbb{Z}$. Και για $m = 0$ βρίσκουμε $\phi = \phi'$. Βλέπουμε δηλ. ότι η γωνία περίθλασης ϕ που αντιστοιχεί στο κύριο μέγιστο της συνάρτησης $\Psi_P(y) = A_0 \dfrac{\sin\beta'}{\beta'}$, είναι ίση με τη γωνία ϕ' που είναι και η γωνία πρόσπτωσης του επιπέδου μετ. κύματος στη σχισμή. Κατά την ίδια ακριβώς γωνία θα μετατοπίζεται και οποιοδήποτε άλλο σημείο της $\Psi_P(y)$.

4. Να προσδιοριστεί το πρότυπο περίθλασης μακρινού πεδίου σχισμής απείρου μήκους και πλάτους b, που η είσοδός της καλύπτεται από ένα λεπτό πρίσμα διαθλαστικής γωνίας a. Κάθετα προς τη σχισμή, προσπίπτει επίπεδο μετ. κύματος πλάτους A_0.

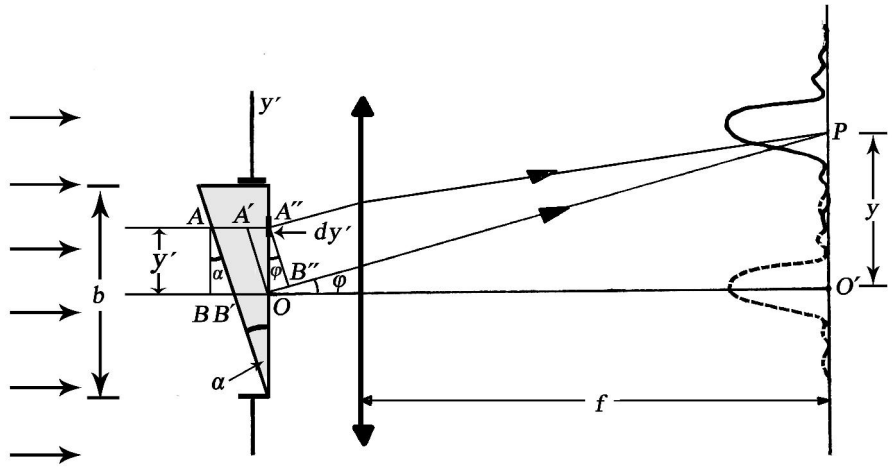
ΛΥΣΗ

Η επίλυση του προβλήματος ακολουθεί τη λογική του υπολογισμού του προτύπου περίθλασης Fraunhofer από απλή σχισμή μεγάλου μήκους και πλάτους b, με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της επαλληλίας (σύμφωνα με την αρχή των Huygens - Fresnel) με τη μορφή:

$$\Psi_P(y) = \frac{A_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i\Delta} dy' \tag{4.1}$$

όπως φαίνεται στο (Σχ. 4.1). Όπου $\Psi_P(y)$ το πλάτος του περιθλώμενου πεδίου στη θέση P $(O'P = y)$ και σε απόσταση f όση η εστιακή απόσταση του φακού

που βρίσκεται σε επαφή με τη σχισμή. A_0 το σταθερό πλάτος του προσπίπτοντος επιπέδου μετ. κύματος. dy' το στοιχειώδες εμβαδόν μιας 'σημειακής' πηγής από την οποία εκπέμπεται ένα σφαιρικό κυματίδιο που βρίσκεται στη θέση A'' και σε απόσταση y' από το κέντρο O της σχισμής (σαν σημείο αναφοράς), από το οποίο εκπέμπει μια δεύτερη 'σημειακή' πηγή. Δ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αυτών διαταραχών που ακολουθούν παράλληλες διαδρομές και συμβάλλουν στο



(Σχ. 4.1)

σημείο P του επιπέδου παρατήρησης όπου δηλ. εντοπίζεται το πρότυπο περίθλασης.

Όμως η διαφορά φάσης μεταξύ αυτών των δύο διαταραχών, θα πρέπει να υπολογιστεί μεταξύ δύο αντίστοιχων ισοφασικών επιφανειών. Και σαν τέτοιες μπορούμε να επιλέξουμε τις AB και $A''B''$. Όπου η επιφάνεια AB είναι η κάθετη από το σημείο A (κατά την είσοδο του επιπέδου μετ. κύματος στο πρίσμα) προς την OO' που είναι ο οπτικός άξονας και περνάει από το κέντρο της σχισμής. Όσο για την επιφάνεια $A''B''$ είναι αυτή που είναι κάθετη στην περιθλώμενη από το O προς το σημείο P. Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο διαταραχών θα είναι τελικά:

$$\Delta = k\left[\left(BB'\right)+n\left(B'O\right)+\left(OB''\right)\right]-k\left[n\left(AA'\right)+n\left(A'A''\right)\right] \qquad (4.2)$$

με την προϋπόθεση ότι οι διαδρομές AA'' και $B'O$ διανύονται παράλληλα προς τη βάση του πρίσματος, το οποίο κατά προσέγγιση ισχύει επειδή αυτό είναι λεπτό.

Αλλά: $(BB') = (AB)a = y'a$ (με τη γωνία του πρίσματος να μετρείται σε ακτίνια). $(B'O) = a(b/2)$ και $(OB'') = y'\sin\phi$ με ϕ τη γωνία περίθλασης. Επίσης $(AA') = (OB') = a(b/2)$ και $(A'A'') = ay'$. Και με την αντικατάσταση αυτών των σχέσεων στη (σχ. 4.2) βρίσκουμε τελικά: $\Delta = k\left[\sin\phi - a(n-1)\right]y'$. Οπότε το ολοκλήρωμα της επαλληλίας της (σχ. 4.1) παίρνει τη μορφή:

$$\Psi_P(y) = \frac{A_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik\left[\sin\phi - a(n-1)\right]y'}dy' \tag{4.3}$$

Με υπολογιστική διαδικασία παρόμοια της προηγούμενης άσκησης (Άσκ. 3), βρίσκουμε τελικά ότι:

$$\Psi_P(y) = A_0\frac{\sin\beta'}{\beta'} \tag{4.4}$$

όπου $$\beta' = kb\left[\sin\phi - a(n-1)\right]/2 \tag{4.5}$$

Και με παρόμοια συλλογιστική (όπως της προηγούμενης άσκησης), το πρότυπο περίθλασης (αυτό της απλής σχισμής πλάτους b) θα είναι μετατοπισμένο κατά γωνία: $\sin\phi \simeq \tan\phi \simeq \phi = a(n-1)$ προς κατεύθυνση αντίθετη της διαθλαστικής γωνίας του πρίσματος. Βέβαια η γωνία $\delta = a(n-1)$ (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.3.3) (σχ. 3.3.3.8)) δεν είναι άλλη παρά η γωνία ελάχιστης εκτροπής του λεπτού πρίσματος.

5. Μια σχισμή πλάτους b και μεγάλου μήκους φωτίζεται με ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος που προέρχεται από μια γραμμική πηγή που εκπέμπει σε μ.κ. λ. Η μελέτη της περίθλασης με βάση την προσέγγιση Fraunhofer (§ 7.4.2) μας οδήγησε στον προσδιορισμό του προτύπου περίθλασης του οποίου η κατανομή της έντασης του φωτός έχει τη μορφή της (Εικ. 7.4.2.5). Μια από τις βασικές προϋποθέσεις για να πάρουμε μια τέτοια κατανομή ήταν ότι το μ.κ. λ της ακτινοβολίας θα έπρεπε να είναι πολύ μικρότερο από το πλάτος b της σχισμής. Δηλ. $\lambda \ll b$.

Θα ήταν δυνατόν να περιγραφεί πως μεταβάλλεται το πρότυπο περίθλασης, για την περίπτωση για την οποία το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι αρκετά μεγαλύτερο του πλάτους b ; Δηλ. όταν: $\lambda \gg b$.

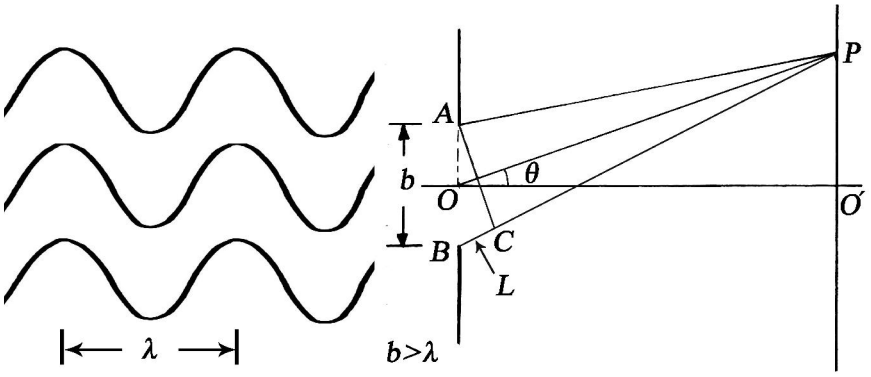
ΛΥΣΗ

Για την περίπτωση όπου $\lambda \ll b$ το πρότυπο περίθλασης (η κατανομή της έντασης του φωτός) δίνεται από τη σχέση: $I \sim \frac{\sin^2 q}{q^2}$ όπου $q = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$ και θ η γωνία περίθλασης. Γνωρίζουμε επίσης ότι τη θέση του πρώτου ελάχιστου της κατανομής το παίρνουμε όταν $q = \pi$. Δηλ. για τη θέση P που αντιστοιχεί σ' αυτό θα ισχύει:

$$\sin\theta = \lambda / b \tag{5.1}$$

Όταν όμως $\lambda \gg b$ τότε από τη (σχ. 5.1) προκύπτει ότι $\sin\theta > 1$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει.

Από το (Σχ. 5.1) όμως βλέπουμε ότι η διαφορά του οπτικού δρόμου για ένα



(Σχ. 5.1)

σημείο P του επιπέδου παρατήρησης (όπου και παίρνουμε το πρότυπο περίθλασης) με την οποία συμβάλλουν οι διαταραχές που προέρχονται από τα άκρα A, B της σχισμής, δίνεται από τη σχέση: $L = BP - AP$. Και η μέγιστη τιμή της θα είναι: $L_{\max} = b$ (για $\theta = 90^0$), Δηλ. για σημεία που το P απομακρύνεται πολύ από το κέντρο O' του προτύπου. Στο σημείο P συμβάλλουν και οι

ενδιάμεσες μεταξύ των A, B διαταραχές για να μας δώσουν τελικά κατά τα γνωστά αθροιζόμενες με σύμφωνο τρόπο την τελική τιμή της έντασης του πεδίου (και κατά προέκταση την ένταση του φωτός). Αν όμως θεωρήσουμε ότι το λ είναι αρκετά μεγαλύτερο του b ($\lambda \gg b$) τότε οι διαφορές αυτές των οπτικών δρόμων που το όριό τους είναι το b, θα είναι αρκετά μικρότερες από το μ.κ. λ. Που σημαίνει ότι θα συμβάλλουν στα διάφορα σημεία του επιπέδου παρατήρησης σχεδόν εποικοδομητικά σ' όλο το εύρος του. Δηλ το τελευταίο θα φωτίζεται σχεδόν ομογενώς χωρίς την ύπαρξη αυξομειώσεων της έντασης.

Για τα τελικά αυτά συμπεράσματα βασιστήκαμε βέβαια στη βαθμωτή θεωρία της περίθλασης. Όμως μια ακριβής επίλυση αυτού του προβλήματος, απαιτεί την εφαρμογή των αρχών μιας αυστηρότερης θεωρίας. Δηλ. της διανυσματικής θεωρίας της περίθλασης του φωτός.

6. Θεωρούμε την περίθλαση Fraunhofer από ένα κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R. Να υπολογιστεί ο λόγος I/I_0 του προτύπου περίθλασης, στη θέση που σχηματίζεται το πρώτο δευτερεύον μέγιστο της έντασης του φωτός. I_0 η ένταση του φωτός στο κέντρο του προτύπου.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από την ανάλυση που έγινε στην (§ 7.5.1), ότι η κατανομή της έντασης του φωτός I που οφείλεται στην περίθλαση Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R δίνεται από τη (σχ. 7.5.1.9):

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]^2 = \left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right]^2 \tag{6.1}$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματάριθμος, θ η γωνία περίθλασης και $I = I_0$ η ένταση του φωτός στο κέντρο της κατανομής. Δηλ. για $\theta = 0$.

α) Συνθήκη για τον υπολογισμό του κυρίου μεγίστου

Πράγματι με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης των συναρτήσεων Bessel:

$J_n'(\xi)=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(\xi)-J_{n+1}(\xi)\}$ (όπου $J_n'(\xi)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης Bessel n τάξης), για $n=1\Rightarrow J_1'(\xi)=\frac{1}{2}\{J_0(\xi)-J_2(\xi)\}$ και για: $\xi=0$ δηλ. για $\theta=0$ $J_1'(0)=\frac{1}{2}\{J_0(0)-J_2(0)\}=\frac{1}{2}\{1-0\}=\frac{1}{2}$. Οπότε:

$\left.\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right|_{\xi\to 0}=\frac{0}{0}=\left.\frac{2J_1'(\xi)}{\xi'}\right|_{\xi\to 0}=\frac{2(1/2)}{1}=1$ (μέσω του κανόνα του L' Hospital). Δηλ. τελικά: $\left.\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right|_{\xi\to 0}=1$. Οπότε και $\left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right]^2=1$ Δηλ. για $\theta=0$ $I=I_0$.

β) Γενική συνθήκη για τον υπολογισμό των μεγίστων

Θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\left[\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right]_\xi'=0 \quad (\text{όπου } \xi=kR\theta) \tag{6.2}$$

Αλλά: $\left[\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right]_\xi'=\frac{\xi J_1'(\xi)-J_1(\xi)}{\xi^2}=0$. Και δεδομένου ότι ήδη χρησιμοποιήσαμε την αναδρομική σχέση: $J_1'(\xi)=\frac{1}{2}\{J_0(\xi)-J_2(\xi)\}\Rightarrow$

$$\left[\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right]_\xi'=\frac{(\xi/2)\{J_0(\xi)-J_2(\xi)\}-J_1(\xi)}{\xi^2}=\frac{J_0(\xi)}{2\xi}-\frac{J_2(\xi)}{2\xi}-\frac{J_1(\xi)}{\xi^2}=0\Rightarrow$$

$$\left[\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right]_\xi'=\frac{1}{2\xi}\left\{J_0(\xi)-\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right\}-\frac{J_2(\xi)}{2\xi}=0 \tag{6.3}$$

Όμως από την επίσης γνωστή αναδρομική σχέση των συναρτήσεων Bessel: $J_{n+1}(\xi)=\frac{2n}{\xi}J_n(\xi)-J_{n-1}(\xi)$ για $n=1$ θα έχουμε:

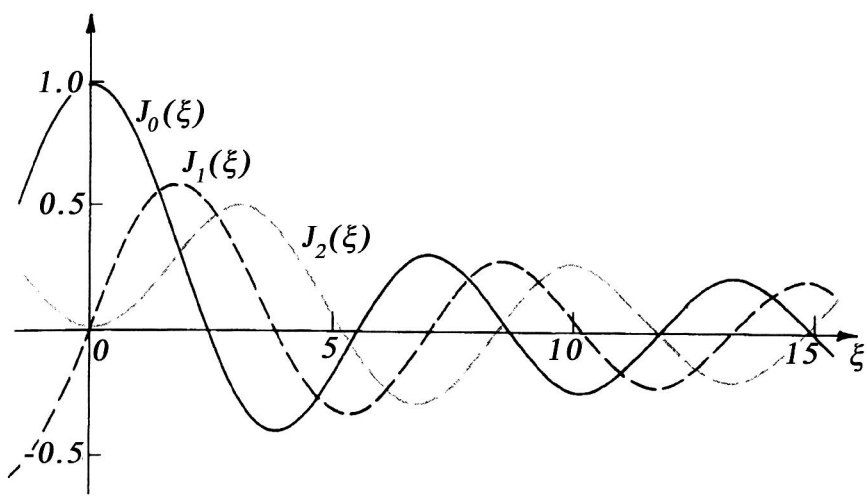
$$J_2(\xi)=\frac{2}{\xi}J_1(\xi)-J_0(\xi) \tag{6.4}$$

Και αν η (σχ. 6.4) αντικατασταθεί στη (σχ. 6.3) βρίσκουμε τελικά:

$\left[\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right]'_{\xi} = \frac{J_2(\xi)}{\xi} = 0$. Επομένως η συνθήκη για την επίτευξη μεγίστων είναι ισοδύναμη με την:

$$J_2(\xi) = 0 \tag{6.5}$$

Στο (Σχ. 6.1) βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $J_2(\xi)$ συναρτήσει του $\xi = kR\theta$, από την οποία μπορούμε προσεγγιστικά να προσδιορίσουμε της τιμές του ξ για τα οποία έχουμε μηδενικά ελάχιστα. Για μεγαλύτερη ακρίβεια μπορούμε ν' ανατρέξουμε σε πίνακες τιμών της $J_2(\xi)$. Από



(Σχ. 6.1)

εκεί μπορούμε να βρούμε ότι:

$$J_2(\xi) = 0 \quad \text{όταν:} \quad \xi = 0, \pm 5.136,\ \pm 8.42,\ \pm 11.6, \cdots \tag{6.6}$$

Και για $\xi = 0$ συναντούμε το κύριο μέγιστο της έντασης του φωτός, όπως το υπολογίσαμε προηγουμένως. Οπότε για $\xi = 5.136$ θα έχουμε το πρώτο δευτερεύον μέγιστο του οποίου η τιμή θα είναι: $\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right]^2_{\xi=5.136} = \left[\frac{2\times(-0.3397)}{5.136}\right]$. Οπότε

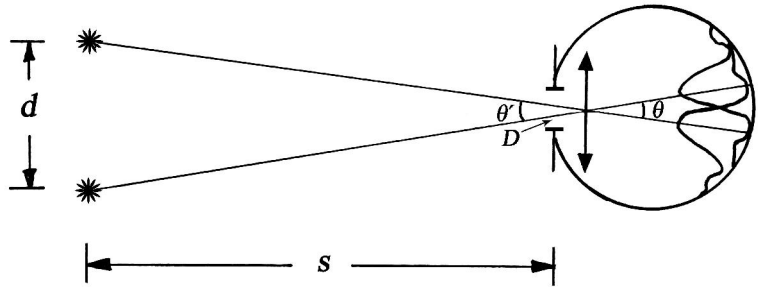
τελικά βρίσκουμε: $\frac{I}{I_0} = 0.0175$. Επίσης το δεύτερο δευτερεύον μέγιστο το συναντούμε όταν $\xi = 8.42$. Για την τιμή αυτή του ξ θα έχουμε:

$J_1(\xi = 8.42) = 0.2916$. Οπότε: $\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right]^2_{\xi=8.42} = \left[\frac{2\times(0.2916)}{8.42}\right]^2 = 0.00479$.

7. Θεωρούμε ότι η ίριδα του ματιού μας έχει διάμετρο $D = 4\text{mm}$. Σε ποια απόσταση s θα ήταν δυνατόν το μάτι μας να διακρίνει σαν ξεχωριστά τα δύο μπροστινά φώτα ενός αυτοκινήτου, παίρνοντας υπόψη μας ότι η διακριτική του ικανότητα περιορίζεται μόνο από αυτήν. Το μέσο μ.κ. του εκπεμπόμενου φωτός είναι $\overline{\lambda} = 0.55\times10^{-3}\text{mm}$ και η απόσταση μεταξύ των φαναριών $d = 1.5\text{m}$.

ΛΥΣΗ

Το κάθε ένα από τα φανάρια του αυτοκινήτου σαν ανεξάρτητη πηγή, δημιουργεί μέσω του κρυσταλλώδους φακού του ματιού – ο οποίος περιορίζεται από τα όρια της κυκλικής ίριδας (διαμέτρου $D = 4\text{mm}$) – από ένα ανεξάρτητο πρότυπο περίθλασης στον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού. Το να μπορούμε να βλέπουμε σαν ξεχωριστά τα δύο φώτα του αυτοκινήτου, σημαίνει ότι οι δίσκοι του Airy στον αμφιβληστροειδή θα πρέπει μεταξύ τους να ξεχωρίζουν. Οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο του Rayleigh (για τα είδωλα των δύο πηγών που είναι μεταξύ τους ασύμφωνες) θα πρέπει στο όριο: Το μέγιστο της κατανομής της μιας να συμπίπτει – κατά τα γνωστά – με το πρώτο ελάχιστο της άλλης (Σχ. 7.1).



(Σχ. 7.1)

Τότε τα φώτα του αυτοκινήτου μόλις θα διακρίνονται. Επομένως θα έχουμε:

(1) $\sin\theta \simeq \theta = \dfrac{1.22\overline{\lambda}}{D} \simeq 0.0001677$ (2) $\sin\theta' \simeq \dfrac{d}{s} \simeq \theta'$ (3) $\theta = \theta'$

Και από το συνδυασμό αυτών των σχέσεων βρίσκουμε:

$s = \dfrac{dD}{1.22\overline{\lambda}} = \dfrac{1500\times 4}{1.22\times 0.55\times 10^{-3}} \simeq 8.94\text{km}$ (με την προϋπόθεση ότι τα μάτια του παρατηρητή δεν έχουν σφάλματα).

8. Γνωρίζουμε ότι το συνεχές φάσμα του λευκού φωτός εκτείνεται προσεγγιστικά μεταξύ των μ.κ. $\lambda_V = 400\text{nm}$ (ιώδες) και $\lambda_R = 700\text{nm}$ (βαθύ κόκκινο). Ν' αποδειχθεί ότι για φράγμα περίθλασης διερχομένου φωτός οποιασδήποτε περιόδου d, τμήμα της κόκκινης περιοχής του φάσματος $2^{\eta\varsigma}$ τάξης ($m = 2$) επικαλύπτει πάντοτε τμήμα της ιώδους περιοχής του φάσματος $3^{\eta\varsigma}$ τάξης ($m = 3$).

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει ν' αποδείξουμε (Σχ. 8.1) ότι ισχύει η σχέση:

$$\theta_{2R} > \theta_{3V} \quad \text{για κάθε } d$$

Από τον τύπο του φράγματος έχουμε: $d\sin\theta = m\lambda$ οπότε για το κάτω όριο του φάσματος $3^{\eta\varsigma}$ τάξης θα ισχύει:

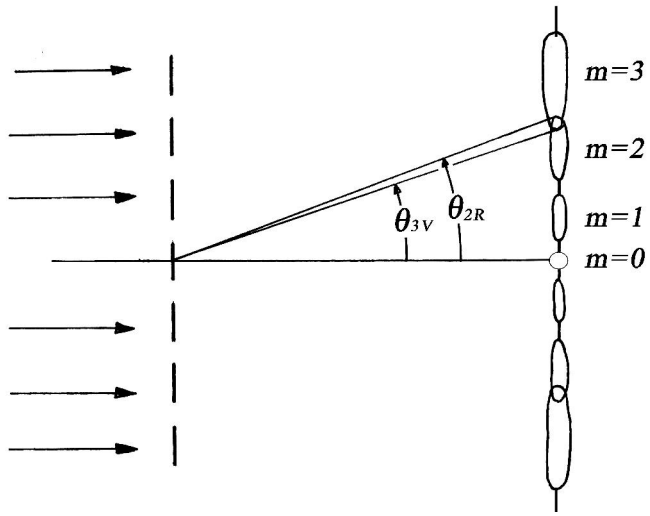
$$d\sin\theta_{3V} = 3\lambda_V \tag{8.1}$$

και για το πάνω όριο του φάσματος $2^{\eta\varsigma}$ τάξης:

$$d\sin\theta_{2R} = 2\lambda_R \tag{8.2}$$

Οπότε από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε: $\sin\theta_{2R} = \dfrac{2\lambda_R}{d}$ και $\sin\theta_{3V} = \dfrac{3\lambda_V}{d}$. Αλλά $\lambda_R = 700\text{nm}$ και $\lambda_V = 400\text{nm}$. Άρα:

$\sin\theta_{2R} = \dfrac{2\times 700}{d} = \dfrac{1400}{d}$ και $\sin\theta_{3V} = \dfrac{3\times 400}{d} = \dfrac{1200}{d}$.



(Σχ. 8.1)

Από τις οποίες προκύπτει ότι: $\sin\theta_{2R} > \sin\theta_{3V}$. Και άρα: $\theta_{2R} > \theta_{3V}$ για κάθε d.

9. Ένα φράγμα περίθλασης διερχομένου φωτός με 1250γραμμές/cm πλάτους 8cm, φωτίζεται κάθετα με φως μ.κ. $\lambda = 0.5\times 10^{-3}\,\text{mm}$. α) Πόσες τάξεις συμβολής θα εμφανιστούν στο επίπεδο παρατήρησης; β) Να υπολογιστεί ο γωνιακός διασκεδασμός του φράγματος σε rad/μm για την $m = 4$ τάξη συμβολής. γ) Πόση πρέπει να είναι η διαφορά μ.κ. δύο ακτινοβολιών έτσι ώστε να μπορούν να διαχωριστούν στην $m = 8$ τάξη συμβολής;

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο του φράγματος: $d\sin\theta = m\lambda$ και για $\theta = 90^0$ θα έχουμε:
$m = \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{(1/1250)}{0.5\times 10^{-4}} = 16$.

β) $d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow d\cos\theta d\theta = md\lambda \Rightarrow \dfrac{d\theta}{d\lambda} = \dfrac{m}{d\cos\theta}$.

Και για $m = 4$, $\lambda = 0.5\times 10^{-4}\,\text{cm}$, $d = (1/1250)\,\text{cm}$, από την $d\sin\theta = m\lambda$ βρίσκουμε:
$\sin\theta = 0.25 \Rightarrow \theta \simeq 14.47^0 \Rightarrow \cos\theta = 0.968$.

Και άρα: $\dfrac{d\theta}{d\lambda}=\dfrac{4}{(1/1250)\times 0.968}=5165.28(\text{rad/cm})=0.5165(\text{rad/}\mu\text{m})$.

γ) Από τον τύπο που μας δίνει τη διακριτική ικανότητα του φράγματος: $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}=mN$ για $N=8\times 1250$, $m=8$ και $\lambda=500\text{nm}$ βρίσκουμε: $\Delta\lambda=0.052\text{nm}$.

10. Ένα φράγμα περίθλασης διερχομένου φωτός πλάτους 1cm περιλαμβάνει $40\,\text{γραμμές/mm}$. α) Να υπολογιστεί για ποια τάξη m είναι δυνατόν το φράγμα να διαχωρίσει τις δύο κίτρινες $(\lambda_{D_1},\lambda_{D_2})$ κοντινές φασματικές γραμμές που εκπέμπει η λυχνία του Νατρίου. β) Ποιος θα είναι ο γωνιακός διασκεδασμός $\Delta\theta/\Delta\lambda$ σε εκείνη την περιοχή; Δίνεται: $\lambda_{D_1}=589.594\text{nm}$ και $\lambda_{D_2}=588.9973\text{nm}$.

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο που μας δίνει τη διακριτική ικανότητα του φράγματος: $\dfrac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}=mN\Rightarrow m=\dfrac{\bar{\lambda}}{N\Delta\lambda}$ για $N=10\times 40=400$, $\Delta\lambda=589.594-588.9973=0.5967\text{nm}$ και $\bar{\lambda}=\dfrac{\lambda_{D_1}+\lambda_{D_2}}{2}=\dfrac{589.594+588.9973}{2}=589.295\text{nm}$ βρίσκουμε: $m=2.4689$. Επομένως η τάξη στην οποία διαχωρίζονται οι δύο γραμμές του Νατρίου θα είναι η $m=3$.

β) $d\sin\theta=m\lambda\Rightarrow d\cos\theta d\theta=md\lambda\Rightarrow\dfrac{d\theta}{d\lambda}=\dfrac{m}{d\cos\theta}=\dfrac{m}{d\sqrt{1-\sin^2\theta}}$.

Και επειδή: $m=3$, $d=1/40$, $\bar{\lambda}=589.295\text{nm}$ και $\sin\theta=\dfrac{m\bar{\lambda}}{d}=0.07068$ βρίσκουμε τελικά: $(d\theta/d\lambda)=0.12(\text{rad/}\mu\text{m})$.

11. Έστω ότι για την περίπτωση της προσέγγισης της περίθλασης μακρινού πεδίου η κατανομή της έντασης του φωτός στο επίπεδο παρατήρησης είναι η $I(x_0,y_0)$. Ν' αποδειχθεί ότι αν το περιθλόν στοιχείο μετατοπισθεί κατά: $x_1\to x_1'$ και $y_1\to y_1'$, τότε η κατανομή της έντασης του φωτός $I'(x_0,y_0)$ που θα προκύψει, θα είναι ακριβώς η ίδια με την $I(x_0,y_0)$.

ΛΥΣΗ

Αν $t(x_1, y_1)$ είναι η συνάρτηση διαφάνειας που χαρακτηρίζει το περιθλόν στοιχείο, τότε κατά τα γνωστά (σχ. 7.2.10)

$$E(u,\upsilon) = E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{-i2\pi(ux_1+\upsilon y_1)} dx_1 dy_1 \tag{11.1}$$

(με $u \equiv -x_0/\lambda l$ και $\upsilon \equiv -y_0/\lambda l$), είναι το πλάτος της έντασης του ηλ. πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης x_0, y_0. Και όσον αφορά την ένταση του φωτός:

$$I(x_0, y_0) \sim E(x_0, y_0) \cdot E^*(x_0, y_0) = \left|E(x_0, y_0)\right|^2 \tag{11.2}$$

Μετά τη μετατόπιση η κατανομή του πλάτους του ηλ. πεδίου $E'(x_0, y_0)$ στο επίπεδο παρατήρησης (επίπεδο Fourier), θα δίνεται από τη σχέση:

$$E'(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1 - x_1', y_1 - y_1') e^{-i2\pi(ux_1+\upsilon y_1)} dx_1 dy_1 \tag{11.3}$$

Και αν θέσουμε: $x_1 - x_1' = X$, $y_1 - y_1' = Y$ θα έχουμε: $x_1 = X + x_1'$, $y_1 = Y + y_1'$ και $dx_1 = dX, dy_1 = dY$. Οπότε η (σχ. 11.3) γίνεται:

$$E'(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(X,Y) e^{-i2\pi\left[(X+x_1')u+(Y+y_1')\upsilon\right]} dXdY = e^{-i2\pi(ux_1'+\upsilon y_1')} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(X,Y) e^{-i2\pi(uX+\upsilon Y)} dXdY$$

και επειδή: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(X,Y) e^{-i2\pi(uX+\upsilon Y)} dXdY = E(x_0, y_0)$ θα έχουμε τελικά:

$$E'(x_0, y_0) = e^{-i2\pi(ux_1'+\upsilon y_1')} E(x_0, y_0) \tag{11.4}$$

Άρα η ένταση του φωτός $I'(x_0, y_0)$ μετά τη μετατόπιση θα είναι:

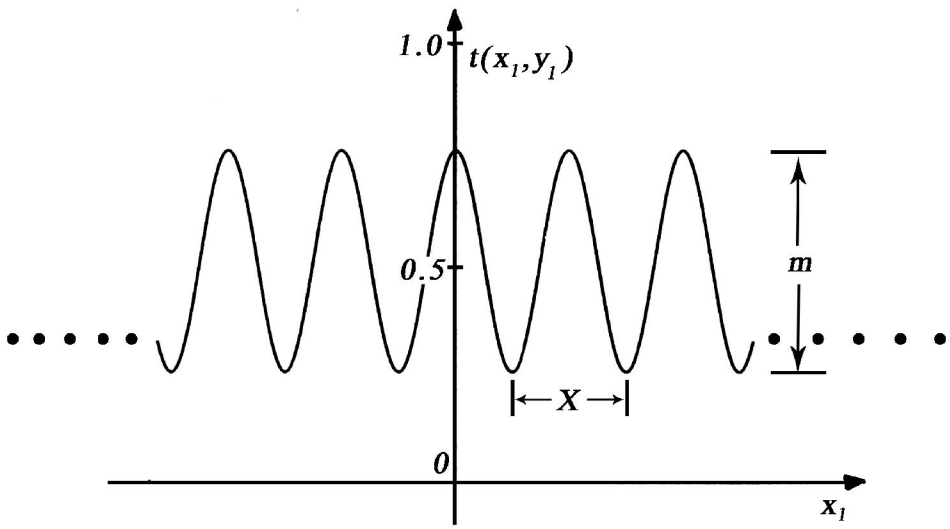
$$I'(x_0, y_0) = E'(x_0, y_0) \cdot E'^*(x_0, y_0) = e^{-i2\pi(ux_1'+\upsilon y_1')} E(x_0, y_0) e^{i2\pi(ux_1'+\upsilon y_1')} E^*(x_0, y_0).$$

Οπότε τελικά: $I'(x_0, y_0) = I(x_0, y_0)$. Δηλ. η κατανομή της έντασης του φωτός θα είναι στην ίδια θέση και πανομοιότυπη με αυτήν πριν την μετατόπιση του περιθλώντος στοιχείου.

12. Να προσδιοριστεί το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer ενός μονοδιάστατου συνημιτονικού φράγματος πλάτους σε δύο περιπτώσεις για τις οποίες: α) Η συνάρτηση διαφάνειας του περιθλώντος στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$t(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi u_0 x_1)\right] \tag{12.1}$$

Όπου m είναι το πλάτος της διακύμανσης της αμαύρωσης και u_0 η χωρική συχνότητα της συνημιτονοειδούς διακύμανσής της (το αντίστροφο της περιόδου της X). Η γραφική του παράσταση, είναι αυτή του (Σχ. 12.1).



(Σχ. 12.1)

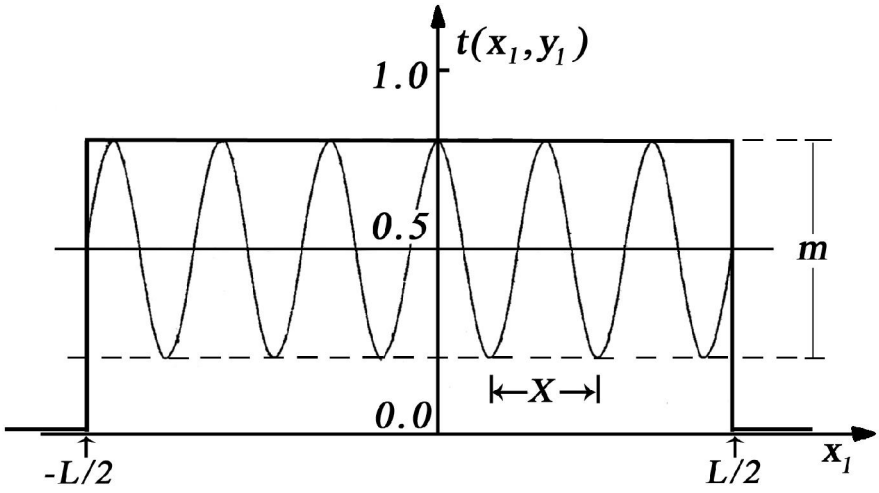
β) Η συνάρτηση διαφάνειας του περιθλώντος στοιχείου δίνεται από την:

$$\tilde{t}(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi u_0 x_1)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \tag{12.2}$$

Με τη συνάρτηση $\mathrm{rect}(x_1/L)$ να εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) = \begin{cases} 1 & \text{για } -\frac{L}{2} \le x_1 \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}. \tag{12.3}$$

Τα m, u_0 αντιπροσωπεύουν τα ίδια μεγέθη όπως και πριν και η γραφική της παράσταση είναι αυτή του (Σχ. 12.2).



(Σχ. 12.2)

ΛΥΣΗ

α) Στην πρώτη των δύο περιπτώσεων το συνημιτονικό φράγμα πλάτους, είναι πολύ μεγάλων διαστάσεων. Θεωρούμε δηλ. ότι εκτείνεται προς το $\pm\infty$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης (επίπεδο Fourier), για πρόβλημα δύο διαστάσεων δίνεται από τη (σχ. 7.2.10): $E(u,\upsilon) = E(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{-i2\pi(ux_1+\upsilon y_1)} dx_1 dy_1$. Όπου $u = -x_0/\lambda f$ και $\upsilon = -y_0/\lambda f$ με x_0, y_0 τις συντεταγμένες στο επίπεδο Fourier και f την εστιακή απόσταση του μετασχηματιστή φακού. Η τελευταία σε μία διάσταση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E(u) = E(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) e^{-i2\pi u x_1} dx_1 \qquad (u = -x_0/\lambda f) \tag{12.4}$$

οπότε:

$$E(u) = E(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi u_0 x_1)\right] e^{-i2\pi u x_1} dx_1 \tag{12.5}$$

και επειδή: $\cos\left(2\pi u_0 x_1\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i2\pi u_0 x_1}+e^{-i2\pi u_0 x_1}\right)$ η (σχ. 12.5) γίνεται:

$$E\left(u\right)=E\left(x_0\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi u x_1}dx_1+\frac{m}{4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi\left(u-u_0\right)x_1}dx_1+\frac{m}{4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi\left(u+u_0\right)x_1}dx_1 \qquad (12.6)$$

Όμως στο λογισμό των αναρτήσεων δέλτα, όπου η $\delta(z)$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$\delta\left(z\right)=\begin{cases}0 & \text{αν} \quad z\neq 0\\ \infty & \text{αν} \quad z=0\end{cases} \qquad (12.7)$$

αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi u x_1}dx_1=\delta\left(u\right),\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi\left(u-u_0\right)x_1}dx_1=\delta\left(u-u_0\right)\quad \text{και}\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi\left(u+u_0\right)x_1}dx_1=\delta\left(u+u_0\right)$$

Επομένως η (σχ. 12.6) παίρνει τη μορφή:

$$E\left(u\right)=E\left(x_0\right)=\frac{1}{2}\delta\left(u\right)+\frac{m}{4}\delta\left(u-u_0\right)+\frac{m}{4}\delta\left(u+u_0\right) \qquad (12.8)$$

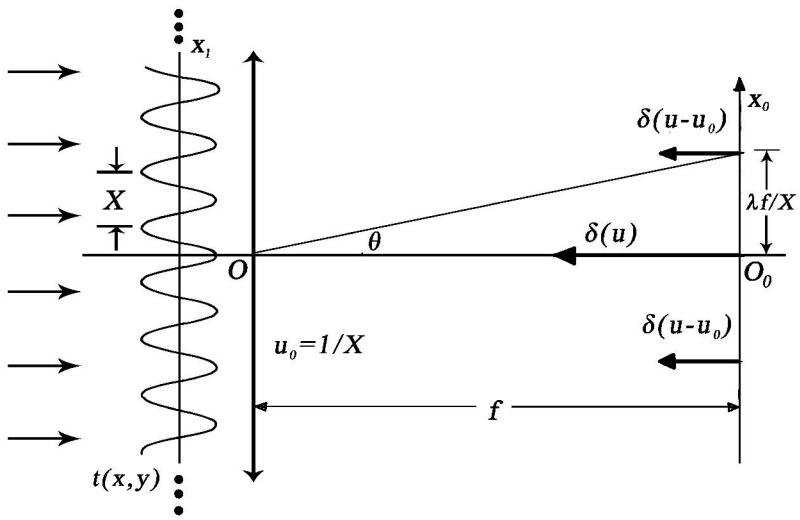
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι για την περίπτωση που θεωρούμε ότι φράγμα είναι απείρων διαστάσεων, το περιθλώμενο πεδίο συνίσταται από τρία διακεκριμένα (σχεδόν σημειακά) πεδία: Το κεντρικό στη θέση O_0 του οπτικού άξονα και ανά δύο συμμετρικά ως προς αυτόν, στις θέσεις $x_0=\pm\frac{\lambda f}{X}$, με X την περίοδο του φράγματος (όπως φαίνεται στο (Σχ. 12.3). Όσον αφορά τώρα την κατανομή της έντασης του φωτός και αυτή θα παρουσιάζει την ίδια εικόνα. Θ' αποτελείται από τρεις φωτεινές κηλίδες ακριβώς στις θέσεις που προαναφέραμε.

β) Στη δεύτερη των περιπτώσεων το φράγμα δεν είναι απείρων διαστάσεων αλλά πεπερασμένου πλάτους L όπως φαίνεται στο (Σχ. 12.2). Δηλ. το συνημιτονικό φράγμα πλάτους, περιορίζεται από ένα άνοιγμα πλάτους L. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η κατανομή του ηλ. πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(u)=E(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{m}{2}\cos(2\pi u_0 x_1)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)e^{-i2\pi u x_1}dx_1 \qquad (12.9)$$

και δεδομένου ότι: $\cos(2\pi u_0 x_1)=\frac{1}{2}\left(e^{i2\pi u_0 x_1}+e^{-i2\pi u_0 x_1}\right)$, η (σχ. 12.9) γίνεται:

$$\begin{aligned}E(u)=E(x_0)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)e^{-i2\pi u x_1}dx_1+\\&+\frac{m}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)e^{i2\pi u_0 x_1}e^{-i2\pi u x_1}dx_1+\frac{m}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)e^{-i2\pi u_0 x_1}e^{-i2\pi u x_1}dx_1\end{aligned} \qquad (12.10)$$



(Σχ. 12.3)

Και για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα εξής: Κατ' αρχή ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος:

$E_0=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)e^{-i2\pi u x_1}dx_1=\int_{-L/2}^{L/2}e^{-i2\pi u x_1}dx_1$, είναι η κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου κατά την περίθλαση Fraunhofer από σχισμή πλάτους L. Ο οποίος κατά τα γνωστά (βλ. (§ 7.4.1)) δίνεται από τη σχέση: $E_0=L\frac{\sin\pi uL}{\pi uL}$ όπου $|u|=x_0/\lambda f$. Οι άλλοι δύο όροι του ολοκληρώματος: $E_{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)e^{-i2\pi u_0 x_1}e^{-i2\pi u x_1}dx_1$ και ο

$E_{+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) e^{i2\pi u_0 x_1} e^{-i2\pi u x_1} dx_1$ στις υπό ολοκλήρωση ποσότητες ο όρος $\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right)$ πολλαπλασιάζεται με τους σταθερούς παράγοντες φάσης: $e^{-i2\pi u_0 x_1}$ και $e^{i2\pi u_0 x_1}$ αντίστοιχα. Είναι όμως πολύ εύκολο ν' αποδειχθεί (ονομάζεται ιδιότητα της χωρικής συχνοτικής μετατόπισης του μετασχηματισμού Fourier) ότι:

Αν $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi u x} dx$ τότε ισχύει: $F(u \pm u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi(u \pm u_0)x} dx$.

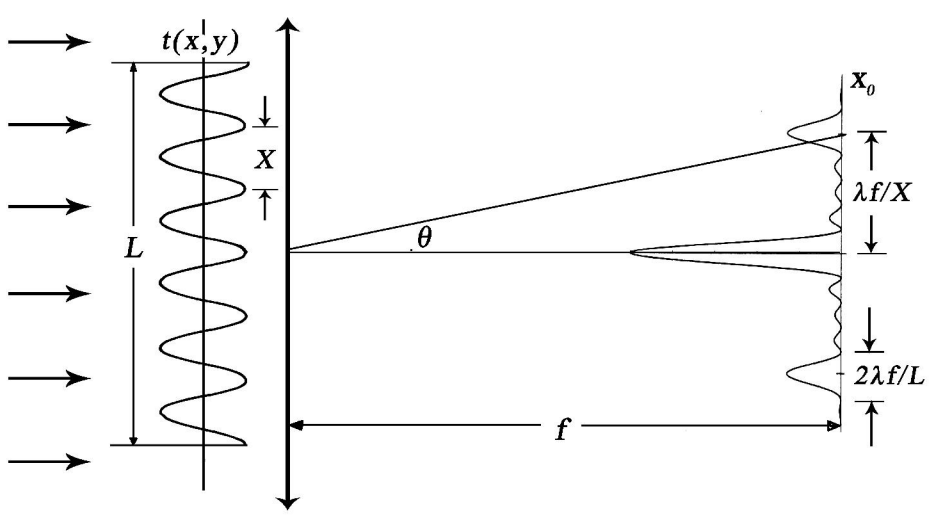
Επομένως θα έχουμε:

$E_{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) e^{-i2\pi u_0 x_1} e^{-i2\pi u x_1} dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) e^{-i2\pi(u+u_0)x_1} dx_1 = L \frac{\sin \pi(u+u_0)L}{\pi(u+u_0)L}$ και

$E_{+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) e^{i2\pi u_0 x_1} e^{-i2\pi u x_1} dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) e^{-i2\pi(u-u_0)x_1} dx_1 = L \frac{\sin \pi(u-u_0)L}{\pi(u-u_0)L}$. Οπότε τελικά η κατανομή της έντασης του ηλ. πεδίου για την περίθλαση από συνημιτονικό φράγμα πεπερασμένου πλάτους θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(u) = E(x_0) = \frac{L}{2} \frac{\sin \pi u L}{\pi u L} + \frac{mL}{4} \frac{\sin \pi(u-u_0)L}{\pi(u-u_0)L} + \frac{mL}{4} \frac{\sin \pi(u+u_0)L}{\pi(u+u_0)L} \qquad (12.11)$$

Και όσον αφορά την κατανομή της έντασης του φωτός, με την προϋπόθεση ότι οι επιμέρους κατανομές του ηλ. πεδίου δεν συσχετίζονται (δηλ. οι κατανομές είναι μεταξύ τους απομακρυσμένες), θα δίνεται από τη σχέση:



(Σχ. 12.4)

$$I\left(x_0\right)=\left(\frac{L}{2}\right)^2\frac{\sin^2\pi uL}{\left(\pi uL\right)^2}+\left(\frac{mL}{4}\right)^2\frac{\sin^2\pi\left(u-u_0\right)L}{\left[\pi\left(u-u_0\right)L\right]^2}+\left(\frac{mL}{4}\right)^2\frac{\sin^2\pi\left(u+u_0\right)L}{\left[\pi\left(u+u_0\right)L\right]^2} \quad (12.12)$$

Και για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει: $\frac{2\lambda f}{X}\gg\frac{2\lambda f}{L}$ όπως φαίνεται από το (Σχ. 12.4). Δηλ. $X\ll L$ που σημαίνει ότι η περίοδος του φράγματος θα πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από το πλάτος του.

13. Έστω $E_m=\frac{-\kappa_m E_A r_s\lambda}{\left(r_s+r_0\right)}\left[\sin\left(\omega t-kr_s-kr\right)\right]_{r=r_{m-1}}^{r=r_m}$ είναι η ένταση του ηλ. πεδίου στο σημείο P (σχ. 7.8.1.10) του χώρου, που οφείλεται στους εκπομπούς της m ζώνης Fresnel με $r_m=r_0+m\frac{\lambda}{2}$ και $r_{m-1}=r_0+\left(m-1\right)\frac{\lambda}{2}$. Τότε να δειχθεί ότι:

$E_m=\left(-1\right)^{m+1}\frac{2\kappa_m E_A r_s\lambda}{\left(r_s+r_0\right)}\sin\left[\omega t-k\left(r_s+r_0\right)\right]$ (σχ. 7.8.1.11). Δηλ. ότι η τιμή του E_m έχει αρνητικό πρόσημο όταν το m είναι άρτιος αριθμός και θετικό όταν ο m είναι περιττός $\left(m=1,2,3,\cdots\right)$.

ΛΥΣΗ

Θέτοντας $a=\frac{\kappa_m E_A r_s\lambda}{\left(r_s+r_0\right)}$ και $R=\omega t-kr_s$ θα έχουμε:

$E_m=-a\left[\sin\left(R-kr_m\right)-\sin\left(R-kr_{m-1}\right)\right]$ και με τις αντικαταστάσεις: $r_m=r_0+m\frac{\lambda}{2}$ και $r_{m-1}=r_0+\left(m-1\right)\frac{\lambda}{2}$ βρίσκουμε:

$E_m=a\left\{\sin\left[R-kr_0-km\frac{\lambda}{2}+k\frac{\lambda}{2}\right]-\sin\left[R-kr_0-km\frac{\lambda}{2}\right]\right\}$ ή

$E_m=a\left[\sin\left(Q+\pi\right)-\sin Q\right]$ με $Q=R-kr_0-m\pi$ ή

$E_m=-2a\sin Q=-2a\sin\left(R-kr_0-m\pi\right)$. Και από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι:

Αν m: άρτιος $\left(m=2,4,6,\cdots\right)$: $\sin\left(R-kr_0-m\pi\right)=\sin\left(R-kr_0\right)=\sin\left[\omega t-k\left(r_s+r_0\right)\right]$.

Αν m: περιτός $\left(m=1,3,5,\cdots\right)$:

$\sin\left(R-kr_0-m\pi\right)=-\sin\left(R-kr_0\right)=-\sin\left[\omega t-k\left(r_s+r_0\right)\right]$. Επομένως η σχέση για το E_m παίρνει τη μορφή:

$E_m=\left(-1\right)^{m+1}\dfrac{2\kappa_m E_A r_s\lambda}{\left(r_s+r_0\right)}\sin\left[\omega t-k\left(r_s+r_0\right)\right]$ (σχ. 7.8.1.11).

14. Να υπολογιστεί το εμβαδόν S_m της m ζώνης Fresnel. β) Επίσης να υπολογιστεί η μέση απόσταση r_m εκάστης ζώνης m από το σημείο P.

ΛΥΣΗ

α) Το διαφορικό ds του εμβαδού μιας ζώνης m που βρίσκεται σε απόσταση r από το σημείο P (Σχ. 7.8.1.4) δίνεται από τη (σχ. 7.8.1.9):

$$ds=2\pi\frac{r_s}{r_s+r_0}rdr \tag{14.1}$$

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε το εμβαδόν S_m της ζώνης m του Fresnel, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη (σχ. 14.1) μεταξύ των: $r_{m-1}=r_0+\left(m-1\right)\dfrac{\lambda}{2}$ και του $r_m=r_0+m\dfrac{\lambda}{2}$. Και αν θέσουμε: $a=2\pi\dfrac{r_s}{r_s+r_0}$ τότε:

$S_m=a\displaystyle\int_{r_0+(m-1)(\lambda/2)}^{r_0+m(\lambda/2)}rdr=\frac{a}{2}r^2\Big|_{r_0+(m-1)(\lambda/2)}^{r_0+m(\lambda/2)}=\frac{a}{2}\left\{\left(r_0+m\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left[r_0+\left(m-1\right)\frac{\lambda}{2}\right]^2\right\}$. Και μετά τις πράξεις βρίσκουμε: $S_m=\dfrac{a\lambda}{2}\left[r_0+\dfrac{2m\lambda}{4}-\dfrac{\lambda}{4}\right]$. Και τελικά:

$$S_m=\frac{\pi r_s\lambda}{\left(r_s+r_0\right)}\left[r_0+\frac{\left(2m-1\right)\lambda}{4}\right] \tag{14.2}$$

Που σημαίνει ότι το εμβαδόν της κάθε ζώνης αυξάνεται ελάχιστα με την αύξηση του αριθμού m της ζώνης Fresnel .

β) Θα είναι: $\bar{r}_m=\dfrac{r_m+r_{m-1}}{2}$ $\quad r_m=r_0+m\dfrac{\lambda}{2}$ και $r_{m-1}=r_0+\left(m-1\right)\dfrac{\lambda}{2}$. Και μετά την εκτέλεση των πράξεων βρίσκουμε:

$$\bar{r}_m = r_0 + \frac{(2m-1)\lambda}{4} \qquad (14.3)$$

15. Το αλγεβρικό άθροισμα των μέτρων των οπτικών διαταραχών – που προέρχονται από το σύνολο των m διαγραφόμενων ζωνών – στο σημείο P δίνεται από τη σχέση:

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots\cdots \pm E_m$$

Ν' αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$E \simeq E_1/2$$

Που σημαίνει ότι το πλάτος της οπτικής διαταραχής που παράγεται από το σύνολο των μη εμποδιζόμενων κυματιδίων που συμβάλλουν στο σημείο P, είναι περίπου ίσο με το μισό της συνεισφοράς της πρώτης ζώνης.

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα επιλύεται με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν για τις περιπτώσεις για τις οποίες: α) Ο m είναι περιττός αριθμός και β) Ο m είναι άρτιος, με δεδομένη την υπόθεση του Fresnel που αφορά τον παράγοντα κλίσης $\kappa(\theta)$ για τον οποίο:

$$\kappa(\theta) = 0 \quad \text{για} \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

α) ***Ο αριθμός των ζωνών είναι περιττός αριθμός***

Για την περίπτωση αυτή η σχέση: $E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots\cdots \pm E_m$ μπορεί να γραφεί με δύο τρόπους:

$1^{ος}$ τρόπος: $E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots\cdots \pm E_m$ (15.1)

ή
$$\left.\begin{aligned} E = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2}\right) + \left(\frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2}\right) + \left(\frac{E_5}{2} - E_6 + \frac{E_7}{2}\right) + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{E_{m-2}}{2} - E_{m-1} + \frac{E_m}{2}\right) + \frac{E_m}{2} \end{aligned}\right\} \quad (15.2)$$

$2^{ος}$ τρόπος: $E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots\cdots \pm E_m$

$$\left.\begin{aligned} E = E_1 - \frac{E_2}{2} - \left(\frac{E_2}{2} - E_3 + \frac{E_4}{2}\right) - \left(\frac{E_4}{2} - E_5 + \frac{E_6}{2}\right) - \left(\frac{E_6}{2} - E_7 + \frac{E_8}{2}\right) - \cdots \\ \cdots - \left(\frac{E_{m-3}}{2} - E_{m-2} + \frac{E_{m-1}}{2}\right) - \frac{E_{m-1}}{2} + E_m \end{aligned}\right\} \quad (15.3)$$

Δεχόμαστε τώρα τις εξής δύο πιθανότητες, που σχετίζονται με τον τρόπο που μεταβάλλεται ο παράγοντας κλίσης $\kappa(\theta)$.

(I) Το E_m να είναι μεγαλύτερο του αριθμητικού μέσου όρου των συνεισφορών των γειτονικών ζωνών E_{m-1}, E_{m+1}. Δηλ.

$$E_m > \left(E_{m-1} + E_{m+1}\right)/2 \quad (15.4)$$

Που σημαίνει ότι το καθένα από τ' αλγεβρικά αθροίσματα στις παρενθέσεις των (σχ. 15.2,3) είναι αρνητικά. Οπότε από τη (σχ. 15.2) βρίσκουμε:

$$E < \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2} \quad (15.5)$$

Και από τη (σχ. 15.3):

$$E > E_1 - \frac{E_2}{2} - \frac{E_{m-1}}{2} + E_m \quad (15.6)$$

Και επειδή ο παράγοντας κλίσης $\kappa(\theta)$ μεταβάλλεται μεταξύ του 0 και του 1 κατά μήκος πολύ μεγάλου αριθμού ζωνών, σημαίνει ότι κατ' απόλυτη τιμή το μέτρο των συνεισφορών δύο διαδοχικών ζωνών είναι περίπου το ίδιο. Επομένως: $E_1 \simeq E_2$ και $E_m \simeq E_{m-1}$. Και άρα η (σχ. 15.6) παίρνει τη μορφή:

$$E > \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2} \tag{15.7}$$

Οπότε από τις (σχ. 15.5,7) συμπεραίνουμε ότι:

$$E \simeq \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2} \tag{15.8}$$

(ΙΙ) Το E_m να είναι μικρότερο του αριθμητικού μέσου όρου των συνεισφορών των γειτονικών ζωνών E_{m-1}, E_{m+1}. Δηλ.

$$E_m < \left(E_{m-1} + E_{m+1}\right)/2 \tag{15.9}$$

Που σημαίνει ότι το καθένα από τ' αλγεβρικά αθροίσματα στις παρενθέσεις των (σχ. 15.2,3) είναι θετικά. Οπότε από τη (σχ. 15.2) βρίσκουμε:

$$E > \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2} \tag{15.10}$$

Και από τη (σχ. 15.3):

$$E < E_1 - \frac{E_2}{2} - \frac{E_{m-1}}{2} + E_m \tag{15.11}$$

Και επειδή με βάση τα προαναφερόμενα $E_1 \simeq E_2$ και $E_m \simeq E_{m-1}$ η (σχ. 15.11) παίρνει τη μορφή:

$$E < \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2} \tag{15.12}$$

Που σημαίνει ότι με βάση τις (σχ. 15.10,12) καταλήγουμε στην:

$$E \simeq \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2} \tag{15.13}$$

που είναι πανομοιότυπη με τη (σχ. 15.8).

β) ***Ο αριθμός των ζωνών είναι άρτιος αριθμός***

Για την περίπτωση αυτή η σχέση: $E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots \pm E_m$ μπορεί να γραφεί με δύο τρόπους

1ος τρόπος:
$$\left.\begin{aligned} E = E_1 - \frac{E_2}{2} - \left(\frac{E_2}{2} - E_3 + \frac{E_4}{2}\right) - \left(\frac{E_4}{2} - E_5 + \frac{E_6}{2}\right) - \cdots \\ \cdots - \left(\frac{E_{m-2}}{2} - E_{m-1} + \frac{E_m}{2}\right) - \frac{E_m}{2} \end{aligned}\right\} \tag{15.14}$$

2ος τρόπος:
$$\left.\begin{aligned} E = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2}\right) + \left(\frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2}\right) + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{E_{m-3}}{2} - E_{m-2} + \frac{E_{m-1}}{2}\right) + \frac{E_{m-1}}{2} - E_m \end{aligned}\right\} \tag{15.15}$$

(Ι) Το E_m να είναι μεγαλύτερο του αριθμητικού μέσου όρου των συνεισφορών των γειτονικών ζωνών E_{m-1}, E_{m+1}. Δηλ.

$$E_m > \left(E_{m-1} + E_{m+1}\right)/2 \tag{15.16}$$

Που σημαίνει ότι το καθένα από τ' αλγεβρικά αθροίσματα στις παρενθέσεις των (σχ. 15.14,15) είναι αρνητικά. Οπότε από τη (σχ. 15.14) βρίσκουμε:

$$E > E_1 - \frac{E_2}{2} - \frac{E_m}{2} \quad \text{ή} \quad E > \frac{E_1}{2} - \frac{E_m}{2} \tag{15.17}$$

και από τη (σχ. 15.15):

$$E < \frac{E_1}{2} + \frac{E_{m-1}}{2} - E_m \quad \text{ή} \quad E < \frac{E_1}{2} - \frac{E_m}{2} \tag{15.18}$$

Που σημαίνει ότι με βάση τις (σχ. 15.17,18) καταλήγουμε στην:

$$E \simeq \frac{E_1}{2} - \frac{E_m}{2} \tag{15.19}$$

(ΙΙ) Το E_m να είναι μικρότερο του αριθμητικού μέσου όρου των συνεισφορών των γειτονικών ζωνών E_{m-1}, E_{m+1}. Δηλ.

$$E_m < \left(E_{m-1} + E_{m+1}\right)/2 \tag{15.20}$$

Που σημαίνει ότι το καθένα από τ' αλγεβρικά αθροίσματα στις παρενθέσεις των (σχ. 15.14,15) είναι θετικά. Οπότε από τη (σχ. 15.14) βρίσκουμε:

$$E < E_1 - \frac{E_2}{2} - \frac{E_m}{2} \quad \text{ή} \quad E < \frac{E_1}{2} - \frac{E_m}{2} \tag{15.21}$$

και από τη (σχ. 15.15):

$$E > \frac{E_1}{2} + \frac{E_{m-1}}{2} - E_m \quad \text{ή} \quad E > \frac{E_1}{2} - \frac{E_m}{2} \tag{15.22}$$

Που σημαίνει ότι με βάση τις (σχ. 15.20,22) καταλήγουμε στην:

$$E \simeq \frac{E_1}{2} - \frac{E_m}{2} \tag{15.23}$$

Ο Fresnel υπέθεσε ότι η τελευταία ζώνη είναι αυτή η οποία συναντάται για $\theta = 90^0$ και η συνεισφορά της είναι μηδενική. Δηλ. $\kappa(\theta) = 0$ για $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ που σημαίνει ότι: $E_m \to 0$. Οπότε οι (σχ. 15.13,21) μας οδηγούν στην:

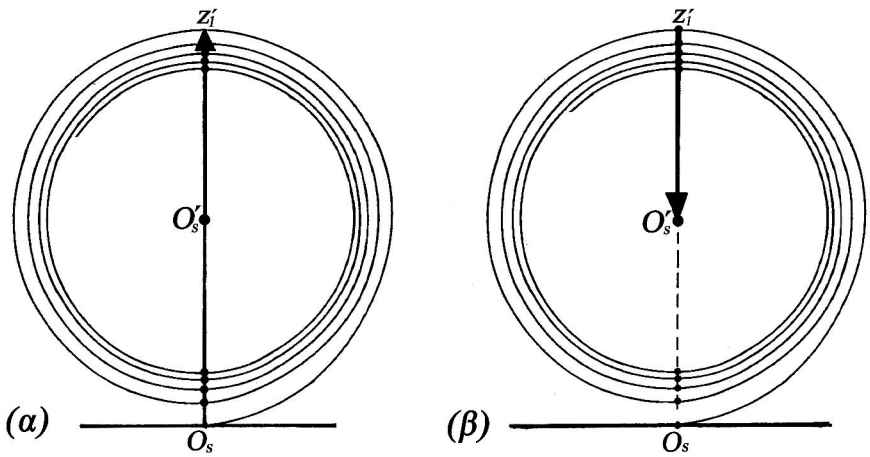
$$E \simeq \frac{E_1}{2} \tag{15.24}$$

Δηλ. το σύνολο των εκπεμπόμενων κυματιδίων που συμβάλλουν στο σημείο P και που κατανέμονται στο σύνολο των ζωνών ενός ανεμπόδιστου μετ. κύματος, αναπτύσσουν ένα πεδίο E, που κατά προσέγγιση η τιμή του είναι η μισή της τιμής του πεδίου που δημιουργεί στο ίδιο σημείο η πρώτη ζώνη.

16. Επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος, προσπίπτει σε κυκλικό άνοιγμα ορισμένης διαμέτρου. Μετά το άνοιγμα και πάνω στον οπτικό άξονα θεωρούμε ένα σημείο P από το οποίο φαίνεται η πρώτη ζώνη Fresnel. Κατόπιν το κυκλικό άνοιγμα αντικαθίσταται από ένα κυκλικό εμπόδιο της ίδιας διαμέτρου. Ζητείται για τις δύο των περιπτώσεων να προσδιοριστούν με τη βοήθεια της καμπύλης ταλάντωσης οι εντάσεις των ηλ. πεδίων, καθώς και οι εντάσεις του φωτός στο ίδιο σημείο P.

ΛΥΣΗ

α) Για την περίπτωση του κυκλικού ανοίγματος και εφόσον από το σημείο P φαίνεται η πρώτη ζώνη Fresnel, η ένταση του ηλ. πεδίου στην καμπύλη ταλάντωσης (Σχ. 16.1α) θα είναι ο φάσορας που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\overline{O_s z_1'}$.



(Σχ. 16.1)

Η αλγεβρική του τιμή είναι ίση με E_1. Και επειδή – όπως γνωρίζουμε – $E_u = E_1/2$ όπου E_u η ένταση του ηλ. πεδίου που προκαλεί το ανεμπόδιστο μετ. κύματος, θα είναι: $E_1 = 2E_u$. Και κατά προέκταση η ένταση του φωτός: $|E|^2 = 4|E_u|^2$. Δηλ. $I_1 = 4I_u$.

β) Για την περίπτωση του κυκλικού εμποδίου, η ένταση του ηλ. πεδίου στο σημείο P, θα οφείλεται στη συνεισφορά όλων των ζωνών εκτός της πρώτης. Στην καμπύλη ταλάντωσης (Σχ. 16.1β), θα είναι ο φάσορας που περιγράφεται από το

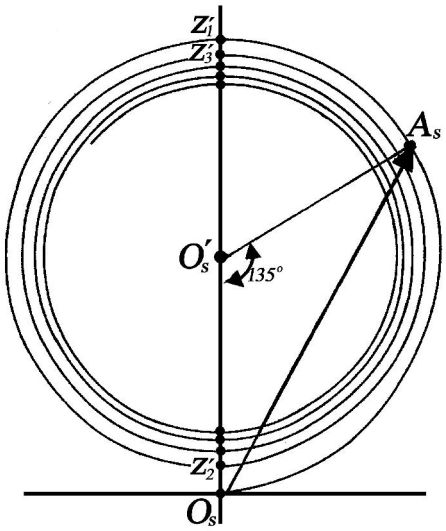
διάνυσμα $\overline{z_1'O_s'}$. Η αλγεβρική του τιμή θα είναι: $E' \simeq -E_u$. Και κατά προέκταση η ένταση του φωτός: $I' = \left|E'^2\right| \simeq \left|-E_u\right|^2 = I_u$.

Το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει για τις δύο των περιπτώσεων είναι ότι στο σημείο P έχουμε για τις δύο των περιπτώσεων μέγιστα εντάσεων . Μόνο που αυτή που αφορά το εμπόδιο, είναι το ένα τέταρτο αυτής που προέρχεται από το κυκλικό άνοιγμα.

17. Ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος προσπίπτει σ' ένα κυκλικό άνοιγμα και περιθλάται. Από ένα σημείο P του οπτικού άξονα, το άνοιγμα 'αποκαλύπτει' τα 3/4 της πρώτης ζώνης Fresnel. Να βρεθεί η ένταση του περιθλώμενου φωτός I_P συναρτήσει της έντασης I_u του ανεμπόδιστου μετ. κύματος στην ίδια θέση.

ΛΥΣΗ

Όπως βλέπουμε από το (Σχ. 17.1), το σημείο A_s της καμπύλης ταλάντωσης



(Σχ. 17.1)

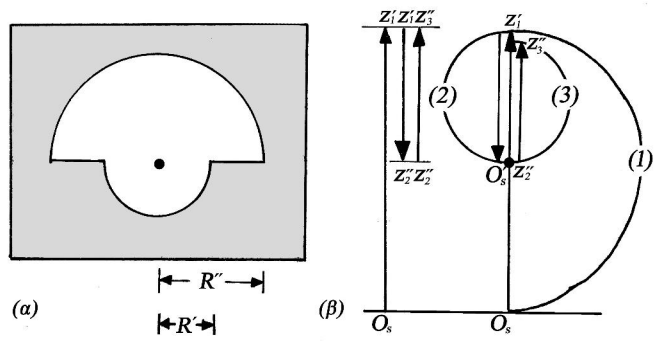
αντιστοιχεί στα 3/4 του τόξου $\widehat{O_sA_sz_1'}$ που αντιπροσωπεύει την πρώτη ζώνη Fresnel και φαίνεται από το O_s' με γωνία 180^0. Επομένως $\widehat{A_sO_s'O_s} = 135^0$. Είναι

αυτονόητο ότι το μέτρο του φάσορα $\overline{O_sA_s}$ αντιπροσωπεύει το πεδίο E_P που θέλουμε να υπολογίσουμε. Για το λόγο αυτό εφαρμόζουμε στο τρίγωνο $A_sO'_sO_s$ το νόμο των συνημιτόνων, οπότε:
$(O_sA_s)^2 = (O_sO'_s)^2 + (O'_sA_s)^2 - 2(O_sO'_s)(O'_sA_s)\cos(135^0)$. Αλλά το τρίγωνο $A_sO'_sO_s$ είναι ισοσκελές με $O_sO'_s = O'_sA_s$. Οπότε η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή:
$(O_sA_s)^2 = 2(O_sO'_s)^2\left[1-\cos(135^0)\right]$ ή $(O_sA_s)^2 = E_P^2 = 2E_u^2\left[1-\cos(135^0)\right]$. Και τελικά:
$E_P \simeq 1.745E_u$ και κατά προέκταση: $I_P \simeq 3I_u$.

18. Επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328\times10^{-3}$mm προσπίπτει σε διάφραγμα που περιλαμβάνει περιθλόν άνοιγμα της μορφής δύο ημικυκλίων του (Σχ. 18.1α) με $R' = 1.12$mm και $R'' = 1.948$mm. Να υπολογιστεί με τη βοήθεια της καμπύλης ταλάντωσης, η ένταση του φωτός I_P σε σημείο P του οπτικού άξονα που απέχει από το πέτασμα απόσταση $r_0 = 2$m.

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχή έχουμε τη δυνατότητα με τη βοήθεια της σχέσης $N_F = R^2/\lambda r_0$ – που ισχύει για προσπίπτον επίπεδο μετ. κύματος – να υπολογίσουμε τον αριθμό



(18.1)

των ζωνών Fresnel που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό των κυκλικών ανοιγμάτων ακτινών R' και R''. Για τις ακτίνες $R' = 1.12$mm, $R'' = 1.948$mm και $\lambda = 0.6328\times10^{-3}$mm, $r_0 = 2\times10^3$mm βρίσκουμε : $N'_F = 1$ και $N''_F = 3$. Και αν θεωρήσουμε ότι στη διαμόρφωση του ηλ. πεδίου E_P στο σημείο P του οπτικού

άξονα συμμετέχει όλη η πρώτη ζώνη Fresnel, από τις δύο άλλες (δεύτερη και τρίτη) συμμετέχουν μόνο οι μισές. Επομένως η καμπύλη ταλάντωσης του (Σχ. 18.1β) εξελίσσεται ως εξής: Το πρώτο τμήμα της $O_s(1)z_1'$ (η πρώτη ζώνη) μας δίνει τον φάσορα $\overline{O_s z_1'}$ που είναι η συνεισφορά (δηλ. το διανυσματικό άθροισμα στο μιγαδικό επίπεδο)έστω N τον αριθμό υποφασόρων με διαφορά φάσης μεταξύ τους π/N. Η δεύτερη όμως ζώνη παρά το ότι θα συντίθεται από το διανυσματικό άθροισμα N και πάλι υποφασόρων με διαφορά φάσης μεταξύ τους π/N, συμμετέχει κατά το μισό στη διαμόρφωση του ηλ. πεδίου στο σημείο P του οπτικού άξονα. Επομένως οι τιμές των πλατών τους θα είναι τα μισά από εκείνα, από το αν συμμετείχε ολόκληρη η δεύτερη ζώνη. Άρα η καμπύλη ταλάντωσης αρχίζει από το z_1' και κλίνει σε ημικύκλιο περίπου στο σημείο O_s' (τόξο $\widehat{z_1'(2)z_2''}$) (σχ. 18.1β). Το άθροισμα αυτών τα ων υποφασόρων θα είναι ο φάσορας $\overline{z_1'z_2''}$. Το ίδιο ισχύει και για τη συνεισφορά του μισού της τρίτης ζώνης, που είναι το ημικύκλιο $\widehat{z_2''(3)z_3''}$, με το διανυσματικό άθροισμα των υποφασόρων της να μας δίνει τον φάσορα $\overline{z_2''z_3''}$.

Τελικά ο φάσορας που αντιπροσωπεύει το ηλ. πεδίο στο P θα δίνεται από το άθροισμα: $\mathbf{E}_P = \overline{O_s z_1'} + \overline{z_1'z_2''} + \overline{z_2''z_3''}$. Επειδή όμως $\overline{z_1'z_2''} \simeq -\overline{z_2''z_3''}$ το τελικό αποτέλεσμα θα είναι ότι στη διαμόρφωση του πεδίου στο P θα συμμετέχει μόνο η πρώτη ζώνη (φάσορας $\overline{O_s z_1'}$). Αλά $\left|\overline{O_s z_1'}\right| = E_P \simeq 2E_u$ και τελικά : $I_P \simeq 4I_u$. Όπου I_u είναι η ένταση του φωτός που προκαλεί το ανεμπόδιστο μετ. κύματος στο σημείο P.

19. Για την περίθλαση Fresnel από ορθογώνιο άνοιγμα, η ένταση του ηλ. πεδίου σε ένα σημείο P του οπτικού άξονα δίνεται από τη (σχ. 7.8.8.11):

$$E_P = \frac{E_u}{2}\left[C(u)+iS(u)\right]_{u_1}^{u_2}\left[C(\upsilon)+iS(\upsilon)\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \tag{19.1}$$

όπου $C(u), C(\upsilon)$ και $S(u), S(\upsilon)$ τα ολοκληρώματα Fresnel και E_u η ένταση του ηλ. πεδίου για το μη εμποδιζόμενο μετ. κύματος στο P. Ν' αποδειχθεί ότι η ένταση του φωτός στο ίδιο σημείο δίνεται από τη (σχ. 7.8.8.13):

$$I_P = \frac{I_u}{4}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}\left\{\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]^2+\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]^2\right\} \tag{19.2}$$

ΛΥΣΗ

Η εκτέλεση των πράξεων στη (σχ. 19.1) μας δίνει:

$$E_P = \frac{E_u}{2}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]+i\left[S(u_2)-S(u_1)\right]\right\}\left\{\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]+i\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]\right\}$$

οπότε με τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$C(u_2)-C(u_1)=C_{u_2-u_1} \qquad S(u_2)-S(u_1)=S_{u_2-u_1}$$
$$C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)=C_{\upsilon_2-\upsilon_1} \qquad S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)=S_{\upsilon_2-\upsilon_1}$$

θα έχουμε μετά τις πράξεις :

$$\left.\begin{aligned} E_P &= \frac{E_u}{2}\left\{C_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}+iC_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}+iS_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}-S_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}\right\}\Rightarrow \\ E_P &= \frac{E_u}{2}\left\{\left[C_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}-S_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}\right]+i\left[C_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}+S_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}\right]\right\} \end{aligned}\right\}$$

και αν θέσουμε: $C_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}-S_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}=a$ και $C_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}+S_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}=b$ τότε επειδή: $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ θα έχουμε:

$$I_P = \frac{E_u^2}{4}\left\{\left[C_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}-S_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}\right]^2+\left[C_{u_2-u_1}\cdot S_{\upsilon_2-\upsilon_1.}+S_{u_2-u_1}\cdot C_{\upsilon_2-\upsilon_1}\right]^2\right\}$$

Και μετά τις αντικαταστάσεις:

$$\left.\begin{aligned} I_P &= \frac{E_u^2}{4}\left\{\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]-\left[S(u_2)-S(u_1)\right]\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]\right\}^2\right\} \\ &+\frac{E_u^2}{4}\left\{\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]\right\}^2\right\} \end{aligned}\right\}$$

Εάν τώρα: $\begin{aligned} &C(u_1)=\alpha,\ C(u_2)=\beta,\ C(\upsilon_1)=\gamma,\ C(\upsilon_2)=\delta \\ &S(u_1)=\alpha',\ S(u_2)=\beta'\ ,S(\upsilon_1)=\gamma'\ ,S(\upsilon_2)=\delta' \end{aligned}$

η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} I_P &= \frac{E_u^2}{4}\left\{\left\{[\beta-\alpha][\delta-\gamma]-[\beta'-\alpha'][\delta'-\gamma']\right\}^2\right\} \\ &+\frac{E_u^2}{4}\left\{\left\{[\beta-\alpha][\delta'-\gamma']+[\beta'-\alpha'][\delta-\gamma]\right\}^2\right\} \end{aligned}$$

και μετά τις πράξεις: $I_P=\frac{E_u^2}{4}\left[(\beta-\alpha)^2+(\beta'-\alpha')^2\right]\left[(\delta-\gamma)^2+(\delta'-\gamma')^2\right]$.

Τελικά με τις αντικαταστάσεις των $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ με τα ίσα τους και επειδή: $I_u=E_u^2$ θα έχουμε:

$$I_P=\frac{I_u}{4}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}\left\{\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]^2+\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]^2\right\}.$$

20. Ένα τετραγωνικό άνοιγμα πλευράς 2mm φωτίζεται από μια σημειακή πηγή S (βλ. Σχ. 7.8.8.1))(σφαιρικό μετ. κύματος) που εκπέμπει μονοχρωματικό φως μ.κ. $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\text{mm}$. Η τελευταία βρίσκεται σε απόσταση $r_{s0} = 2.8\text{m}$ από το κέντρο O του ανοίγματος. α) Ν' αποδειχθεί ότι σε μια θέση P του οπτικού άξονα SOP για την οποία $OP = r_0 = 2.8\text{m}$, βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel. β) Να υπολογιστούν οι εντάσεις I_P, I_1, I_2, I_3 (συναρτήσει του I_u) στις θέσεις P, P_1, P_2, P_3 κατά μήκος της διεύθυνσης που είναι κάθετη στον οπτικό άξονα και παράλληλη στο άξονα Ox στις θέσεις: $x_P = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\text{mm}$. γ) Για τη θέση P_1 η ένταση I_1 να προσδιοριστεί και με τη βοήθεια της σπείρας Cornu.

ΛΥΣΗ

α) Η μέγιστη διάσταση d για το περιθλόν άνοιγμα θα είναι: $d = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}\text{mm}$. Και επειδή $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\text{mm}$ $\left(d^2/\lambda\right) \simeq 12.64\text{m}$. Βλέπουμε δηλ. ότι $r_0 < d^2/\lambda$ $\left(r_0 = 2.8\text{m}\right)$. Που σημαίνει ότι βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel.

β) Κατ' αρχή πρέπει να βρούμε τη σχέση μετασχηματισμού μεταξύ των u και x, η οποία λόγω της σφαιρικότητας του προσπίπτοντος μετ. κύματος δίνεται από τη σχέση: $u = x\sqrt{\dfrac{2\left(r_{s0}+r_0\right)}{\lambda r_{s0} r_0}}$. Και για $r_{s0} = r_0 = 2.8\text{m}$ βρίσκουμε: $u \simeq 1.5x$. Επομένως για τη θέση P θα έχουμε: $\left(u_1, u_2\right) = \left(-1.5, 1.5\right)$. Και με τον ίδιο τρόπο για το: $P_1 \to \left(u_1, u_2\right) = \left(-3, 0\right)$ (σημείο που βρίσκεται στο όριο της γεωμετρικής σκιάς), $P_2 \to \left(u_1, u_2\right) = \left(-4.5, -1.5\right)$ και $P_3 \to \left(u_1, u_2\right) = \left(-6, -3\right)$. Επομένως με τη βοήθεια των τιμών του (Πίν. 7.8.8.2):

$$
\begin{aligned}
P:\ & C\left(u_1\right) = C\left(-1.5\right) = -C\left(1.5\right) = -0.4453 \quad C\left(u_2\right) = C\left(1.5\right) = 0.4453 \\
& S\left(u_1\right) = S\left(-1.5\right) = -S\left(1.5\right) = -0.6975 \quad S\left(u_2\right) = S\left(1.5\right) = 0.6975 \\
& C\left(\upsilon_1\right) = C\left(-1.5\right) = -C\left(1.5\right) = -0.4453 \quad C\left(\upsilon_2\right) = C\left(1.5\right) = 0.4453 \\
& S\left(\upsilon_1\right) = S\left(-1.5\right) = -S\left(1.5\right) = -0.6975 \quad S\left(\upsilon_2\right) = S\left(1.5\right) = 0.6975
\end{aligned}
$$

$$P_1:\ C(u_1)=C(-3)=-C(3)=-0.6058 \quad C(u_2)=C(0)=0.00$$
$$S(u_1)=S(-3)=-S(3)=-0.4963 \quad S(u_2)=S(0)=0.00$$
$$C(\upsilon_1)=C(-1.5)=-C(1.5)=-0.4453 \quad C(\upsilon_2)=C(1.5)=0.4453$$
$$S(\upsilon_1)=S(-1.5)=-S(1.5)=-0.6975 \quad S(\upsilon_2)=S(1.5)=0.6975$$

$$P_2:\ C(u_1)=C(-4.5)=-C(4.5)=-0.5261 \quad C(u_2)=C(-1.5)=-C(1.5)=-0.4453$$
$$S(u_1)=S(-4.5)=-S(4.5)=-0.4362 \quad S(u_2)=S(-1.5)=-S(1.5)=-0.6975$$
$$C(\upsilon_1)=C(-1.5)=-C(1.5)=-0.4453 \quad C(\upsilon_2)=C(1.5)=0.4453$$
$$S(\upsilon_1)=S(-1.5)=-S(1.5)=-0.6975 \quad S(\upsilon_2)=S(1.5)=0.6975$$

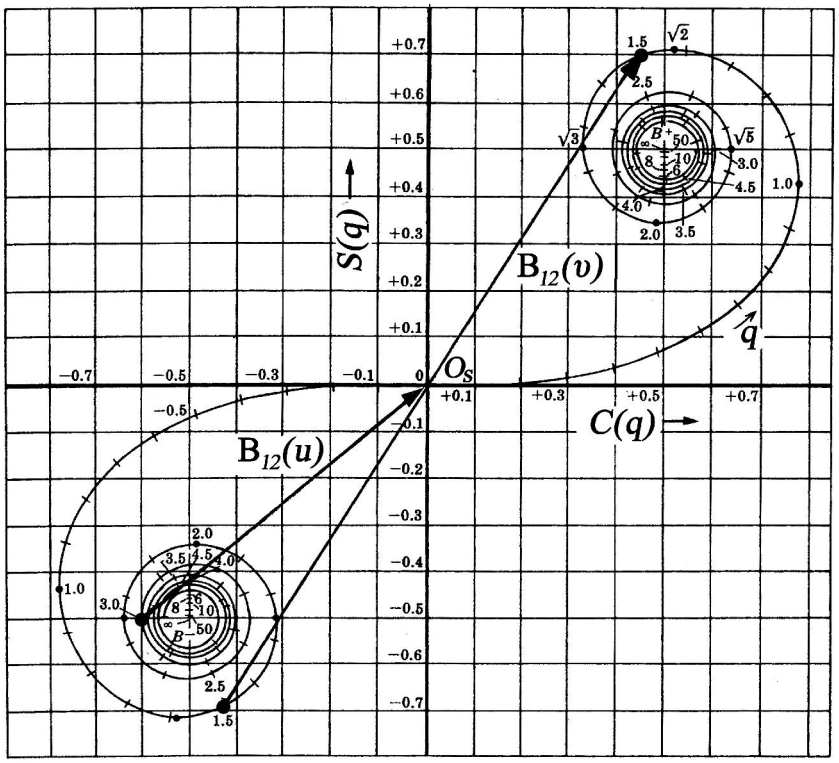
$$P_3:\ C(u_1)=C(-6)=-C(6)=-0.4995 \quad C(u_2)=C(-3)=-C(3)=-0.6058$$
$$S(u_1)=S(-6)=-S(6)=-0.4470 \quad S(u_2)=S(-3)=-S(1.5)=-0.4963$$
$$C(\upsilon_1)=C(-1.5)=-C(1.5)=-0.4453 \quad C(\upsilon_2)=C(1.5)=0.4453$$
$$S(\upsilon_1)=S(-1.5)=-S(1.5)=-0.6975 \quad S(\upsilon_2)=S(1.5)=0.6975$$

Τότε με κατ' ευθείαν αντικατάσταση των $C(\ )$ και $S(\ )$ στη (σχ. 7.8.8.13) βρίσκουμε: $I_P=1.87I_u$, $I_{P_1}=0.42I_u$, $I_{P_2}=0.05I_u$ και $I_{P_3}\simeq 0.01I_u$.

γ) Θα πρέπει με τη βοήθεια της σπείρας του Cornu (Σχ. 20.1) να προσδιορίσουμε το μέτρο των φασόρων: $\mathbf{B}_{12}(u)$ και $\mathbf{B}_{12}(\upsilon)$ που αντιστοιχούν στα σημεία: $(u_1,u_2)=(-3,0)$ και $(\upsilon_1,\upsilon_2)=(-1.5,1.5)$. Τα διανύσματα $\mathbf{B}_{12}(u)(-3,0)$ και $\mathbf{B}_{12}(\upsilon)(-1.5,1.5)$ φαίνονται εγγεγραμμένα στη σπείρα Cornu. Μετρώντας τα με κανόνα και κάνοντας αναγωγή στην κλίμακα της σπείρας βρίσκουμε τελικά για τα μέτρα τους:

$$\left|\mathbf{B}_{12}(u)\right|=0.797 \qquad \text{και} \qquad \left|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)\right|=1.6315$$

Και με κατ' ευθείαν αντικατάσταση στη (σχ. 7.8.8.20): $I_P=\frac{I_u}{4}\left|\mathbf{B}_{12}(u)\right|^2\left|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)\right|^2$ βρίσκουμε: $I_{P_1}=0.422I_u$. Συγκρινόμενη η τιμή αυτή με την τιμή που προέκυψε με βάση τον αναλυτικό υπολογισμό $\left(I_{P_1}=0.42I_u\right)$, βλέπουμε ότι σχεδόν ταυτίζονται.



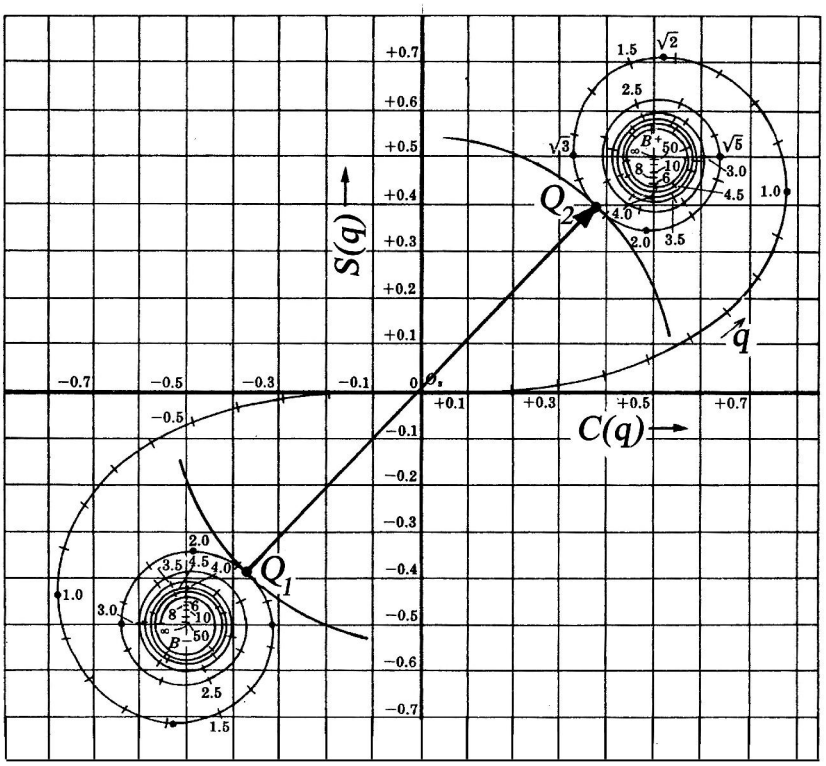
(Σχ. 20.1)

21. Κατακόρυφη σχισμή ορισμένου πλάτους φωτίζεται από σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος. Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος της σχισμής έτσι ώστε σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα να πάρουμε την ελάχιστη δυνατή ένταση του φωτός. Δίνεται $r_{s0} = r_0 = 1\text{m}$ και $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Ο υπολογισμός να γίνει αρχικά με τη βοήθεια της σπείρας Cornu και κατόπιν με αναλυτικό τρόπο.

ΛΥΣΗ

Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα της σπείρας Cornu του (σχ. 21.1) ο φάσορας $\overline{Q_1Q_2} = \mathbf{E}_{12}(u)$ του οποίου το μέτρο είναι το ελάχιστο δυνατό, διαγράφεται μεταξύ των σημείων του τόξου με $(u_1, u_2) \simeq (-1.9, 1.9)$. Οπότε με μέτρησή του με κανόνα και αναγωγή στην κλίμακα της σπείρας βρίσκουμε τελικά: $\left|\overline{Q_1Q_2}\right| = \left|\mathbf{E}_{12}(u)\right| \simeq 1.078$. Οπότε με τη βοήθεια της (σχ. 7.8.9.3):

$I_P = (I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$ βρίσκουμε: $I_{P_{\min}} \simeq 0.581 I_u$.



(Σχ. 21.1)

Όσον αφορά τώρα τον αναλυτικό υπολογισμό του $I_{P_{\min}}$, θα λάβουμε υπόψη μας τη (σχ. 7.8.9.4): $I_P = \frac{I_u}{2}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}$.

Αλλά: $C(u_2)=C(1.9)=0.3944 \quad C(u_1)=C(-1.9)=-0.3944$

$S(u_2)=S(1.19)=0.3734 \quad S(u_1)=S(-1.19)=-0.3734$

Οπότε η αντικατάσταση αυτών των τιμών στην προηγούμενη σχέση μας δίνει: $I_{P_{\min}} \simeq 0.581 I_u$.

Για τον υπολογισμό τέλος του πλάτους της σχισμής, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση μετασχηματισμού: $u = x\sqrt{\frac{2(r_{s0}+r_0)}{\lambda r_{s0} r_0}}$, από την οποία: $\Delta u = \Delta x\sqrt{\frac{2(r_{s0}+r_0)}{\lambda r_{s0} r_0}}$ όπου $\Delta u = u_2 - u_1 = 1.19-(-1.19)=3.8$ και Δx το πλάτος της σχισμής. Και για $r_{s0}=r_0=1\times10^3\,\text{mm}$, $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$, $\Delta u = 3.8$ βρίσκουμε: $\Delta x = 1.51\,\text{mm}$.

22. Σχισμή πλάτους $\Delta x = 1.124\text{mm}$ και αντίστοιχα αδιαφανής λωρίδα ίδιου πλάτους, φωτίζεται με επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Το πρότυπο περίθλασης Fresnel το λαμβάνουμε σε απόσταση $r_0 = 1\text{m}$. Θέλουμε να επιβεβαιώσουμε την ισχύ της αρχής Babinet, έστω για δύο σημεία του προτύπου: Όταν το πρώτο (το σημείο P) βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα με: $x_1 = -0.562$, $x_2 = 0.562\text{mm}$ και το δεύτερο (το σημείο P_1) βρίσκεται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής: ($x_1 = -1.124$, $x_2 = 0\text{mm}$).

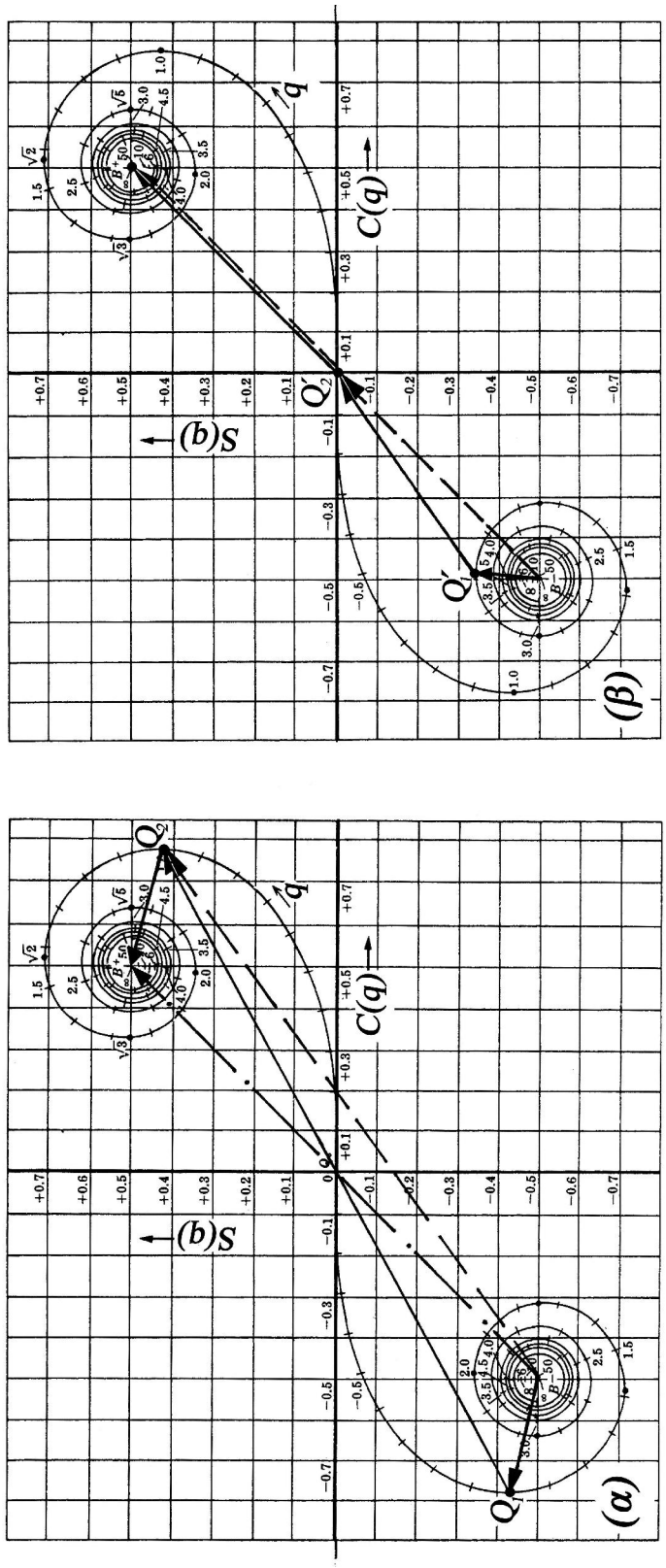
ΛΥΣΗ

Θα πρέπει αρχικά ν' αποδείξουμε ότι βρισκόμαστε όντως σε περιοχή περίθλασης Fresnel. Για το λόγο αυτό πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του λόγου: $\dfrac{d^2}{\lambda} = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{\lambda} = \dfrac{(\Delta x)^2}{\lambda}$ για $\Delta x = 1.24\text{mm}$ το πλάτος της σχισμής και μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Και μετά τις πράξεις βρίσκουμε τελικά $\left(d^2/\lambda\right) \simeq 2.5\text{m}$. Επομένως $r_0 = 1\text{m} < \left(d^2/\lambda\right)$. Και άρα βρισκόμαστε σε περιοχή περίθλασης Fresnel.

Θα επιβεβαιώσουμε την αρχή του Babinet για τις δύο των περιπτώσεων, κατ' αρχή γραφικά με τη βοήθεια της σπείρας Cornu και κατόπιν αναλυτικά με τη βοήθεια των συνιστωσών των φασόρων.

α) Για το σημείο P: $\left(x_1 = -0.562,\ x_2 = 0.562\text{mm}\right)$ του οπτικού άξονα.

Με το δεδομένο ότι η σχέση μετασχηματισμού μεταξύ των u, x είναι η $u = x\sqrt{\dfrac{2}{\lambda r_0}}$ (προσπίπτον επίπεδο μετ. κύματος) για $x_1 = -0.562$ βρίσκουμε: $u_1 = -1$. Επίσης για $x_2 = 0.562$, $u_2 = 1$. Τότε από το (Σχ. 22.1α) ο φάσορας $\overline{Q_1Q_2}$ είναι η συνεισφορά της σχισμής στη διαμόρφωση του ηλ. πεδίου στο σημείο P. Οι φάσορες $\overline{B^-Q_1}$ και $\overline{Q_2B^+}$ είναι η συνεισφορά στη διαμόρφωση του πεδίου από τις δύο περιοχές ένθεν και ένθεν από ένα εμπόδιο μεγάλου μήκους και σταθερού πλάτους όσο αυτό της σχισμής. Τότε το διανυσματικό τους άθροισμα: $\overline{B^+Q_1} + \overline{Q_1Q_2} + \overline{Q_2B^+} = \overline{B^-B^+}$ που είναι η διανυσματική περιγραφή του μη εμποδιζόμενου ηλ. πεδίου στη θέση P. Δηλ. έχουμε την επιβεβαίωση της αρχής του Babinet, όπως αυτή ισχύει για την περιοχή της περίθλασης Fresnel.



(Σχ. 22.1)

Προκειμένου τώρα να γίνει αναλυτική επιβεβαίωση, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων B^-, Q_1, Q_2, B^+ στο σ.σ. $C(u), S(u)$. Αυτές θα είναι: $B^-(-0.5,-0.5)$, $Q_1(-0.7799,-0.4385)$, $Q_2(0.7799,0.4385)$ και $B^+(0.5,0.5)$.Οπότε:

$$\overline{B^-Q_1}:\left[(-0.7799)-(-0.5),(-0.4385)-(-0.5)\right]\rightarrow\overline{B^+Q_1}:(-0.2799,0.0615)$$
$$\overline{Q_1Q_2}:\left[(0.7799)-(-0.7799),(0.4385)-(-0.4385)\right]\rightarrow\overline{Q_1Q_2}:(1.5598,0.877)$$
$$\overline{Q_2B^+}:\left[(0.5)-(0.7799),(0.5)-(0.4385)\right]\rightarrow\overline{Q_2B^+}:(-0.2799,0.0615)$$

Άρα οι συντεταγμένες του διανυσματικού αθροίσματος των φασόρων: $\overline{B^-Q_1}+\overline{Q_1Q_2}+\overline{Q_2B^+}$ θα είναι: $\left[-0.2799+1.5598-0.2799,0.0615+0.877+0.0615\right]\rightarrow$ $\rightarrow(1,1)\rightarrow\left[0.5-(-0.5),0.5-(-0.5)\right]$. Οι τελευταίες είναι οι συντεταγμάνες του φάσορα $\overline{B^-B^+}$. Που επιβεβαιώνει αναλυτικά την αρχή του Babinet, όπως αυτή ισχύει για την περιοχή της περίθλασης Fresnel.

β) Για το σημείο P_1: $(x_1=-1.124,\ x_2=0\text{mm})$, που βρίσκεται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς.

Χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση μετασχηματισμού για $x_1=-1.124$ βρίσκουμε: $u_1=-2$. Επίσης για $x_2=0$, $u_2=0$ που αντιστοιχούν στα σημεία Q_1', Q_2'. Και από το (Σχ. 22.1β) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι: $\overline{B^-Q_1'}+\overline{Q_1'Q_2'}+\overline{Q_2'B^+}=\overline{B^-B^+}$ που σημαίνει και για την περίπτωση αυτή προκύπτει η επιβεβαίωση της αρχής του Babinet. Θα πρέπει βέβαια ν' αναφέρουμε εδώ, ότι η προαναφερόμενη αρχή ισχύει για οποιοδήποτε σημείο στην περιοχή της περίθλασης Fresnel. Και όσον αφορά την αναλυτική επιβεβαίωση της αρχής, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και πριν.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

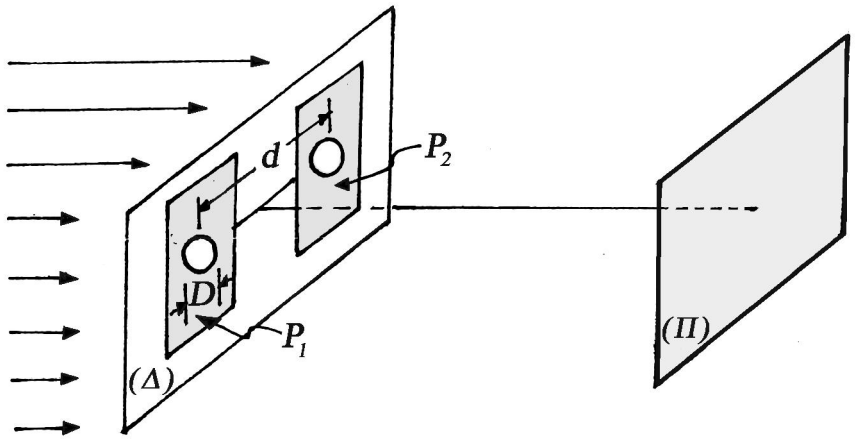
1. Μια σχισμή μεγάλου μήκους και ρυθμιζόμενου πλάτους $2X_1$ φωτίζεται μ' ένα επίπεδο μετ. κύματος μονοχρωματικού φωτός μ.κ. $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$ (από Laser He-Ne) και παρατηρούμε το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer σε απόσταση $l = 3\text{m}$ από αυτήν. α) Ποιο θα είναι το πλάτος της, όταν η μετρούμενη απόσταση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου των δευτερευόντων μεγίστων είναι $\Delta x = 10\text{mm}$. β) Σε ποιές αποστάσεις $x_{1\max}, x_{2\max}$ από το κεντρικό μέγιστο του προτύπου περίθλασης θα βρίσκονται αυτά τα μέγιστα όταν το πλάτος $2X_1$ της σχισμής υποδιπλασιαστεί.

Υπόδειξη: α) Από το (Σχ. 7.4.1.2) ή την (Άσκ. 2: Λυμένη) που μας δίνει τις θέσεις των δευτερευόντων μεγίστων, βρίσκουμε τις τιμές των $q_{1\max}, q_{2\max}$. Αλλά κατά τα γνωστά: $q = ku'X_1$. Όπου u' το συνημίτονο κατεύθυνσης για μια τυχαία διεύθυνση περίθλασης. $k = 2\pi/\lambda$ και $2X_1$ το πλάτος της σχισμής. Με βάση τα δεδομένα αυτά, υπολογίζονται οι αποστάσεις $x_{1\max}, x_{2\max}$ των θέσεων των δευτερευόντων μεγίστων και κατά προέκταση με γνωστό το Δx, το πλάτος της σχισμής. Βρίσκουμε: $2X_1 \simeq 0.2\text{mm}$. β) Επίσης βρίσκουμε: $x_{1\max} = 27.1\text{mm}$ και $x_{2\max} \simeq 46.7\text{mm}$.

2. Στο διάφραγμα (Δ) του (Σχ. 2.1) υπάρχουν δύο κυκλικά ανοίγματα διαμέτρου D το καθένα και σε απόσταση μεταξύ τους ίση με d. Μπροστά από κάθε άνοιγμα υπάρχει ένας γραμμικός πολωτής. Φωτίζουμε το διάφραγμα μ' ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος και σε αρκετά μεγάλη απόσταση τοποθετούμε ένα πέτασμα (Π) (δεχόμαστε συνθήκες περίθλασης Fraunhofer). Τι ακριβώς θα παρατηρήσουμε στο πέτασμα (Π) από την άποψη της κατανομής της έντασης του φωτός για τις περιπτώσεις όπου:

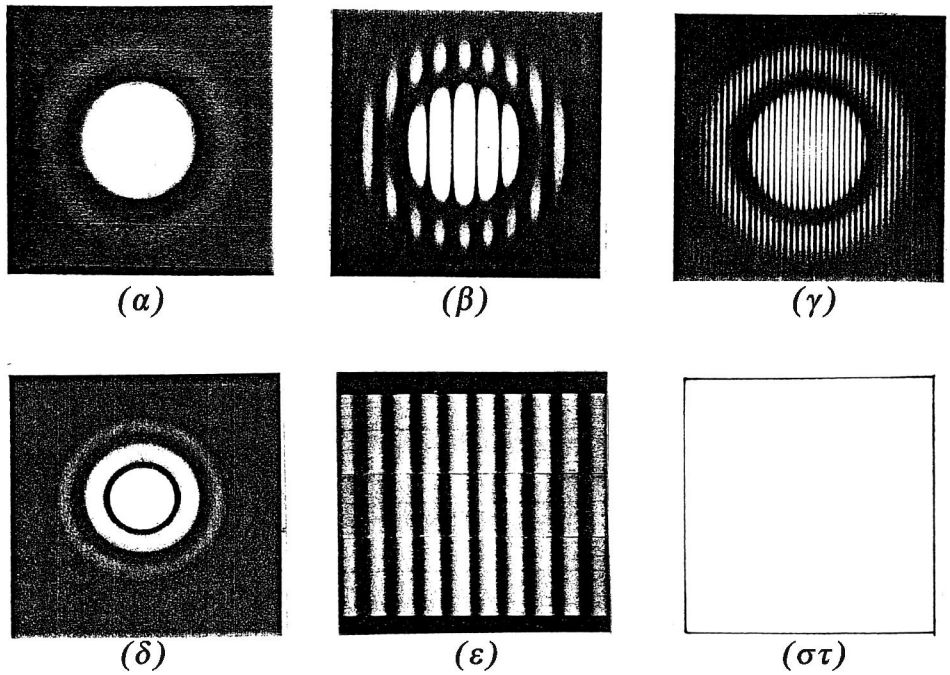
1) Οι άξονες πόλωσης των πολωτών είναι παράλληλοι
2) Οι άξονες πόλωσης των πολωτών είναι κάθετοι
3) Η διάμετρος των ανοιγμάτων $D \to 0$ και οι άξονες πόλωσης των πολωτών είναι παράλληλοι
4) Η διάμετρος των ανοιγμάτων $D \to 0$ και οι άξονες πόλωσης των πολωτών είναι κάθετοι
5) Οι άξονες πόλωσης των πολωτών είναι παράλληλοι και η απόσταση d μεταξύ των ανοιγμάτων γίνεται μεγαλύτερη $(d' > d)$

6) Οι άξονες πόλωσης των πολωτών είναι κάθετοι και η διάμετρος D των ανοιγμάτων μεγαλώνει $(D' > D)$



(Σχ. 2.1)

Τα δυνατά πρότυπα περίθλασης των κατανομών των εντάσεων, μπορούν να επιλεχθούν από αυτά των (Εικ. 2.2).

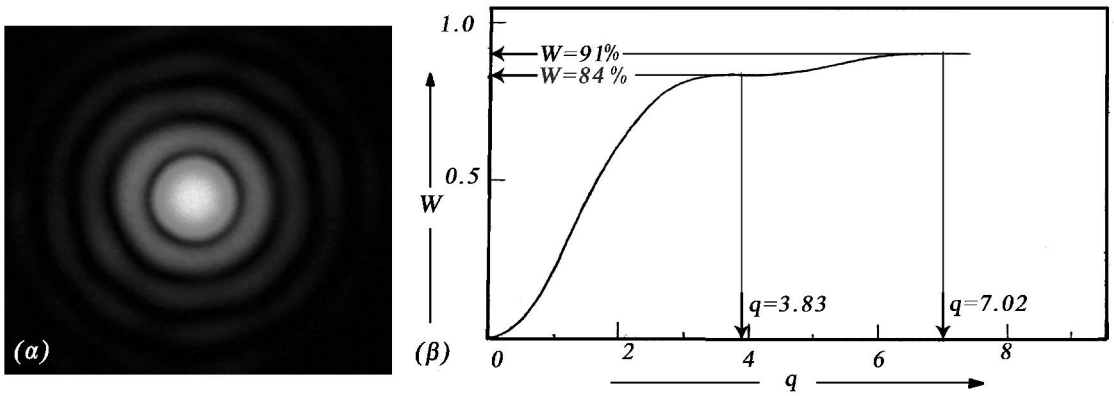


(Εικ. 2.2)

Υπόδειξη: Θα πρέπει προκειμένου ν' απαντήσουμε, να λάβουμε υπόψη μας τα εξής: α) Τη σχέση μεταξύ της διαμέτρου ενός κυκλικού ανοίγματος και της διαμέτρου του δίσκου του Airy (δηλ. τις διαστάσεις εν γένει του προτύπου περίθλασης) (σχ. 7.5.1.11). β) Τη σχέση μεταξύ της απόστασης των δύο ανοιγμάτων και της περιόδου των των κροσσών συμβολής (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (σχ. 6.4.1.18)). γ) Τη δυνατότητα να συμβάλλουν ή όχι δύο δέσμες που τα ηλεκτρικά τους πεδία είναι παράλληλα ή κάθετα μεταξύ τους (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός (Άσκ. 3: Λυμένη). Όσον αφορά τις σωστές απαντήσεις, αντιστοιχούν στην εξής σειρά: (β), (α), (ε), (στ), (γ),(δ).

3. Να υπολογιστεί το % ποσοστό της ενέργειας που κατανέμεται ακτινικά συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο του προτύπου περίθλασης (για την προσέγγιση Fraunhofer), που προέρχεται από ένα κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R [*].

Υπόδειξη: Το ποσοστό της ενέργειας W σε μια κυκλική περιοχή ακτίνας ρ του προτύπου περίθλασης (κατανομή έντασης) από κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R (Σχ. 3.1α) θα μπορούσε να εκφραστεί από τη σχέση:



(Σχ. 3.1)

$$W = \int_0^{\rho} I(\rho)\, 2\pi\rho d\rho \Big/ \int_0^{\infty} I(\rho)\, 2\pi\rho d\rho \qquad (3.1)$$

[*] A.K. Ghatak 'Optics' McGraw-Hill Co. N.Y. (2010) (Ch. 19).

Όπου $I(\rho)$ η ένταση του φωτός στη θέση ρ του προτύπου. Και επειδή $I(\rho)=\left[2J_1(q)/q\right]^2$, $q=kR\theta,\ \theta=\rho/f$ η (σχ. 3.1) παίρνει τη μορφή:

$$W=\int_0^q\left[2J_1(q)/q\right]^2 qdq\Big/\int_0^\infty\left[2J_1(q)/q\right]^2 qdq \tag{3.2}$$

Όπου κατά τα γνωστά $J_1(q)$ η συνάρτηση Bessel πρώτης τάξης.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις αναδρομικές σχέσεις που αφορούν το λογισμό των συναρτήσεων Bessel:

$$q\frac{dJ_n(q)}{dq}=qJ_{n-i}(q)-nJ_n(q) \qquad \text{για} \quad q=1 \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dq}\left[q^{-n}J_n(q)\right]=-q^{-n}J_{n+1}(q) \qquad \text{για} \quad q=0 \tag{3.4}$$

και τη σχέση: $J_1(q)\dfrac{dJ_1(q)}{dq}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dq}J_1^2(q)$ (3.5)

θα βρούμε τελικά αντικαθιστώντας στη (σχ. 3.2):

$$W=\frac{\left[J_0^2(q)-J_1^2(q)\right]\Big|_0^q}{\left[J_0^2(q)-J_1^2(q)\right]\Big|_0^\infty} \tag{3.6}$$

Και με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του (Σχ. 7.5.1.3) θα βρούμε τελικά:

$$W=W(\rho)=1-J_0^2(q)-J_1^2(q) \tag{3.7}$$

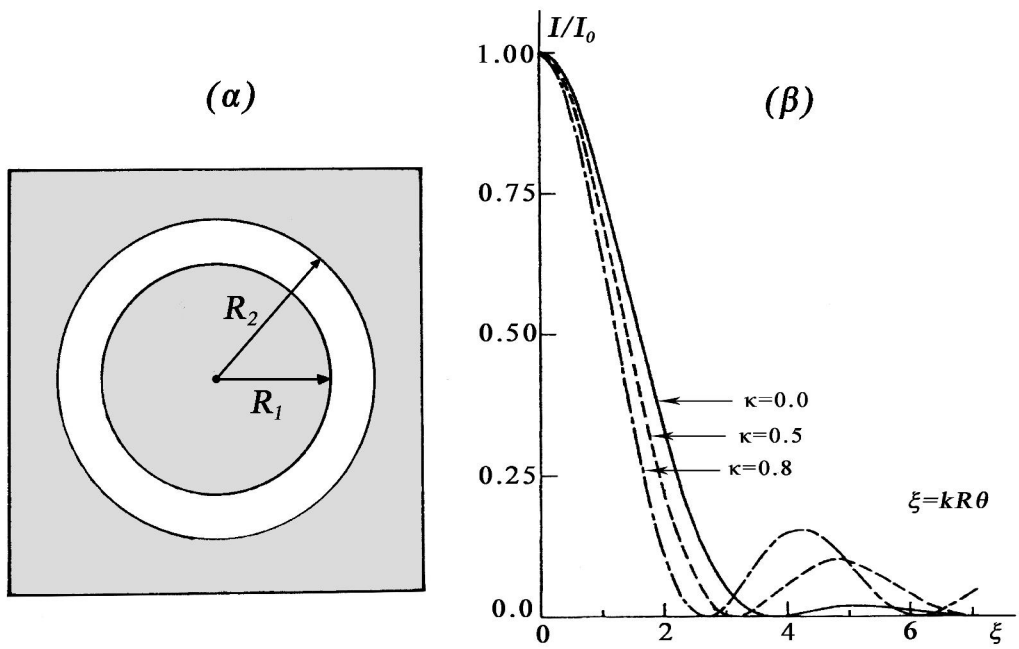
της οποίας η γραφική παράσταση συναρτήσει του q δίνεται στο (Σχ. 3.1β). Από αυτήν για $q=3.83$, που περιλαμβάνει την περιοχή του δίσκου του Airy βρίσκουμε: $W=84\%$. Και για $q=7.02$ που περιλαμβάνει τις περιοχές του δίσκου του Airy και του πρώτου φωτεινού δακτυλίου θα έχουμε: $W=91\%$.

4. Να υπολογιστεί το πρότυπο περίθλασης Fraunhofer, για την περίπτωση που το περιθλόν άνοιγμα είναι ένας δακτύλιος (Σχ. 4.1α), ο οποίος οριοθετείται από τις ακτίνες R_1, R_2 $\left(R_1 < R_2\right)$.

Υπόδειξη

Μας είναι γνωστό (§ 7.5.1) ότι η ένταση του ηλ. πεδίου κατά την περίθλαση Fraunhofer από ένα κυκλικό άνοιγμα ακτίνας R μπορεί να προσδιοριστεί από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$E(\theta) = \dfrac{2\pi}{(k\theta)^2} \int_0^{kR\theta} \xi J_0(\xi)\, d\xi$. Και αυτό γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης:



(Σχ. 4.1)

$\dfrac{d}{d\xi}\left[\xi J_1(\xi)\right] = \xi J_0(\xi)$, που αφορά το λογισμό των συναρτήσεων Bessel. Τότε με την αντικατάσταση αυτής της σχέσης στην προηγούμενη, βρίσκουμε (σχ. 7.5.1.8): $\dfrac{E}{E_0} = \dfrac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}$, όπου $\xi = kR\theta$ και E_0 ένας παράγοντας κανονικοποίησης. Κατά προέκταση η ένταση του φωτός θα δίνεται από τη (σχ. 7.5.1.9):

$$\frac{I}{I_0}=\left[\frac{2J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]^2=\left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right]^2.$$

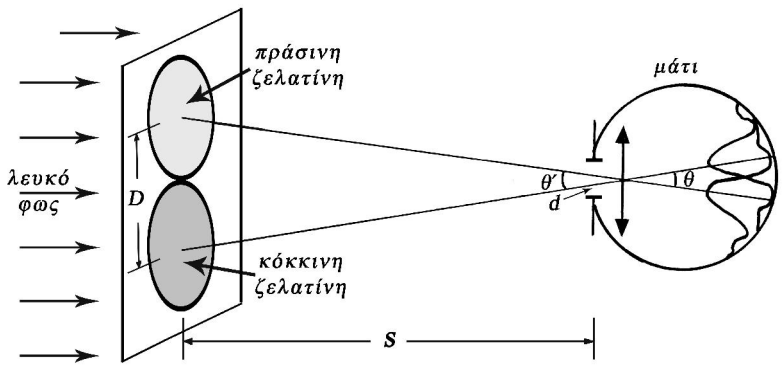
Για την επίλυση του προβλήματος, θα μπορούσατε ν' ακολουθήσετε την ίδια διαδικασία, αρκεί τα όρια της ολοκλήρωσης να είναι μεταξύ: $kR_1\theta \to kR_2\theta$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το αποτέλεσμα για την κατανομή τελικά της έντασης του φωτός (για την περίθλαση από κυκλικό δακτύλιο) δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\left(1-\kappa^2\right)^2}\left[\frac{2J_1(kR_2\theta)}{kR_2\theta}-\kappa^2\frac{2J_1(kR_1\theta)}{kR_1\theta}\right]^2 \tag{4.1}$$

όπου $\kappa=(R_1/R_2)$ με $(0<\kappa<1)$. Και για $\kappa=0$ δηλ. $(R_1\to 0)$ καταλήγουμε στη γνωστή σχέση της κατανομής της έντασης του φωτός από ένα κυκλικό άνοιγμα. Στο (Σχ. 4.1β) δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τις (σχ. 4.1) για $\kappa=0.0,\ 0.5,\ 0.8$. Μπορεί επίσης ν' αποδειχθεί ότι τα ελάχιστα τις έντασης του φωτός τα συναντούμε όταν:

$$J_1(kR_2\theta)-\kappa J_1(kR_1\theta)=0 \tag{4.2}$$

5. Πάνω σ' ένα αδιαφανές πέτασμα βρίσκονται σε επαφή δύο κυκλικά ανοίγματα με διάμετρο το καθένα $D=2R=1\text{cm}$ (Σχ. 5.1). Καλύπτουμε το πρώτο



(Σχ. 5.1)

με μια κόκκινη ζελατίνη, το δεύτερο με μια πράσινη και τα φωτίζουμε από πίσω με μια ισχυρή πηγή λευκού φωτός. Σε ποια απόσταση θα πρέπει ν' απομακρυνθού-

με έτσι ώστε όπου βρισκόμαστε μετά από αυτήν, να βλέπουμε ότι το σύστημα αυτό συνίσταται από μια πηγή φωτός που εκπέμπει όμως τώρα κίτρινο φως. Θα θεωρήσουμε ότι η διάμετρος της κόρης του ματιού μας είναι $d = 2\text{mm}$ και ότι η μέση τιμή του μ.κ. του λευκού φωτός που προσπίπτει στο πέτασμα είναι $\lambda = 0.55 \times 10^{-3}\,\text{mm}$.

Υπόδειξη: Μας είναι γνωστό ότι η επαλληλία σε μια περιοχή μιας πράσινης και μιας κόκκινης ακτινοβολίας μας δίνει την αίσθηση του κίτρινου χρώματος. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, το καθένα από τα κυκλικά ανοίγματα δρα σαν πηγή φωτός (κόκκινη και πράσινη), το οποίο περιθλώμενο από την κόρη του ματιού – όπως φαίνεται στο (Σχ. 5.1) – μας δίνει στον αμφιβληστροειδή χιτώνα το πρότυπο περίθλασης από το κυκλικό άνοιγμα της κόρης. Με βάση τα δεδομένα της (§ 7.5.3) αν οι πηγές απείχαν πολύ μεταξύ τους, το ίδιο θα γινόταν και με τα δύο πρότυπα περίθλασης το κόκκινο και το πράσινο στον αμφιβληστροειδή, οπότε και θα τα βλέπαμε σαν ξεχωριστά χρώματα. Καθώς όμως αυτές πλησιάζουν, θα αρχίσει να επέρχεται μίξη τους (ασύμφωνη επαλληλία λόγω των διαφορετικών συχνοτικών περιοχών του κόκκινου και του πράσινου χρώματος). Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η απαρχή αυτής της μίξης γίνεται από τη θέση εφαρμογής και μετά του κριτηρίου του Rayleigh (βλ. (Σχ. 7.5.3.3.,4). Από το γεγονός αυτό και με τη βοήθεια της (Άσκ. 7: Λυμένη), βρίσκουμε ότι για να βλέπουμε από το σύστημα των δύο πηγών σαν να εκπέμπεται κίτρινο φως, θα πρέπει να βρισκόμαστε σε απόσταση μεγαλύτερη των 30m.

6. Διαθέτουμε ένα φράγμα περίθλασης διερχομένου φωτός N γραμμών και περιόδου d. Ν' αποδειχθεί ότι το γωνιακό άνοιγμα $\Delta\theta$ με το οποίο φαίνεται η απόσταση μεταξύ των πρώτων ελαχίστων, ένθεν και ένθεν ενός κεντρικού μεγίστου συμβολής (Σχ. 6.1), δίνεται από τη σχέση:

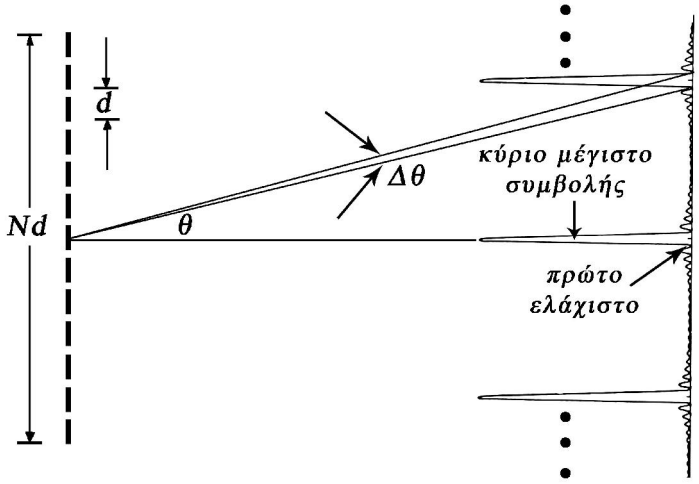
$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd\cos\theta}$$

όπου λ το μ.κ. της μονοχρωματικής προσπίπτουσας ακτινοβολίας και θ η γωνία με την οποία φαίνεται το κεντρικό μέγιστο.

Υπόδειξη

΄ Στον τύπο που μας δίνει την ένταση του φωτός από φράγμα N γραμμών περιόδου d (σχ. 7.6.1.3), ο παράγοντας συμβολής είναι ο $\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta}$. Επομένως μπο-

ρούμε να δεχτούμε ότι ελάχιστα θα έχουμε όταν $\sin N\delta = 0$. Και η λύση αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης θα είναι:



(Σχ. 6.1)

$$\sin N\delta = \sin m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.1}$$

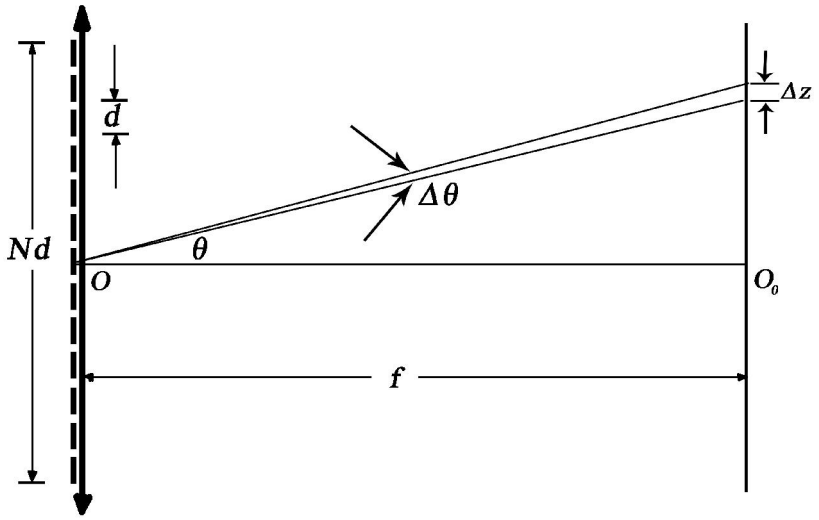
Αλλά:
$$\delta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \tag{6.2}$$

Οπότε από την πρώτη αυτών των σχέσεων βρίσκουμε το $\Delta\delta$ μεταξύ των $m = \pm 1$. Κατόπιν το συγκρίνουμε με τη (σχ. 6.2) αφού τη διαφορίσουμε. Μια πιο αυστηρή ανάλυση αυτού του προβλήματος γίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 3).

7. Ένα φράγμα περίθλασης με 2000γραμμές/cm που το πλάτος του είναι 5cm, χρησιμοποιείται για την ανάλυση του λευκού φωτός. α) Αν ο φακός που εστιάζει πάνω στο πέτασμα παρατήρησης είναι εστιακής απόστασης $f = 100\text{cm}$ και στο πέτασμα υπάρχει σχισμή με εύρος $\Delta z = 200\mu\text{m}$, πόσο είναι το εύρος $\Delta\lambda$ των μ.κ. της διερχόμενης ακτινοβολίας στην περιοχή του μ.κ. $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ για το φάσμα $m = 6$ τάξης συμβολής. β) Πόση θα πρέπει να είναι η διαφορά $\Delta\lambda$ μ.κ. δύο ακτινοβολιών (σε Å), έτσι ώστε να μπορούν να διαχωριστούν στην $m = 2$ τάξη συμβολής και στην περιοχή των μ.κ. $\lambda = 0.4\mu\text{m}$ και $\lambda = 0.8\mu\text{m}$ αντίστοιχα. γ) Πόσες τάξεις συμβολής θα εμφανιστούν;

Υπόδειξη

α) Βασιζόμαστε στον τύπο που μας δίνει το γωνιακό διασκεδασμό από φράγμα N γραμμών περιόδου d (σχ. 7.6.4.3): $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$. Επίσης θα χρησιμο-



(Σχ. 7.1)

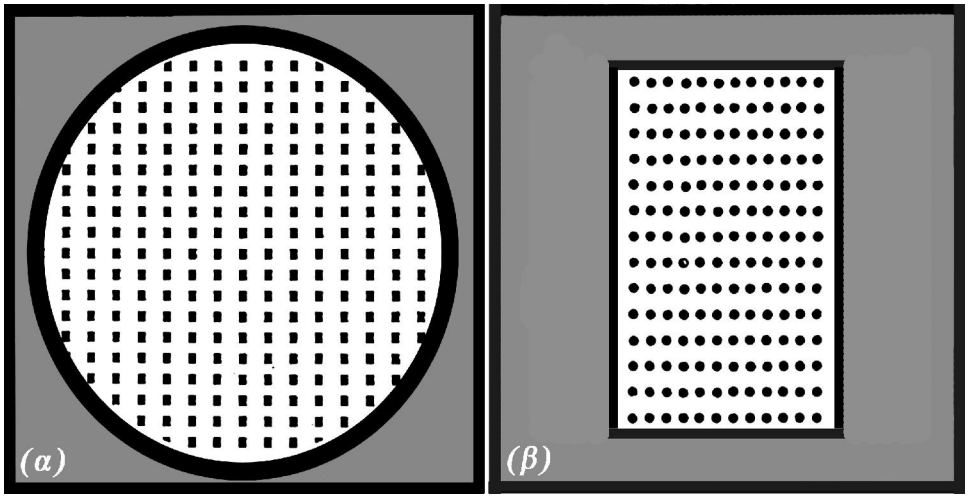
ποιήσουμε τη σχέση που μας δίνει τα μέγιστα συμβολής όπως και τη σχέση που συσχετίζει το άνοιγμα Δz στο πέτασμα παρατήρησης, τη γωνία $\Delta\theta$ και την εστιακή απόσταση του φακού f. Τότε η αριθμητική τιμή του $\Delta\lambda$ θα είναι $\Delta\lambda = 1.05\times10^{-4}\,\mu\text{m}$. β) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που μας δίνει τη διακριτική ικανότητα για το φράγμα (σχ. 7.6.4.8): $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$. Βρίσκουμε: Για $\lambda = 0.4\mu\text{m}$, $\Delta\lambda \simeq 0.2\text{Å}$ και για $\lambda = 0.8\mu\text{m}$, $\Delta\lambda \simeq 0.8\text{Å}$. γ) Από τον τύπο των μεγίστων συμβολής για $\theta = 90^0$ βρίσκουμε: $m = \pm 10$.

8. Διαθέτουμε ένα φράγμα περίθλασης 500γραμ./mm, το οποίο φωτίζεται με ένα παράλληλο μετ. κύματος φωτός, του οποίου το φασματικό περιεχόμενο είναι γραμμικό (γραμμικό φάσμα). Σε μια ορισμένη απόσταση από το φράγμα (σε συνθήκες περίθλασης Fraunhofer, παίρνουμε στο πέτασμα παρατήρησης το πρότυπο περίθλασης. Τότε σε γωνία που απέχει από τη μεσοκάθετη στο φράγμα $\theta = 30^0$, εντοπίζεται μια φασματική γραμμή. Είναι δυνατόν το μ.κ. λ αυτής της γραμμής να είναι μεγαλύτερο του $1\mu\text{m}$;

Υπόδειξη

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του φράγματος και βρίσκουμε με βάση τα δεδομένα: ($d = (1/500)\,\text{mm}$ και $\theta = 30^0$), μια σχέση μεταξύ του μ.κ. λ και της τάξης περίθλασης m. Το συμπέρασμα θα προκύψει όταν εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή για $m = 1, 2, 3, \cdots$. Οπότε βρίσκουμε ότι η τιμή του λ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του $1\mu\text{m}$.

9. Στις (Εικ. 9.1α,β) φαίνονται δύο περιθλώντα στοιχεία. Αυτό της (Εικ. 9.1α) συνίσταται από μια περιοδική διδιάστατη δομή ορθογώνιων ανοιγμάτων ορισμένου προσανατολισμού το οποίο σαν όλο οριοθετείται από ένα μεγάλων δι-



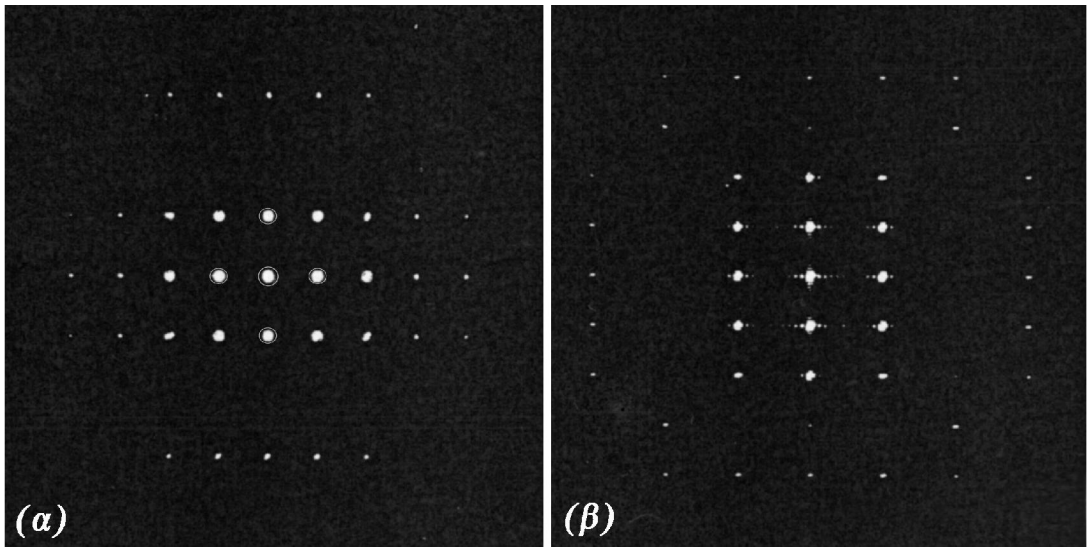
(Εικ. 9.1)

αστάσεων κυκλικό άνοιγμα. Στην (Εικ. 9.1β) αντίθετα, μια διδιάστατη περιοδική δομή από κυκλικά ανοίγματα οριοθετείται από ένα μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ορισμένου προσανατολισμού. Στις (Εικ. 9.2α,β) βλέπουμε τα πρότυπα περίθλασης Fraunhofer από τα δύο περιθλώντα στοιχεία. Ποια είναι η αντιστοιχία μεταξύ των περιθλώντων στοιχείων και των προτύπων περίθλασης και γιατί;

Υπόδειξη

Στην (§ 7.7.1) έγινε μια στοιχειώδης ποιοτική μελέτη αυτού του προβλήματος. Οπότε στην παρούσα περίπτωση, μπορούμε να πούμε για το καθένα από τα πρότυπα περίθλασης ότι συνίσταται από το γινόμενο τριών όρων: α) Αυτού που οφείλεται στην περιοδικότητα των δύο διαστάσεων (που

συγκροτούν τα μικρά ορθογώνια ή οι μικροί κύκλοι) και περιγράφει τον όρο της συμβολής. Αν τα προαναφερόμενα ήταν 'σημειακά', θα μας έδιναν ένα περιοδικό διδιάστατο πρότυπο περίθλασης 'σημείων' σε όλο όμως το εύρος του επιπέδου παρατήρησης. β) Όμως αν και μικρών διαστάσεων έχουν συγκεκριμένη μορφή. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα η κατανομή των 'σημείων' της συμβολής, να διαμορφώνεται (με μέγιστα και ελάχιστα) από ένα μεγάλων διασ-



(Εικ.9.2)

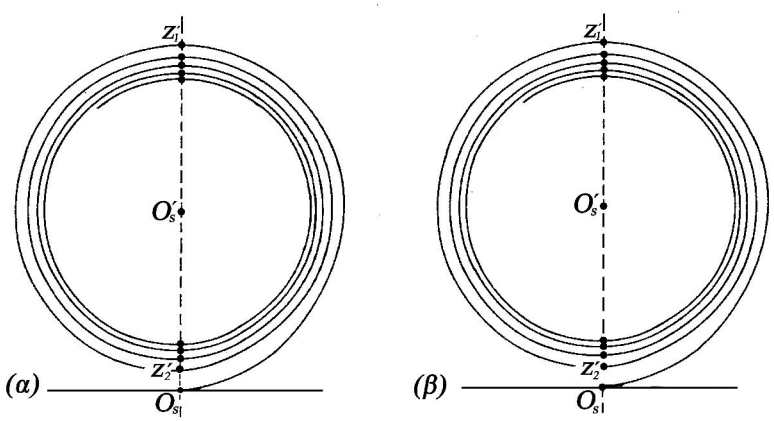
τάσεων πρότυπο περίθλασης που προέρχεται από ορθογώνιο άνοιγμα του ενός από τα μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ή από κυκλικό άνοιγμα, που προέρχεται από ένα από τους μικρούς κύκλους. γ) Αλλά οι διδιάστατες κατανομές των μικρών ορθογωνίων και των μικρών κύκλων στα περιθλώντα στοιχεία, οριοθετούνται από μεγάλα διαφράγματα, με μορφή κύκλου οι πρώτοι και με μορφή ορθογωνίου (ορισμένου προσανατολισμού) οι δεύτεροι. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα, τα 'σημεία' της συμβολής να μην είναι πλέον σημειακές κατανομές, αλλά να έχουν συγκεκριμένη δομή. Τι δομή του προτύπου περίθλασης από κυκλικό άνοιγμα για τα πρώτα και από ορθογώνιο άνοιγμα για τα δεύτερα. Η αντιστοιχία τελικά είναι: (Εικ. 9.1α)$\rightarrow$(Εικ. 9.2α) και (Εικ. 9.1β)$\rightarrow$(Εικ. 9.2β).

10. Ν' αποδειχθεί ότι όταν το περιθλόν στοιχείο στραφεί στο επίπεδό του κατά μια γωνία ϕ, με την ίδια ακριβώς γωνία στρέφεται και το πρότυπο περίθλασης στο επίπεδο παρατήρησης (δηλ. στο επίπεδο Fourier).

11. Επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος προσπίπτει σε κυκλικό άνοιγμα ορισμένης διαμέτρου. Μετά το άνοιγμα και πάνω στον οπτικό άξονα, θεωρούμε ένα σημείο P από το οποίο 'φαίνονται' οι δύο πρώτες ζώνες Fresnel. Κατόπιν το κυκλικό άνοιγμα αντικαθίσταται από ένα κυκλικό εμπόδιο της ίδιας δια μέτρου. Ζητείται για τις δύο των περιπτώσεων να προσδιοριστούν με τη βοήθεια της καμπύλης ταλάντωσης οι εντάσεις των ηλ. πεδίων, καθώς και οι εντάσεις του φωτός στο ίδιο σημείο P.

Υπόδειξη

α) Για τον προσδιορισμό του ηλ. πεδίου $\mathbf{E}_{1,2}$ στο σημείο P του οπτικού άξονα, από το οποίο φαίνεται η πρώτη και η δεύτερη ζώνη, θα πρέπει να προσθέσουμε διανυσματικά τους φάσορες: $\overline{O_s z_1'}$ της πρώτης ζώνης και $\overline{z_1' z_2'}$ της δεύτερης. Και όσον αφορά την ένταση του φωτός, αυτή θα είναι: $I_{1,2} \simeq 0$.



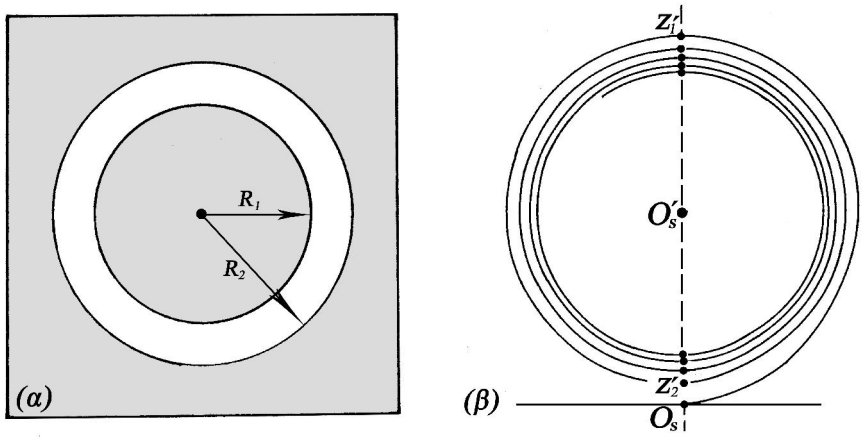
(Σχ. 11.1)

β) Στην περίπτωση αυτή το ηλ. πεδίο προσδιορίζεται από τον φάσορα $\overline{z_2' O_s'}$. Και η ένταση του φωτός θα είναι: $I \simeq I_u$. Ίση δηλ. περίπου με αυτή που δημιουργεί το ανεμπόδιστο μετ. κύματος στο σημείο P.

12. Επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$ συναντά κάθετα ένα διάφραγμα που περιλαμβάνει δακτυλιοειδές άνοιγμα (Σχ. 12.1α) με εσωτερική ακτίνα $R_1 = 1.12\text{mm}$ και εξωτερική $R_2 = 1.6\text{mm}$. Να υπολογιστεί με τη βοήθεια της καμπύλης ταλάντωσης η ένταση $\mathbf{E}$ του ηλ. πεδίου σε σημείο P του οπτικού άξονα που απέχει απόσταση $r_0 = 2\text{m}$ από το διάφραγμα συναρτήσει του $\mathbf{E}_u$.

Υπόδειξη

Πρέπει αρχικά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που μας δίνει τον αριθμό Fresnel N_F για την περίπτωση πρόσπτωσης επιπέδου μετ. κύματος: $N_F = R^2/r_0\,\lambda$.



(Σχ. 12.1)

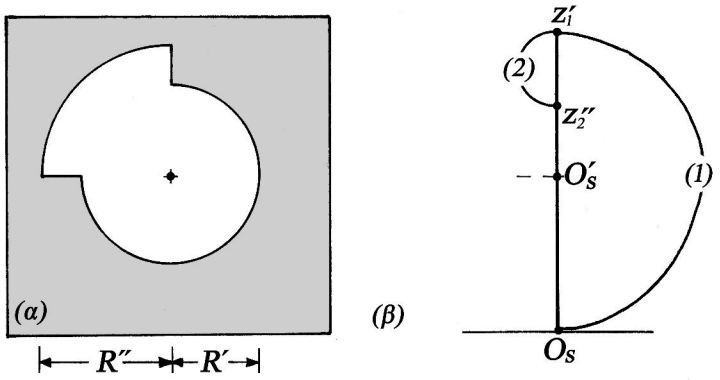
Σε δεύτερη φάση να υπολογίσουμε τους αριθμούς N_{F_1}, N_{F_2} για τα κυκλικά 'ανοίγματα' με ακτίνες R_1, R_2. Τότε το πεδίο θα περιγράφεται από το φάσορα που έχει αρχή το σημείο της καμπύλης ταλάντωσης που αντιπροσωπεύεται από το αδιαφανές πέρας του κεντρικού δίσκου. Και όσον αφορά το τέλος του, θα είναι το σημείο που αντιπροσωπεύεται στην καμπύλη από το πέρας του διαφανούς τμήματος του περιθλώντος ανοίγματος. Θα πρέπει να βρούμε: $\mathbf{E} \simeq -2\mathbf{E}_u$. E_u είναι το μέτρο της έντασης του ηλ. πεδίου του μη εμποδιζόμενου επιπέδου μετώπου κύματος στο σημείο P του οπτικού άξονα.

13. Επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}$ mm προσπίπτει σε διάφραγμα το οποίο περιλαμβάνει περιθλόν άνοιγμα της μορφής του (Σχ. 13.1α). Δηλ. από ένα κυκλικό άνοιγμα ακτίνας $R' = 0.8$mm και ένα τέταρτο κυκλικού ανοίγματος ακτίνας $R'' = 1.125$mm. Να υπολογιστεί με τη βοήθεια της καμπύλης ταλάντωσης η ένταση του φωτός I_P σε σημείο P του οπτικού άξονα που απέχει από το πέτασμα απόσταση $r_0 = 1$m.

Υπόδειξη

Η επίλυση γίνεται με τη λογική της (Άσκ. 18: Λυμένη). Οι ζώνες Fresnel που 'φαίνονται' με βάση τα δεδομένα από το σημείο P του οπτικού άξονα για τα

κυκλικά ανοίγματα ακτινών R', R'' είναι η πρώτη και η δεύτερη. Στη διαμόρφωση του ηλ. πεδίου στο σημείο P συμμετέχει ολόκληρη η πρώτη ζώνη και το ένα τέ-



(Σχ. 13.1)

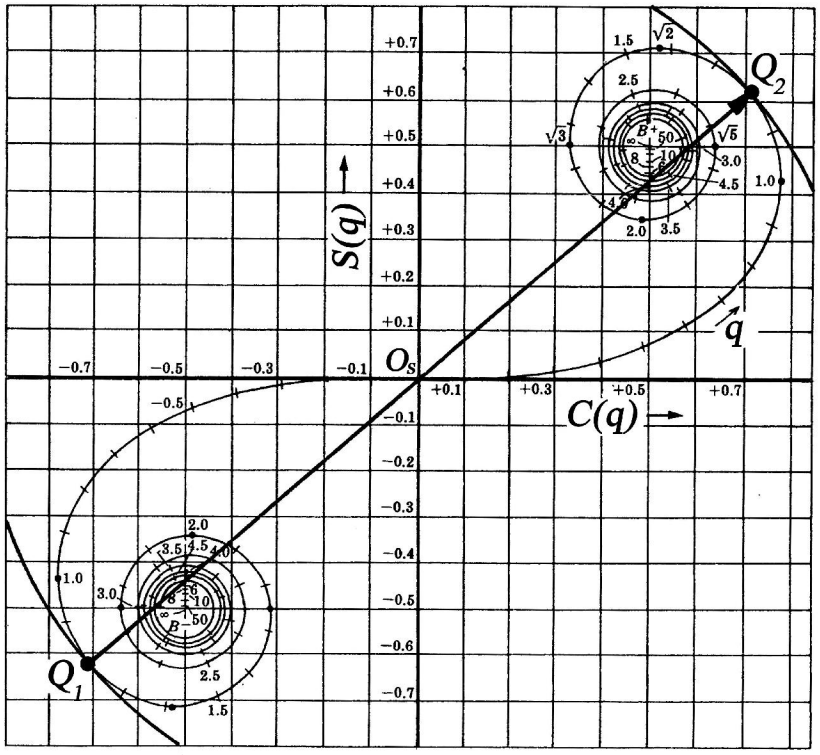
ταρτο της δεύτερης. Το γεγονός αυτό καθορίζει και το πώς εξελίσσεται η καμπύλη ταλάντωσης, μετά το πέρας της συνεισφοράς της πρώτης ζώνης (Σχ. 13.1β). Τελικά βρίσκουμε ότι: $E_P = \frac{3}{2}E_u$. Οπότε: $I_P = \frac{9}{4}I_u$.

14. Κατακόρυφη σχισμή ορισμένου πλάτους, φωτίζεται από σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος. Θέλουμε το πλάτος αυτό να είναι τέτοιο ώστε σ' ένα σημείο P του οπτικού άξονα, να πάρουμε τη μέγιστη δυνατή ένταση του φωτός. Δίνεται: $r_{s0} = r_0 = 1\text{m}$ και $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Ο υπολογισμός να γίνει αρχικά με τη βοήθεια της σπείρας Cornu (προσεγγιστικός υπολογισμός των u_1, u_2) και κατόπιν με αναλυτικό τρόπο.

Υπόδειξη

Με τη βοήθεια διαβήτη γράφουμε με κέντρο το O_s περιφέρεια κύκλου η οποία να εφάπτεται των δύο εξωτερικών τμημάτων της σπείρας Cornu. Τα σημεία αυτά (καθορισμένων u_1, u_2) ορίζουν κατά προσέγγιση τον φάσορα $\mathbf{E}_{12}(u)$ που το μέτρο του είναι το μέγιστο δυνατό εγγεγραμμένο στη σπείρα Cornu. Τότε η τιμή του $(I_P)_{\max}$ δίνεται από τη (σχ. 7.8.9.3): $I_P = (I_u/2)\left|\mathbf{E}_{12}(u)\right|^2$. Την τιμή αυτή μπορούμε να τη συγκρίνουμε με αυτή που προκύπτει αναλυτικά από τη (σχ.

7.8.9.4): $I_P = \frac{I_u}{2}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}$ εφόσον μας είναι γνωστές οι αριθμητικές τιμές των u_1, u_2. Βρίσκουμε: $(I_P)_{\max} \simeq 1.18 I_u$. Τέλος το πλάτος της

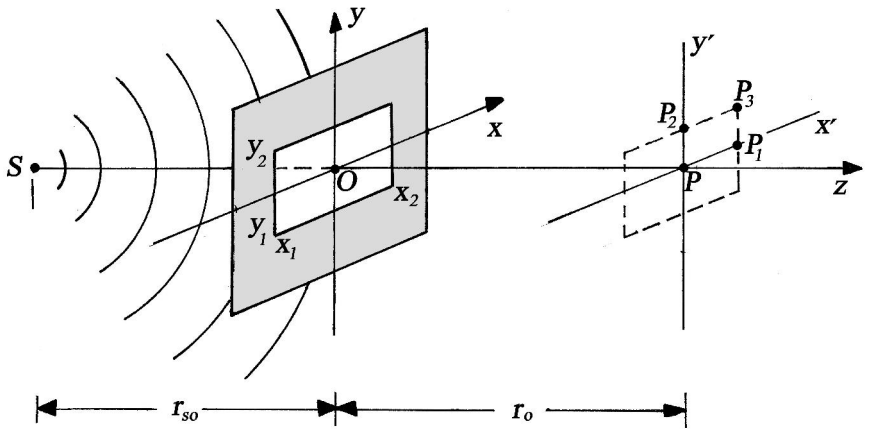


(Σχ. 14.1)

σχισμής Δx βρίσκεται με τη βοήθεια της σχέσης μετασχηματισμού μεταξύ των u, x για προσπίπτον στη σχισμή σφαιρικό μετ. κύματος. Βρίσκουμε: $\Delta x \simeq 6\text{mm}$.

15. Σφαιρικό μονοχρωματικό μετ. κύματος προέρχεται από σημειακή πηγή S που βρίσκεται αριστερά από ένα διάφραγμα το οποίο περιλαμβάνει ένα ορθογώνιο άνοιγμα διαστάσεων $x_2 - x_1 = 2\text{mm}$ και $y_2 - y_1 = 1\text{mm}$. Το κέντρο του O απέχει από αυτό απόσταση $SO = r_{s0} = 1.58\text{m}$ (Σχ. 15.1). α) Θέλουμε να υπολογίσουμε με αναλυτικό τρόπο την ένταση I του περιθλώμενου από το άνοιγμα φωτός (συναρτήσει της I_u) στα σημεία P, P_1, P_2, P_3. Τα σημεία βρίσκονται πάνω σ' ένα επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα στο σημείο P που απέχει από το O απόσταση $OP = r_0 = 1.58\text{m}$. Τα σημεία P, P_1, P_2, P_3 βρίσκονται στα όρια της γεωμετρικής σκιάς

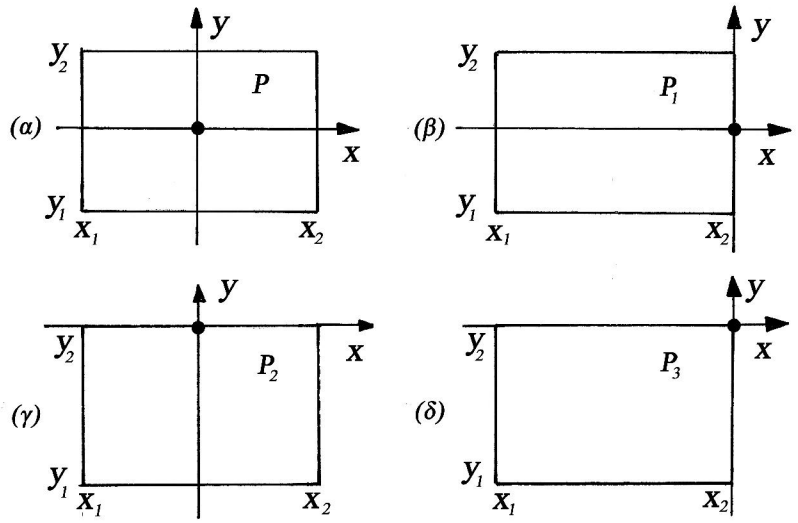
του ορθογωνίου ανοίγματος, όπως ακριβώς φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Το μ.κ. του προσπίπτοντος φωτός είναι $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. β) Να υπολογιστούν οι εντάσεις του φωτός στα ίδια σημεία με τη βοήθεια της σπείρας Cornu.



(Σχ. 15.1)

Υπόδειξη

Κατ' αρχή θα πρέπει για το κάθε σημείο από τα P_1, P_2, P_3 να βρούμε τις νέες τιμές των x_1, x_2, y_1, y_2 με βάση την κατάλληλη μετατόπιση του σ.σ. x, y σε σχέση με το σημείο P του οπτικού άξονα (Σχ. 15.2).



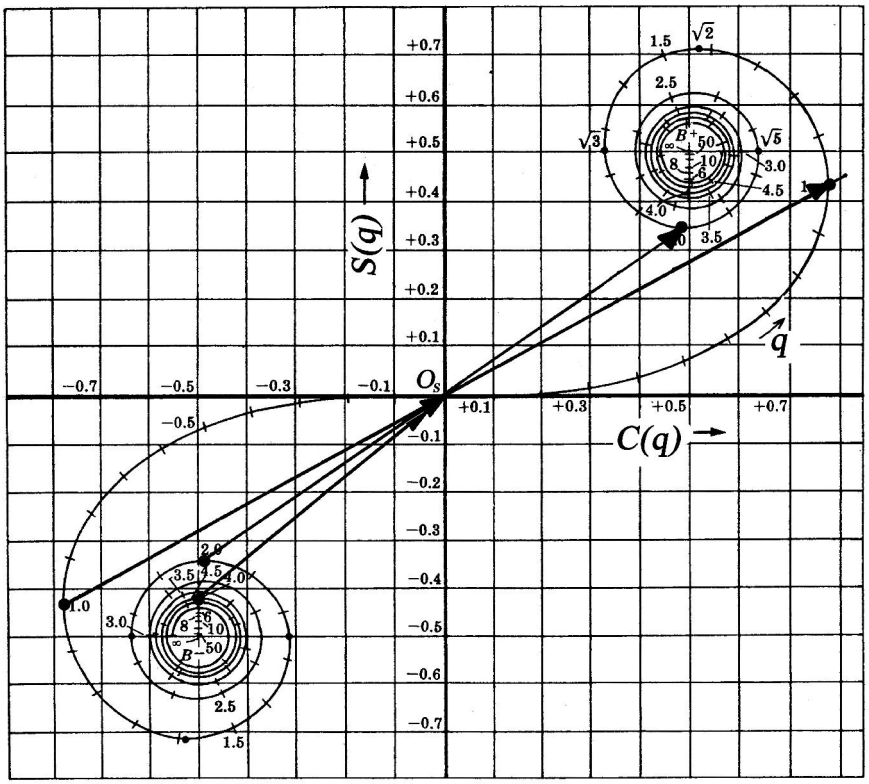
(Σχ. 15.2)

Κατόπιν με τη βοήθεια των: $u \to x\sqrt{\dfrac{2\left(r_{s0}+r_0\right)}{\lambda r_{s0} r_0}}$ και $\upsilon \to y\sqrt{\dfrac{2\left(r_{s0}+r_0\right)}{\lambda r_{s0} r_0}}$, να προσδιορίσουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ των $x \to u$ και $y \to \upsilon$. Έπεται ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Fresnel $C(\ )$ και $S(\ )$ για την κάθε περίπτωση, με τη βοήθεια του (Πίν. 7.8.8.2). Τέλος, οι αναλυτικές λύσεις για τον προσδιορισμό των εντάσεων του φωτός στα σημεία P, P_1, P_2, P_3 δίνονται μέσω της (σχ. 7.8.8.13):

$$I_P = \frac{I_u}{4}\left\{\left[C(u_2)-C(u_1)\right]^2+\left[S(u_2)-S(u_1)\right]^2\right\}\left\{\left[C(\upsilon_2)-C(\upsilon_1)\right]^2+\left[S(\upsilon_2)-S(\upsilon_1)\right]^2\right\}.$$

Θα πρέπει να βρούμε: $I_P \simeq 1.14 I_u$, $I_{P_1} \simeq 0.34 I_u$, $I_{P_2} \simeq 0.126 I_u$ και $I_{P_3} \simeq 0.03 I_u$.

Οι λύσεις με τη βοήθεια της σπείρας Cornu προκύπτουν μέσω του προσδιορισμού των μέτρων των φασόρων: $\mathbf{E}_{12}(u)$, $\mathbf{E}_{12}(\upsilon)$ (Σχ. 15.3). Πρόκειται για τα μήκη των χορδών των αντιστοίχων τόξων: $\widehat{u_1, u_2}$ και $\widehat{\upsilon_1, \upsilon_2}$. Κατόπιν με



(Σχ. 15.3)

γνωστά αυτά τα μέτρα για την κάθε μια των περιπτώσεων χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των εντάσεων του φωτός τη (σχ. 7.8.8.20): $I_P = \frac{I_u}{4}\left|\mathbf{B}_{12}(u)\right|^2\left|\mathbf{B}_{12}(\upsilon)\right|^2$ βρίσκουμε: $I_P \simeq 1.11 I_u$, $I_{P_1} \simeq 0.33 I_u$, $I_{P_2} \simeq 0.123 I_u$ και $I_{P_3} \simeq 0.038 I_u$.